BSPH101CCT

میکانیات

(Mechanics)

مع

لَیب مینول

(Lab Manual)

فاصلاتی اور روایتی نصاب پر مبنی خود اکتسابی مواد

برائے

بیچلر آف سائنس (بی۔ایس سی)

(پہلا سمسٹر)

نظامت فاصلاتی تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد-32، تلنگانہ-بھارت

©Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad
Course-Bachelor of Science
ISBN: 978-93-80322-82-7
Edition: June, 2021

ناشر : رجسٹرار، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
اشاعت : جون، 2021
قیمت : 170/-
تعداد : 3000
ترتیب وتزئین : ڈاکٹر محمد اکمل خان، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد
مطبع : کرشک پرنٹ سولیوشنس، حیدرآباد

میکانیات
(Mechanics)
For B.Sc. 1st Semester

On behalf of the Registrar, Published by:
Directorate of Distance Education
Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad-500032 (TS), Bharat
Director: dir.dde@manuu.edu.in Publication: ddepublication@manuu.edu.in
Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

مجلس ادارت

(Editorial Board)

مضمون مدیران **(Subject Editors)**	
Dr. H. Aleem Basha (Program Coordinator) Associate Professor (Physics) School of Sciences, MANUU, Hyderabad	ڈاکٹر ایچ۔ علیم باشا (پروگرام کوآرڈی نیٹر) اشوسی ایٹ پروفیسر (طبیعیات) اسکول برائے سائنسی علوم، مانو، حیدرآباد
Dr. Priya Hasan (Course Coordinator) Assistant professor, (Physics) School of Sciences, MANUU, Hyderabad	ڈاکٹر پریا حسن (کورس کوآرڈی نیٹر) اسسٹنٹ پروفیسر (طبیعیات) اسکول برائے سائنسی علوم، مانو، حیدرآباد
Dr. Rizwanul Haq Ansari Assistant Professor, (Physics) School of Sciences, MANUU, Hyderabad	ڈاکٹر رضوان الحق انصاری اسسٹنٹ پروفیسر (طبیعیات) اسکول برائے سائنسی علوم، مانو، حیدرآباد
Mr. Zia ur Rahman Guest Faculty (Physics) DDE, MANUU, Hyderabad	جناب ضیاء الرحمن گیسٹ فیکلٹی (طبیعیات) نظامت فاصلاتی تعلیم، مانو، حیدرآباد
زبان مدیر **(Language Editor)**	
Dr. Mohd Akmal Khan Guest Faculty (Urdu) Directorate of Distance Education, MANUU	ڈاکٹر محمد اکمل خان گیسٹ فیکلٹی (اردو) نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

نظامت فاصلاتی تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد-32، تلنگانہ-بھارت

کورس کو آرڈی نیٹر

ڈاکٹر پریا حسن
اسسٹنٹ پروفیسر (طبیعیات)، اسکول برائے سائنسی علوم
مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

مصنفین	اکائی نمبر
• ڈاکٹر ایچ۔ علیم باشا	اکائی 17،16،14،12،11،10،2،1
• ڈاکٹر رضوان الحق انصاری	اکائی 5،4
• جناب ضیاء الرحمن	اکائی 15،13،9،8،7،6،3

لیب مینول

• ڈاکٹر ایچ۔ علیم باشا • ڈاکٹر رضوان الحق انصاری • جناب ضیاء الرحمن	تجربہ 18 تا 24

پروف ریڈرس:

اول	:	جناب ضیاء الرحمن
دوم	:	ڈاکٹر محمد اکمل خان
فائنل	:	ڈاکٹر رضوان الحق انصاری / ڈاکٹر ایچ۔ علیم باشا

سرورق	:	ڈاکٹر محمد اکمل خان

فہرست

پیغام	وائس چانسلر	7
پیغام	ڈائرکٹر	8
کورس کا تعارف	کورس کوآرڈی نیٹر	9

بلاک I

اکائی 1	ویکٹر الجبرا	11
اکائی 2	حرکت کے کلیات	31
اکائی 3	کمیت کا مرکز	48

بلاک II

اکائی 4	عام تفرقی مساواتیں	70
اکائی 5	معیار حرکت اور توانائی	85
اکائی 6	بقائے زاویائی معیار حرکت	98
اکائی 7	گردشی حرکت	112

بلاک III

اکائی 8	کشش ثقل	133
اکائی 9	سیاروں اور سیٹلائٹس کی حرکت	155
اکائی 10	اہتزازات	178
اکائی 11	سادہ موسیقی حرکت کی توانائی	194
اکائی 12	قصری اہتزازات	213

بلاک IV

اکائی 13	لچک دار مادے	223
اکائی 14	ٹھوس اجسام کی لچک کے خواص	238
اکائی 15	جمود کا معیار اور استواری کا معیار	256
اکائی 16	خصوصی نظریہ اضافیت	276
اکائی 17	لورینز استحالہ	294

نمونہ امتحانی پرچہ **310**

لَیب مینول **313**

بلاک V

اکائی 18	اڑن پہیے کے جمود کا معیار اثر	314
اکائی 19	دوریشی تعلیق کے جمود کا معیار اثر	322
اکائی 20	مرکب رقاص کے ذریعے اسراع بہ وجہ زمینی کشش	333

بلاک VI

اکائی 21	صوت پیا کے ذریعے متبادل رو کی طاقت کی تعداد	342
اکائی 22	مروڑی رقاص کے ذریعے کسی تار کے مادے کی استواری کا معیار	350
اکائی 23	گمک کار حجم کے ذریعے ہوا میں آواز کی رفتار	359
اکائی 24	یکساں خمیدگی کے ذریعے ینگ کا معیار	366

نمونہ امتحانی پرچہ **374**

پیغام

وطنِ عزیز کی پارلیمنٹ کے جس ایکٹ کے تحت مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی کا قیام عمل میں آیا ہے اُس کی بنیادی سفارش اُردو کے ذریعے اعلیٰ تعلیم کا فروغ ہے۔ یہ وہ بنیادی نکتہ ہے جو ایک طرف اِس مرکزی یونیورسٹی کو دیگر مرکزی جامعات سے منفرد بناتا ہے تو دوسری طرف ایک امتیازی وصف ہے، ایک شرف ہے جو ملک کے کسی دوسرے اِدارے کو حاصل نہیں ہے۔ اُردو کے ذریعے علوم کو فروغ دینے کا واحد مقصد و منشا اُردو داں طبقے تک عصری علوم کو پہنچانا ہے۔ ایک طویل عرصے سے اُردو کا دامن علمی مواد سے لگ بھگ خالی ہے۔ کسی بھی کتب خانے یا کتب فروش کی الماریوں کا سرسری جائزہ بھی تصدیق کر دیتا ہے کہ اُردو زبان سمٹ کر چند ''ادبی'' اصناف تک محدود رہ گئی ہے۔ یہی کیفیت رسائل و اخبارات کی اکثریت میں دیکھنے کو ملتی ہے۔ ہماری یہ تحریریں قاری کو کبھی عشق و محبت کی پُر پیچ راہوں کی سیر کراتی ہیں تو کبھی جذباتیت سے پُر سیاسی مسائل میں اُلجھاتی ہیں، کبھی مسلکی اور فکری پس منظر میں مذاہب کی توضیح کرتی ہیں تو کبھی شکوہ شکایت سے ذہن کو گراں بار کرتی ہیں۔ تاہم اُردو قاری اور اُردو سماج آج کے دور کے اہم ترین علمی موضوعات چاہے وہ خود اُس کی صحت و بقا سے متعلق ہوں یا معاشی اور تجارتی نظام سے، وہ جن مشینوں اور آلات کے درمیان زندگی گزار رہا ہے اُن کی بابت ہوں یا اُس کے گرد و پیش اور ماحول کے مسائل ہوں۔ وہ ان سے نابلد ہے۔ عوامی سطح پر اِن شعبہ جات سے متعلق اردو میں مواد کی عدم دستیابی نے علوم کے تئیں ایک عدم دلچسپی کی فضا پیدا کر دی ہے جس کا مظہر اُردو طبقے میں علمی لیاقت کی کمی ہے۔ یہی وہ مبارزات (Challenges) ہیں جن سے اُردو یونیورسٹی کو نبرد آزما ہونا ہے۔ نصابی مواد کی صورت حال بھی کچھ مختلف نہیں ہے۔ اِسکولی سطح کی اُردو کتب کی عدم دستیابی کے چرچے ہر تعلیمی سال کے شروع میں زیرِ بحث آتے ہیں۔ چوں کہ اُردو یونیورسٹی میں ذریعہ تعلیم ہی اُردو ہے اور اس میں علوم کے تقریباً سبھی اہم شعبہ جات کے کورسز موجود ہیں لہٰذا اِن تمام علوم کے لیے نصابی کتابوں کی تیاری اِس یونیورسٹی کی اہم ترین ذمے داری ہے۔ چوں کہ اسی مقصد کے تحت اردو یونیورسٹی کا آغاز فاصلاتی تعلیم سے 1998 میں ہوا تھا۔ احقر کو اِس بات کی بے حد خوشی ہے کہ اس کے ذمے داران بشمول اساتذہ کرام کی انتھک محنت اور قلم کاروں کے بھرپور تعاون کے نتیجے میں کتب کی اشاعت کا سلسلہ شروع ہو گیا ہے۔ مجھے یقین ہے کہ کم سے کم وقت میں خود اکتسابی مواد اور خود اکتسابی کتب کی اشاعت کے بعد اِس کے ذمے داران، عام اردو قارئین کے لیے بھی علمی مواد، آسان زبان میں تحریر کرا کے کتابوں کی شکل میں شائع کرنے کا سلسلہ شروع کریں گے تاکہ ہم اِس یونیورسٹی کے وجود اور اِس میں اپنی موجودگی کا حق ادا کر سکیں۔

پروفیسر ایس۔ ایم۔ رحمت اللہ
وائس چانسلر، انچارج
مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

پیغام

آپ تمام بخوبی واقف ہیں کہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کا باقاعدہ آغاز 1998 میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور ٹرانسلیشن ڈویژن سے ہوا تھا۔ 2004 میں باقاعدہ روایتی طرزِ تعلیم کا آغاز ہوا۔ متعدد روایتی تدریس کے شعبہ جات قائم کیے گئے۔ نو قائم کردہ شعبہ جات اور ٹرانسلیشن ڈویژن میں تقرریاں عمل میں آئیں۔ اس وقت کے اربابِ مجاز کے بھرپور تعاون سے مناسب تعداد میں خود مطالعاتی مواد تحریر و ترجمے کے ذریعے تیار کرائے گئے۔

گزشتہ کئی برسوں سے یو جی سی۔ ڈی ای بی UGC-DEB اس بات پر زور دیتا رہا ہے کہ فاصلاتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات کو روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات سے کماحقہ ہم آہنگ کر کے نظامتِ فاصلاتی تعلیم کے طلبا کے معیار کو بلند کیا جائے۔ چوں کہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی فاصلاتی اور روایتی طرزِ تعلیم کی جامعہ ہے، لہٰذا اس مقصد کے حصول کے لیے یو جی سی۔ ڈی ای بی کے رہنمایانہ اصولوں کے مطابق نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات کو ہم آہنگ اور معیار بند کر کے خود اکتسابی مواد SLM از سرِ نو بالترتیب یو جی اور پی جی طلبا کے لیے چھے بلاک چوبیس اکائیوں اور چار بلاک سولہ اکائیوں پر مشتمل نئے طرز کی ساخت پر تیار کرائے جا رہے ہیں۔

فاصلاتی طریقۂ تعلیم پوری دنیا میں ایک انتہائی کارگر اور مفید طریقۂ تعلیم کی حیثیت سے تسلیم کیا جا چکا ہے اور اس طریقۂ تعلیم سے بڑی تعداد میں لوگ مستفیض ہو رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی نے بھی اپنے قیام کے ابتدائی دنوں ہی سے اردو آبادی کی تعلیمی صورت حال کو محسوس کرتے ہوئے اِس طرزِ تعلیم کو اختیار کیا۔ اِس طرح سے یونیورسٹی نے روایتی طریقۂ تعلیم سے پہلے فاصلاتی طریقۂ تعلیم کے ذریعے اردو آبادی تک تعلیم پہنچانے کا سلسلہ شروع کیا۔ پہلے پہل یہاں کے تدریسی پروگراموں کے لیے امبیڈکر یونیورسٹی اور اندرا گاندھی نیشنل اوپن یونیورسٹی کے نصابی مواد سے من و عن یا ترجمے کے ذریعے استفادہ کیا گیا۔ اِرادہ یہ تھا کہ بہت تیزی سے اپنا نصابی مواد تیار کرالیا جائے گا اور دوسری یونیورسٹیوں کے مواد پر انحصار ختم ہو جائے گا، لیکن اِرادہ اور کوشش دونوں ایک دوسرے سے ہم آہنگ نہیں ہو پائے، جس کی وجہ سے اپنے خود اکتسابی مواد کی تیاری میں اچھی خاصی تاخیر ہوئی۔ بالآخر منظم اور جنگی پیمانے پر کام شروع ہوا، جس کے دوران میں قدم قدم پر مسائل پیش آئے۔ مگر کوششیں جاری ہیں، نتیجتاً بہت تیزی سے یونیورسٹی نے اپنے نصابی مواد کی اشاعت شروع کر دی ہے۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلوما اور سرٹیفکیٹ کورسز پر مشتمل جملہ پندرہ کورسز چلا رہا ہے۔ بہت جلد تکنیکی ہنر پر مبنی کورسز بھی شروع کیے جائیں گے۔ متعلمین کی سہولت کے لیے 9 علاقائی مراکز بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر اور 5 ذیلی علاقائی مراکز حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح اور امراوتی کا ایک بہت بڑا نیٹ ورک تیار کیا ہے۔ ان مراکز کے تحت سرِ دست 155 متعلم امدادی مراکز کام کر رہے ہیں، جو طلبا کو تعلیمی اور انتظامی مدد فراہم کرتے ہیں۔ ڈی ڈی ای نے اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا استعمال شروع کر دیا ہے، نیز اپنے تمام پروگراموں میں داخلے صرف آن لائن طریقے ہی سے دے رہا ہے۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم کی ویب سائٹ پر متعلمین کو خود اکتسابی مواد کی سافٹ کاپیاں بھی فراہم کی جا رہی ہیں، نیز جلد ہی آڈیو۔ ویڈیو ریکارڈنگ کا لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ متعلمین کے درمیان رابطے کے لیے ایس ایم ایس کی سہولت فراہم کی جا رہی ہے، جس کے ذریعے متعلمین کو پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس کے رجسٹریشن، مفوضات، کونسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔

امید ہے کہ ملک کی تعلیمی اور معاشی حیثیت سے پچھڑی اردو آبادی کو مرکزی دھارے میں لانے میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم کا بھی نمایاں رول ہو گا۔

پروفیسر ابوالکلام
ڈائرکٹر، نظامت فاصلاتی تعلیم

کورس کا تعارف

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے مختلف شعبہ جات میں سن 2016 میں سی بی ایس سی (CBSE) نصاب متعاروف ہوا۔ یہ کتاب میکانیات (Mechanics) کے ان موضوعات سے بحث کرتی ہے جنہیں مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی ایس سی (فزیکل سائنس) پروگرام کے سال اول (سمسٹر 1) کے طبعیات کے نصاب میں شامل کیا گیا ہے۔ یہ موضوعات مضمون کی جدید تحقیقات کا احاطہ کرتے ہیں، اور بی ۔اس سی (B.sc) کورس کے سال اول میں مطالعے کے لیے انہیں شریک کیا گیا ہے۔ سہولت کی خاطر نصاب کو بلاکس (Blocks) میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ہر ایک بلاک چند اکائیوں پر مشتمل ہے۔ ہر اکائی میں بالعموم مضمون کے مخصوص نکات کو ملحوظ رکھا گیا ہے۔ اکائیوں کو ماہرین کے ذریعے ایک مخصوص خاکے (Format) کے مطابق تیار کیا گیا ہے۔ خاکہ کچھ اس طرح ہے کہ طالب علم انہیں پڑھ کر بغیر کسی دقت کے سمجھ جائے۔ ہر اکائی کا آغاز اس کے مقاصد اور اس کے مطالعے کے بعد حاصل ہونے والے واقفیت پسندانہ بیان سے ہوتا ہے۔ ہر اکائی کے اختتام پر خلاصہ، معروضی سوالات، نمونہ امتحانی سوالات اور مشقیں دی گئی ہیں تاکہ طلبا نفس مضمون کے صحیح ادراک کا امتحان کرلیں۔

زیر نظر کتاب مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے فاصلاتی نظام اور روایتی طلبا کے ساتھ ساتھ سائنسی مضامین میں دلچسپی رکھنے والے اردو قاریوں اور مدارس کے طلبا کے لیے بھی مفید ثابت ہوسکتی ہے۔ آسان اردو زبان میں لکھی گئی ہے۔ تکنیکی اصطلاحات کے خالص اردو ترجے سے گریز کیا گیا ہے تاکہ طلبا مارکیٹ میں کثرت سے استعمال ہورہی انگریزی اصطلاحات سے واقف ہوسکیں۔

اس کتاب کے مصنفین امید کرتے ہیں کہ اس کورس میں پیش کردہ موضومات طلبا کو میکانیات کے نظریات، اصولوں اور اطلاقات سے واقف کروائیں گے۔ مزید امید ہے کہ قارئین اور ماہرین اپنے مشوروں سے بھی نوازیں گے۔

ڈاکٹر پریا حسن
کورس کوآرڈی نیٹر

میکانیات

(Mechanics)

اکائی 1۔ ویکٹر الجبرا

(Vector Algebra)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید
1.1 مقاصد
1.2 میزانیے اور سمتیے
1.2.1 سمتیے کے اقسام
1.3 مقام اور نقل مقام سمتیہ
1.4 مساوی سمیتہ
1.5 حقیقی عدد سے سمتیوں کی ضرب
1.6 سمتیوں کی جمع اور تفریق
1.7 اکائی سمتیہ
1.8 کسی مستوی میں مستقل اسراع کے ساتھ حرکت
1.9 حل شدہ مثالیں
1.10 اکتسابی نتائج
1.11 کلیدی الفاظ
1.12 نمونہ امتحانی سوالات
1.12.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
1.12.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
1.12.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
1.12.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات
1.13 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

1.0 تمہید (Introduction)

طبعی دنیا میں ہم طبیعی مقداروں کی میزانیوں اور سمتیوں میں درجہ بندی کر سکتے ہیں۔ دونوں میں اہم فرق یہ ہے کہ سمتیے (Vector) کے ساتھ سمت منسلک ہوتی ہے جب کہ میزانیے کے ساتھ ایسا نہیں ہوتا ہے۔ لہٰذا سب سے پہلے ہم سمتیوں کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے کہ سمتیے کیا ہے؟ سمتیوں کو کیسے جمع، تفریق یا ضرب کیا جاتا ہے۔ سمتیوں کو کسی حقیقی عدد سے ضرب کریں تو ہمیں کیا حاصل ہوتا ہے۔

اب ہم سمتیے کی چند خصوصیات اور ریاضیاتی عمل پر روشنی ڈالیں گے۔

1.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی میزانیے اور سمتیوں سے واقف کراتی ہے اور اس کی تفہیم مثالوں کے ذریعے ویکٹر الجبرا کے تمام اصولوں کو سمجھاتی ہے۔

اس اکائی میں ہم:

i. سمتیوں کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔

ii. کسی مستوی میں مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

1.2 میزانیے اور سمتیے (Scalars and Vectors)

طبعی مقداریں دو قسموں میں تقسیم کی گئی ہیں۔

i. میزانیہ

ii. سمتیہ

i. **میزانیہ:** وہ طبعی مقدار جو صرف عددی قدر رکھتی ہو، میزانیہ کہلاتی ہے۔

مثالیں: چال، کمیت، وقت۔۔۔وغیرہ۔

ایک میزانیہ مقدار وہ مقدار ہوتی ہے جس میں صرف عددی قدر (Magnitude) ہوتی ہے۔ اس کو صرف ایک عدد اور موزوں اکائی کے ساتھ ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

مثالیں: دو نقاط کے درمیان کی دوری، کسی شے کی کمیت (Mass) اور کسی جسم کی تپش وغیرہ۔

میزانیے کے استعمال کے وہی اصول ہوتے ہیں جو عام طور پر الجبرا میں لائے جاتے ہیں جیسے کہ ہم عدد کے ساتھ کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر کسی مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی علی الترتیب 1 میٹر اور 5 میٹر ہو تو اس کا محیط (Perimeters) یعنی چاروں بازوؤں کی لمبائیوں

کی جمع $1m + 5m + 1m + 5m = 12m$ ہو گی۔ یہاں پر ہر بازو کی لمبائی ایک میز انیہ ہے اور محیط بھی ایک میز انیہ ہے۔
اسی طرح اگر کسی ایک دن کی زیادہ سے زیادہ تپش $45.6°C$ اور کم سے کم تپش $25.2°C$ ہو تو ان دونوں کا فرق $20.4°C$ ہو گا۔

ii. **سمتیہ:** وہ طبعی مقدار جو عددی قدر کے ساتھ سمت بھی رکھتی ہو، سمت کہلاتی ہے، جیسے رفتار، اسراع وغیرہ۔

ایک سمتیہ وہ ہے جس میں عددی قدر اور سمت دونوں ہوتے ہیں اور وہ جمع کے کلیہ مثلث (Triangle Law of Addition) یا جمع کے کلیہ متوازی الاضلاع (Parallelogram Law of Addition) کی تعمیل کرتا ہے۔ لہٰذا ایک سمتیے کو اس کی قدر کے عدد اور سمت کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کی مثالیں نقل مقام (Displacement)، رفتار (Velocity)، اسراع (Accelaration) اور قوت (Force)۔۔۔۔وغیرہ ہیں۔

سمتیے کو ظاہر کرنے کے لیے ہم اس مواد میں اس سمتیے کے حرف کے اوپر تیر لگا کر بتائیں گے جیسے $\vec{V}$ اس میں **V** اور $\vec{V}$ دونوں ہی رفتار سمتیے کو ظاہر کرتی ہیں۔ سمتیے کی عددی قدر کو اکثر ہم اس کی مطلق قدر کہتے ہیں اور اسے $v = \vec{V}$ کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں۔

1.2.1 سمتیے کے اقسام (Types of Vector)

i. **اکائی سمتیہ:** وہ سمتیے جن کی قدر اکائی ہو، وہ اکائی سمتیہ یا یونٹ ویکٹر کہلاتی ہے۔

ii. **صفر سمتیہ:** وہ سمتیے جن کی قدر صفر ہو اور اس کی کوئی مخصوص سمت نہ ہو۔ وہ صفر یا Null ویکٹر کہلاتے ہیں۔

iii. **منفی ویکٹر یا نقلیاتی ویکٹر:** وہ سمتیے جن کی قدر دیے گئے ویکٹر کے مساوی ہوتی ہے لیکن سمت مخالف ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر
اگر $0 = A + B \Leftarrow B = -A$

iv. **مساوی ویکٹیرین:** اگر دو ویکٹروں کی قدریں اور سمتیے مساوی ہوں تو وہ مساوی یا ایکول ویکٹر (Equal Vector) کہلاتے ہیں۔

v. **یکساں ویکٹر س:** اگر دو ویکٹروں کی سمتیے مساوی ہوں اور قدریں مختلف ہوں تو وہ یکساں یا لائک ویکٹر کہلاتے ہیں۔

vi. **غیر یکساں ویکٹر س:** اگر دو ویکٹر س سمتیے مخالف ہوں اور قدریں بھی علاحدہ ہوں تو وہ غیر یکساں یا ان لائک ویکٹر س کہلاتے ہیں۔

vii. **متوازی ویکٹر س:** اگر دو ویکٹروں کی سمتیے مساوی ہوں تو وہ متوازی ویکٹر س کہلاتے ہیں۔ ان دونوں کے درمیانی زاویہ صفر ڈگری کا ہوتا ہے۔

viii. **غیر متوازی ویکٹر س:** اگر دو ویکٹر س کی سمت مخالف ہو تو وہ غیر متوازی ویکٹر س کہلاتے ہیں۔ ان دونوں کے درمیان کا زاویہ 180^0 ڈگری کا ہوتا ہے۔

ix. اگر کسی سمت A کو کسی حقیقی عدد λ سے ضرب کریں تو ہمیں ایک دوسری سمت B حاصل ہوتی ہے۔ بلکہ عدد قدر A کی عدد قدر کی λ گنا ہوتی ہے۔ سمت اس بات پر منحصر ہوتی ہے کہ λ مثبت ہے یا منفی۔

x. **آرتھو گونل ویکٹر س:** اگر دو ویکٹر کے درمیان 90^0 کا زاویہ ہو تو وہ آرتھو گونل ویکٹر کہلاتے ہیں۔

xi. **ہم مستوی ویکٹر س:** وہ ویکٹر س جو ایک ہی پلین میں ہوں تو وہ ویکٹر س ہم مستوی ویکٹر س کہلاتے ہیں۔

xii. **بنیادی اکائی ویکٹر:** وہ تین ویکٹرس جو ایک دوسرے سے پرپینڈی (Perpendicular) کلر ہو تو اور وہ تینوں محوروں میں ہو تو وہ بنیادی اکائی ویکٹر کہلاتے ہیں۔

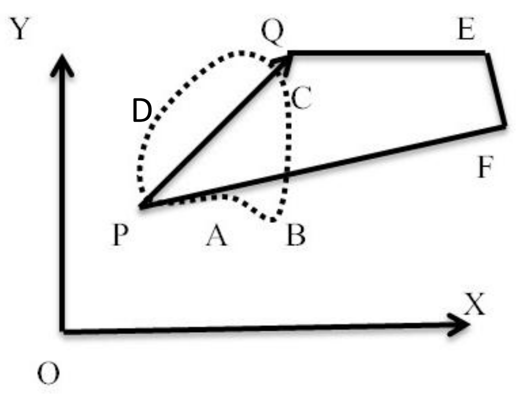
xiii. **مقامی ویکٹر:** وہ ویکٹر جو ایک نقطے کے مقام کو ظاہر کرتا ہو وہ مقامی یا پوزیشن ویکٹر (Position Vector) کہلاتا ہے۔

اگر $P(x,y,z)$ ایک نقطہ دیے گئے مقام کو ظاہر کرتا ہو تو $\overrightarrow{0p} = \vec{r} = xi + yj + zk$ اور اس کی قدر

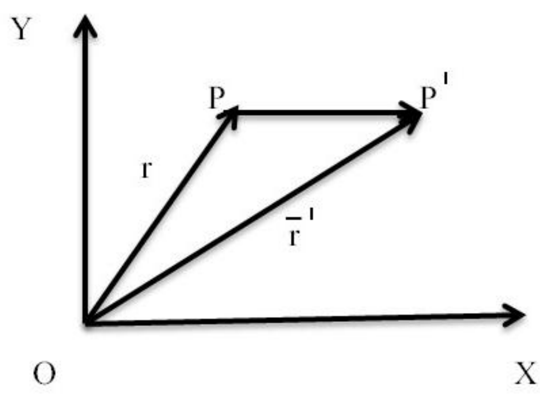
$$|\overrightarrow{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1.3 مقام اور نقل مقام سمتیے (Position and Displacement Vectors)

کسی مستوی میں متحرک شے کے مقام کو ظاہر کرنے کے لیے ہم آسانی سے کسی نقطے 'O' کو مبدا (Origin) کے طور پر مانتے ہیں۔ فرض کرو کہ دو مختلف وقت t اور t' پر شے کے مقامات علی الترتیب p اور P' میں ہے۔ جیسے (شکل 1.1) میں دکھایا گیا ہے کہ ہم P کو O سے ایک خط مستقیم سے جوڑدیتے ہیں۔ اس طرح $\overrightarrow{OP}$ وقت t پر شے کا مقام سمتیہ ہوگا۔ اس خط کے آخری سرے پر ایک تیر کا نشان لگادیتے ہیں۔ اسے کسی علامت r سے پیش کرتے ہیں یعنی $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ اسی طرح نقطہ P' کو ایک دوسرے مقامی سمتیہ $\overrightarrow{P'}$ یعنی $\overrightarrow{r'}$ کی لمبائی اس کی عددی قدر کو ظاہر کرتی ہے اور O سے دیکھنے پر P اور P' جس سمت میں واقع ہوں' سمتیے کی سمت بھی وہی کہلائے گی۔ اگر شے P سے حرکت کرکے P' پر پہنچ جاتی ہے تو سمتیہ PP' (جس کی tail P پر اور (head) چوٹی P' پر ہے) نقطہ P وقت (t) سے وقت (t') تک حرکت کا نقل مقام یا نقل مقام سمتیہ (Displacement Vector) کہلاتا ہے۔



شکل (1.2)



شکل (1.1)

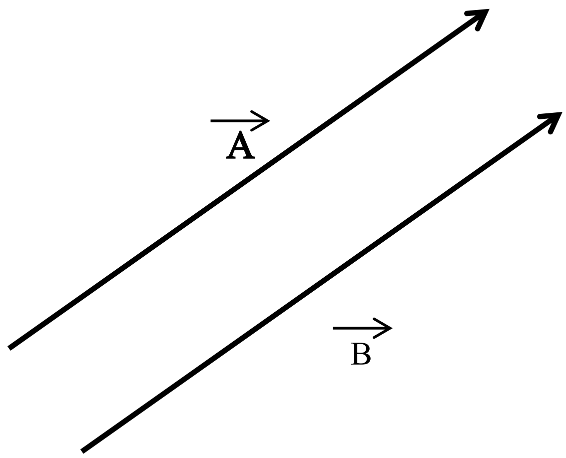
یہاں یہ بات ذہن نشین کرنے کی ہے کہ نقل مقام سمتیہ کو ایک خط مستقیم سے ظاہر کرتے ہیں جو شے کے آخری مقام کو اس کی ابتدائی مقام سے جوڑتا ہے اور یہ اس حقیقی راستے پر انحصار کرتا ہیں جو شے کے ذریعے نقطے کے درمیان طے کیا جاتا ہے۔

شکل (1.2) کے مطابق ابتدائی مقام P اور انتہائی مقام Q کے درمیان طے کیا جاتا ہے جیسے PABCQ, PDQ اور

PBEFQ الگ الگ ہیں۔ لیکن نقل مقام سمتیہ $\overrightarrow{PQ}$ ہر حال میں وہی ہے۔ لہٰذا کسی بھی دو نقاط کے درمیان نقل مقام سمتیے کی عددی قدر یا تو متحرک شے کی راہ کی لمبائی سے کم ہوتی ہے یا اس کے برابر ہوتی ہے۔

1.4 مساوی سمیتہ (Equality of Vector)

دو سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کو صرف تبھی برابر کہا جا سکتا ہے جب ان کی عددی قدریں برابر ہوں اور ان کی سمت یکساں ہو۔ میزانیوں کی جمع و تفریق صرف انہیں مقداروں کے لیے ہوتی ہے جن کی اکائیاں ایک جیسی ہوتی ہیں۔ ہمارے مطالعے میں سمتیوں کے مقامات متعین نہیں ہیں۔ اس لیے جب ایک سمتیے کو خود اس کے متوازی منتقل کرتے ہیں تو سمتیے پر کوئی فرق نہیں ہوتا ہے۔ اس طرح کے سمتیے کو ہم آزاد سمتیہ کہتے ہیں۔



شکل (1.3)

1.5 حقیقی عدد سے سمتیوں کی ضرب (Multiplication of a Vectors by Real Number)

اگر ایک سمتیہ $\vec{A}$ کو کسی مثبت عدد λ سے ضرب کریں تو ہمیں ایک سمتیہ ہی ملتا ہے جس کی عددی قدر $\vec{A}$ عددی قدر کی λ گنا ہو جاتی ہے اور جس کی سمت بھی وہی ہے جو $\vec{A}$ کی سمت ہے۔ اس حاصل ضرب کو ہم $\overrightarrow{\lambda A}$ لکھتے ہیں۔

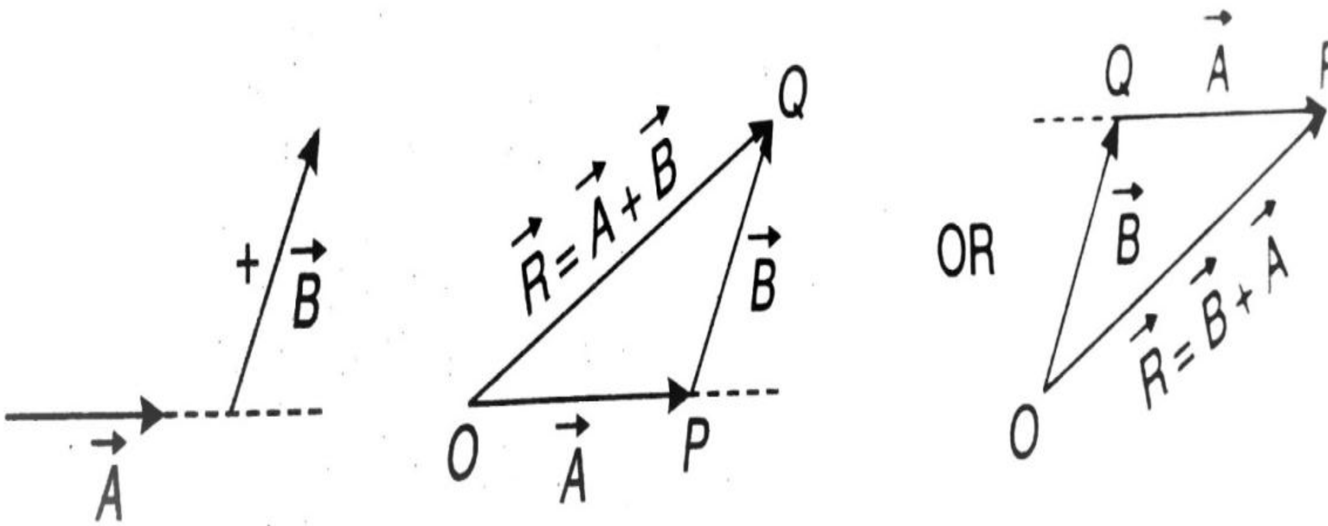
اگر $\lambda > 0$، $\left|\lambda\vec{A}\right| = \lambda\left|\vec{A}\right|$

مثال کے طور پر اگر $\vec{A}$ کو 2 سے ضرب کیا جائے تو حاصل سمتیہ $2\vec{A}$ ہو گا۔ جس کی سمت $\overrightarrow{A}$ کی سمت ہو گی۔ اور عددی قدر $\left|\vec{A}\right|$ کی دوگنی ہو گی۔

سمتیہ $\vec{A}$ کو اگر ایک منفی عدد λ سے ضرب کریں تو سمتیہ $\lambda\vec{A}$ حاصل ہوتا ہے جس کی سمت $\vec{A}$ کی سمت کی مخالفت ہے اور جس کی عددی قدر $\left|\vec{A}\right|(-\lambda)$ ہوتی ہے۔

1.6 سمتیوں کی جمع و تفریق (Addition and Substraction of Vectors)

سمتیوں کی مساویت کی تعریف کی رو سے سمتیے جمع کے قانون مثلث یا جمع کے متوازی الاضلاع کے قانون کی تعمیل کرتے ہیں۔ آیئے اب ہم ترسیمتی طریقے سے جمع کے اس قانون کو بیان کریں گے۔



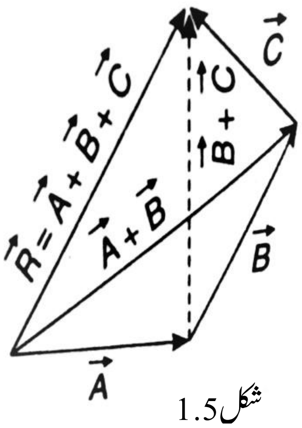
شکل (1.4)

(Source:Dr.S.L.Gupta&SanjeevGupta.UnifiedPhysicsVol-I,MechanicsJaiPrakashNath&Co.Meerut)

کسی مستوی میں واقع دو سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ پر غور کرتے ہیں جیسے شکل (1.4)۔ ان سمتیوں کو ظاہر کرنے والے خط کی لمبائیاں سمتیوں کی عددی قدروں کے متناسب ہوتی ہیں۔ جمع $\vec{A} + \vec{B}$ حاصل کرنے کے لیے شکل (1.4) کے مطابق ہم سمتیہ $\vec{B}$ اس طرح رکھتے ہیں کہ اس کی دم (Tail) سمتیہ $\vec{A}$ کی چوٹی (Head) پر ہو۔ پھر ہم $\vec{A}$ کی دم (Tail) کو $\vec{B}$ کے سرے (Head) سے جوڑ دیتے ہیں۔

یہ خط $\overrightarrow{OQ}$ حاصل سمتیہ R کو ظاہر کرتا ہے جو سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کا حاصل جمع ہے۔ چونکہ سمتیوں کے جوڑنے کے اس طریقے میں ایک سمتیے کی چوٹی (Head) کو دوسرے کی دم (Tail) سے جوڑتے ہیں اس لیے اس ترسیمی طریقے کو چوٹی سے دم (Head to Tail) طریقے کے نام سے بھی جانا جاتا ہے۔ دونوں سمتیے اور ان کا حاصل کسی مثلث کے تین اضلاع تشکیل دیتے ہیں۔ اس لیے اس طریقے کو مثلث سمتیوں کی جمع کا کلیہ (Triangle of Vector Addition of Law) بھی کہتے ہیں۔

جیسا کہ شکل (1.5) میں دکھایا گیا ہے کہ سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کو پہلے جوڑ کر اور پھر سمتیے کو جوڑنے پر جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے، وہ وہی ہے جو سمتیوں $\vec{B}$ اور $\vec{C}$ کو پہلے جوڑ کر پھر سمتیہ $\vec{A}$ کو جوڑنے پر ملتا ہے یعنی



$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

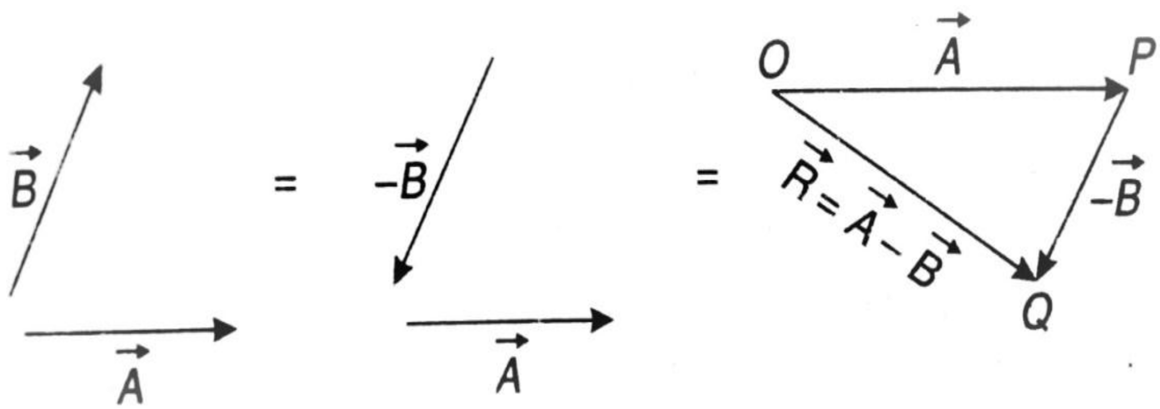
دو مساوی اور مخالف سمتیوں کو جوڑنے پر کیا نتیجہ ملتا ہے؟ دو سمتیوں $\vec{A}$ اور $-\vec{A}$ جو $\vec{A}$ کا مساوی لیکن مخالف ہے۔ ان کی جمع $\vec{A}+(-\vec{A})$ ہے۔ یہاں پر سمتیوں کی قدریں ایک ہی ہیں لیکن سمتیں مخالف ہیں۔ اس لیے حاصل کی قدر صفر سے ظاہر کی جاتی ہے اور اسے Null سمتیہ یا صفر سمتیہ کہتے ہیں۔

شکل 1.5

(Source:Dr.S.L.Gupta&SanjeevGupta.UnifiedPhysicsVol-I,MechanicsJaiPrakashNath&Co.Meerut)

$$\vec{A}-\vec{A}=0\,;|O|=0$$
$$\vec{A}+0=0+\vec{A}=\vec{A}$$
$$\lambda\vec{0}=0$$
$$0\vec{A}=0$$

صفر سمتیے کا طبعی مطلب کیا ہے؟ فرض کرو کہ کسی وقت t پر کوئی شے $\vec{P}$ پر ہے اور $\overrightarrow{P'}$ تک جا کر پھر $\vec{P}$ پر واپس آجاتی ہے۔ ایسی حالت میں شے کا نقل مقام کیا ہو گا؟ یہاں پر ابتدائی اور انتہائی مقام منطبق ہو جاتے ہیں اس لیے نقل مقام صفری سمتیہ ہو گا۔



شکل (1.6)

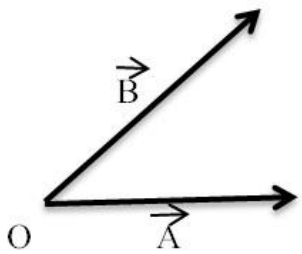
(Source:Dr.S.L.Gupta&SanjeevGupta.UnifiedPhysicsVol-I,MechanicsJaiPrakashNath&CO.Meerut)

دو سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے فرق کو ہم دو جیسے شکل (1.6) میں سمتیوں $\vec{A}$ اور $-\vec{B}$ کی جمع کے طور پر درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

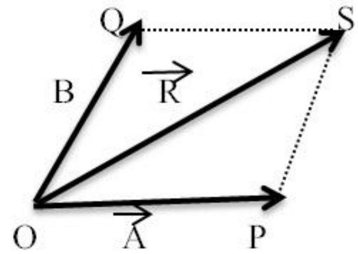
$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

سمتیہ $-\vec{B}$ کو سمتیہ $\vec{A}$ میں جوڑ کر $\vec{A}-\vec{B}$ حاصل ہوتا ہے۔

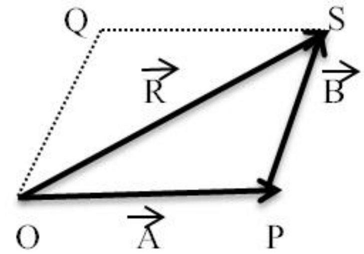
متوازی الاضلاع کے طریقے کا استعمال کر کے بھی ہم دو سمتیوں کی جمع حاصل کر سکتے ہیں۔



شکل((1.7(a))



شکل((1.7(b))



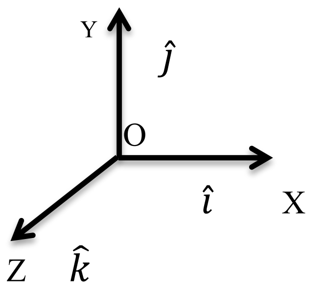
شکل((1.7(c))

شکل(1.7)

فرض کرو کہ ہمارے پاس دو سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ ہیں۔ ان سمتیوں کو جوڑنے کے لیے ان کی دم کو ایک مشترک بنیادی نقطہ 0 پر لاتے ہیں جیسا کہ شکل ((1.7(a)) میں دکھایا گیا ہے۔ پھر ہم $\vec{A}$ کی چوٹی سے $\vec{B}$ کے متوازی ایک خط کھینچتے ہیں اور $\vec{B}$ کی چوٹی سے $\vec{A}$ کے متوازی الاضلاع OQSP پورا کرتے ہیں۔ جس نقطے پر یہ دونوں خط ایک دوسرے کو قطعہ کرتے ہیں، اسے مبدا O سے جوڑ دیتے ہیں۔ حاصل سمتیے $\vec{R}$ کی سمت میں ہوگی۔ شکل ((1.7(b)), شکل ((1.7(c)) میں سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کا حاصل نکالنے کے لیے مثلث کلیہ (Triangle Law) کا استعمال دکھایا گیا ہے۔ دونوں شکلوں سے ظاہر ہوتا ہے کے دونوں طریقوں سے ایک ہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا یہ دونوں طریقے مساوی ہیں۔

1.7 اکائی سمتیہ (Unit Vector)

اکائی سمتیہ وہ ہوتا ہے جس کی عددی قدر ایک ہو اور محض سمت کا تعین کرنے کے لئے اس کا استعمال ہوتا ہے۔ شکل(1.8) میں دکھائے گئے تین ابعادی نظام کے y,x اور z محوروں کے موافق اکائی سمتیوں کو ہم علی الترتیب $\hat{\imath}$، $\hat{\jmath}$ اور $\hat{k}$ کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں کیونکہ یہ سبھی اکائی سمتیہ ہیں اس لیے



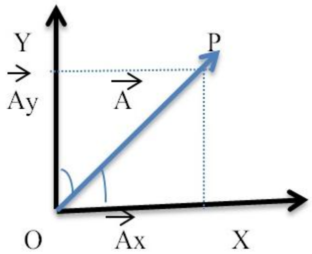
$$|\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1$$

یہ اکائی سمتیے ایک دوسرے پر نمودار ہیں۔ دوسرے سمتیوں سے ان کی الگ شناخت کے لیے ہم نے اس مواد میں ان کے اوپر ایک ٹوپی کی شکل ٹوپی(Cap) (Λ) لگادیا ہے کیونکہ اس مواد میں ہم صرف دو ابعادی حرکت کا مطالعہ کر رہے ہیں لہذا ہمیں صرف دو اکائی سمتیوں کی ضرورت ہوگی۔

شکل(1.8)

کسی مستوی (Plane) میں ایک سمتیہ $\vec{A}$ کو ظاہر کرنے کے لیے ہمارے پاس دو طریقے ہیں۔ اس کی عددی قدر A اور اس کے ذریعے X- محور کے ساتھ بنائے گئے زاویہ θ کے ذریعے اس کے اجزا A_x اور A_y کی قدریں درجہ ذیل مساوات سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta$$



شکل 1.9

اگر A_x اور A_y معلوم ہوں تو A اور θ کی قدر حسب ذیل سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

$$A_x{}^2 + A_y{}^2 = A^2Cos^2\theta + A^2Sin^2\theta$$

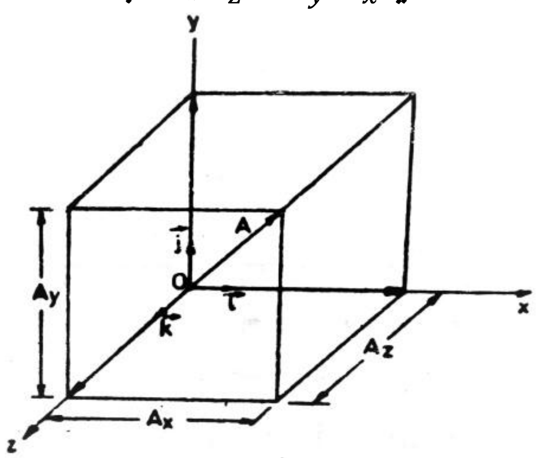
یا

$$A = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2}$$

اور

$$tan\,\theta = \frac{A_x}{A_y} \Rightarrow \theta = tan^{-1}\left(\frac{A_x}{A_y}\right)$$

اسی طرح ہم نے ایک x-y مستوی میں کسی سمتیے کو اس کے اجزا میں جز تجزیہ کیا ہے لیکن اسی طریقے کے ذریعے کسی سمتیہ $\vec{A}$ کا تین ابعاد میں y’x اور z محوروں کے مطابق، تین اجزا میں جز تجزیہ کیا جاسکتا ہے۔ اگر سمتیہ A y’x اور z محوروں کے درمیان زاویہ علی الترتیب α، β اور γ ہوں تو سمتیہ A کی عددی قدریں A_x A_y اور A_z ہیں۔ تب



شکل (1.10)

(Source:Dr.S.L.Gupta&SanjeevGupta.UnifiedPhysicsVol-I,MechanicsJaiPrakashNath&Co.Meerut)

$$\overrightarrow{A_x} = A\cos\alpha\,,$$
$$\overrightarrow{A_y} = A\cos\beta\,,$$
$$\overrightarrow{A_z} = A\cos\gamma$$

$$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$$
$$A = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}$$

1.8 کسی مستوی میں مستقل اسراع کے ساتھ حرکت

(Motion in a Plane with Constant Acceleration)

فرض کرو کہ کوئی شے ایک مستوی x-y میں حرکت کر رہی ہے اور اس کے اسراع یعنی a کی قدر مستقل ہے۔ کسی وقفہ وقت میں اوسط اسراع اس مستقل اسراع کے برابر ہو گا۔ فرض کرو کہ کسی وقت t=0 پر شے کی رفتار V_0 اور وقت t پر اس کی رفتار V ہے۔ تب تعریف کے مطابق:

$$a = \frac{V - V_0}{t - 0} = \frac{V - V_0}{t} \qquad (1.1)$$

یا

$$V - V_0 = at$$
$$V = V_0 + at \qquad (1.2)$$

اب ہم دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ مقام سمتیہ r کس طرح بدلتا ہے۔

فرض کریں کہ t=0 اور T=t وقت پر ذرے کے مقام سمتیہ $\overrightarrow{r_0}$ اور $\vec{r}$ ہیں اور اس وقت میں ذرّے کی رفتار $\overrightarrow{V_0}$ اور $\vec{V}$ ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ نقل اوسط رفتار اور وقفہ وقت کا ضرب ہوتا ہے۔

اس لیے $r - \vec{r}_0 = \left(\frac{V_0+V}{2}\right) t = \left(\frac{(V_0+at)+V_0}{2}\right) t$

$$r - \vec{r}_0 = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (1.3)$$
$$r = r_0 + V_0 t + {}^1\!/_2\, a t^2 \qquad (1.4)$$

اس مساوات کا مشتق (Derivations) $\frac{dr}{dt}$ یعنی ($V = V_0 + at$) دیتا ہے اور ساتھ ہی t=o وقت پر $\overrightarrow{r_0} = \vec{r}$ کی شرط کو بھی پورا کرتا ہے۔

$$r = r_0 + V_0 t + {}^1\!/_2\, a t^2$$

یہ مساوات کو اجزا کی شکل میں درج ذیل کے طور پر ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$x = x_0 + V_{0x}t + {}^1\!/_2\, a_x t^2$$

$$y = y_0 + V_{0y}t + {}^1\!/_2\, a_y t^2$$

اس مساوات کی ایک تشریح یہ ہے کہ x اور y سمتوں میں حرکت ایک دوسرے پر منحصر نہیں ہوتی ہیں یعنی کسی مستوی دو ابعاد میں حرکت کو دو الگ الگ ہم وقت ایک ابعدی مستقل اسراعی حرکتوں، جو باہمی عمودی سمتیوں میں ہوں نے کے طور پر سمجھ سکتے ہیں۔ یہ ایک اہم نتیجہ ہے جو دو ابعادی میں شے کی حرکت کے تجزیے میں کارگر ہوتا ہے۔ یہ نتیجہ تین ابعادی حرکت کے لیے بھی ہے۔

1.9 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

اگر $A = i + j + 2k$، $B = 2i + j + k$ اور $C = i - 2j - 2k$ ہو تو $A + B +C$ اور $(A - B + C)$ کی مقدار اور ان کی کو سائن (Cosine) سمت معلوم کیجیے۔

حل:

فرض کرو کہ $P = A + B + C$ اور $Q = A - B + C$

$$P = (A + B + C) = (i + j + 2k) + (2i + j + k) + (i - 2j - 2k)$$

$$P = 4i + k$$

$$P = \sqrt{p^2{}_x + p^2{}_y + p^2{}_z} = \sqrt{4^2 + 0 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

Cosine کی سمت

$$cos\,\alpha\,, cos\,\beta\,, cos\,\gamma$$

$$cos\,\alpha = \frac{p_x}{p} = \frac{4}{\sqrt{17}}\ \ ; cos\,\beta = \frac{p_y}{p} = 0\ \ ; cos\,\gamma = \frac{p_z}{p} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$Q = A - B + C = -2i - k$$

$$Q = \sqrt{{Q^2}_x + {Q^2}_y + {Q^2}_z} = \sqrt{0 + (-2^2) + (-1^2)} = \sqrt{5}$$

$$cos\,\alpha' = \frac{Q_x}{Q} = 0 \;\; ; cos\,\beta' = \frac{Q_y}{Q} = \frac{-2}{\sqrt{5}} \;\; ; cos\,\gamma' = \frac{Q_z}{Q} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

حل شدہ مثال2

اگر $A = 2i + 3j + 4k$ اور $B = i + 4j + 5k$ ہو تو A + B اور A − B کی مقداریں اور کوسائن (Cosine) سمت معلوم کریں۔

حل:

$$A + B = (2i + 3j + 4k) + (i + 4j + 5k)$$
$$A + B = 3i + 7j + 9k$$

$$A - B = (2i + 3j + 4k) - (i + 4j + 5k)$$
$$A - B = i - j - k$$

$A + B, A - B$ کی میزانیہ قدریں

$$|A + B| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 9^2} = \sqrt{9 + 49 + 81} = \sqrt{139}$$

$$|A - B| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$(A + B)$ کی سمت کوسائن

$$\frac{3}{\sqrt{139}}, \frac{7}{\sqrt{139}}, \frac{9}{\sqrt{139}}$$

اسی طرح

$(A - B)$ کی سمت کوسائن

$$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

حل شدہ مثال3

X− محور اور ویکٹر $4i + 3j + 5k$ کے درمیان زاویہ کو معلوم کیجیے۔

حل:

ہم جانتے ہیں کی دیے گئے سمتیے کی قدر

$$\sqrt{4^2+3^2+5^2}=\sqrt{16+9+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

اگر γ β ، α وہ زاویہ ہیں جو X, Y, Z محور سے بنتے ہیں

$$\cos\alpha=\frac{4}{5\sqrt{2}}=0.5656$$

$$\alpha=\cos^{-1}\frac{4}{5\sqrt{2}}=\cos^{-1}0.5656=55.56^0$$

حل شدہ مثال4

ایک یونٹ ویکٹر $0.4i+0.8j+ck$ محور – x سے بننے والی زاویہ کو معلوم کریں اور ساتھ ہی c کی قیمت بھی معلوم کریں۔

حل:

$$A=0.4i+0.8j+ck$$

A ایک یونٹ سمتیہ ہے اس لیے

$$|A|=1$$

$$\sqrt{(0.4)^2+(0.8)^2+(C)^2}=1$$

$$1-0.4^2-0.8^2=C^2$$
$$C=\sqrt{0.2}$$

اگر α ایک زاویہ جو X- محور سے بنتا ہے

$$\cos\alpha=\frac{A_x}{A}=\frac{0.4}{1}=0.4$$
$$\alpha=\cos^{-1}0.4=66.42^0$$

حل شدہ مثال5

اس شرط کو اخذ کریں جس سے ویکٹر کے مساواتیں $A = 5i + 7j + 3k$ اور $B = 2i - bj + ck$ مساوات متوازی ہو سکتے ہیں۔

حل: اگر دیے گئے سمتیے متوازی ہوں تو ان کے زاویائی برابر ہوں گے

$$\frac{A_x}{A} = \frac{B_x}{B} \;\; ; \frac{A_y}{A} = \frac{B_y}{B} \;\; ; \frac{A_z}{A} = \frac{B_z}{B}$$

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{7}{-b} = \frac{3}{c}$$

اس مساوات کو حل کرنے پر

$$-5b = 14 \Rightarrow b = \frac{-14}{5} \quad , \;\; 5c = 6 \Rightarrow c = \frac{6}{5}$$

حل شدہ مثال6

دیے گئے ویکٹر $A = 3i + 4j + 5k$ اور $B = 3i + 4j - 5k$ کے درمیان حاصل ہونے والا زاویہ دریافت کریں۔

حل:

ہم جانتے ہیں کہ

$$A.B = AB\cos\theta$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{A.B}{|A||B|}$$

$$A.B = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$A.B = 3 \times 3 + 4 \times 4 + (-5) \times 5$$
$$A.B = 0$$
$$|A| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$
$$|B| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$$

$$cos\,\theta = \frac{0}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = 0 \Longrightarrow \theta = 90^0$$

حل شدہ مثال7

ایک مقناطیسی میدان $B = (10i - 6k)10^2\, {}^{web}/_{m^2}$ میں ایک الیکٹران کی رفتار $V = 2.5i \times 10^6\, {}^{m}/_{sec}$ ہو تو اس الیکٹران پر عمل کرنے والی قوت کو معلوم کریں۔ جب کہ $F = qv \times B$ اور ایک الیکٹران $q = 1.6 \times 10^{-19} coulumb$

حل:

حل میں دیا گیا ہے کہ

$$F = qv \times B$$

$$1.6 \times 10^{-19}[2.5 \times 10^6 i + 0j + 0k] \times 10^2(10i + oj - 6k)$$
$$= 1.6 \times 10^{-19} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2.5 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 1000 & 0 & -600 \end{vmatrix}$$

$$= (1.6 \times 10^{-19})(1500 \times 10^6 j)$$
$$= 2.4 \times 10^{-10} jN$$

حل شدہ مثال8

ثابت کریں کہ $A.(B \times C) = B.(C \times A) = C.(A \times B)$

حل:

فرض کرو کہ مزانیہ ضرب $A.(B \times C)$ کو اس کے اجزا میں اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$A.(B\times C)=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}B_x & B_y & B_z\\ A_x & A_y & A_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

$$\therefore A.(B\times C)=B.(C\times A)$$

$$\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}C_x & C_y & C_z\\ B_x & B_y & B_z\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C_x & C_y & C_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$\therefore A.(B\times C)=C.(A\times B)$$

$$\therefore L.H.S=R.H.S$$

حل شدہ مثال9

دیے گئے ویکٹیریں $A=5i-7j+3k$، $B=-4i+7j-8k$ اور $C=2i-3j$ ہے۔ مندرجہ ذیل حاصل ضرب کی قدریں معلوم کریں۔

$$(A\times B).C=(B\times C).A=(C\times A).B$$

حل:

(A×B).C کی قیمت کو حاصل کریں گے۔

$$A\times B$$

$$(A\times B)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 5 & -7 & 3\\ -4 & 7 & -8\end{vmatrix}$$

$$A\times B=i(56-21)+j(-12+40)+k(35-28)$$

$$A \times B = 35i + 28j + 7k$$

$$(B \times A) = -(A \times B) = -35i - 28j - 7k$$

$$(A \times B).C = (35i + 28j + 7k).(2i - 3j)$$

$$(A \times B).C = 35 \times 2 + 28 \times -3 + 7 \times 0$$

$$(A \times B).C = 70 - 84 + 0 = -14$$

اسی طرح

$$(B \times C).A = -14$$
$$(C \times A).B = -14$$
$$\therefore (A \times B).C = (B \times C).A = (C \times A).B = -14$$

حل شدہ مثال10

اگر $0.5i + 0.8j + ck$ ایک یونٹ ویکٹر ہو تو C کی قیمت معلوم کریں۔

حل:

حل میں دی گئی سمتیہ A

$$A = 0.5i + 0.8j + ck$$
$$\therefore |A| = 1$$
$$|A| = \sqrt{0.5^2 + 0.8^2 + C^2} = 1$$

$$0.5^2 + 0.8^2 + C^2 = 1$$
$$C^2 = 1 - 0.25 - 0.64 = 0.11$$
$$C = 0.3$$

1.10 اکتسابی نتائج (Lerning Outcomes)

- میزانیہ مقدار: وہ مقداریں ہیں جن میں صرف عددی قدریں (Magnitudes) ہوتی ہیں۔ دوری، چال، کمیت اور درجہ حرارت میزانیہ مقداروں کی چند مثالیں ہیں۔

- سمتیہ مقداریں: وہ مقداریں جن میں قدر اور سمت دونوں ہوتی ہیں۔ جیسے نقل، رفتار 'اسراع۔ یہ مقداریں سمتیہ الجبرا کے کچھ مخصوص اصولوں کی تعمیل کرتی ہیں۔
- اگر کسی سمتیہ $\vec{A}$ کو کسی حقیقی عدد λ سے ضرب کریں تو ہمیں ایک دوسرے سمتیہ $\vec{B}$ حاصل ہوتا ہے جس کی عددی قدر $\vec{A}$ کی عددی قدر کی λ گنا ہوتی ہے۔ یہ اس پر منحصر ہوتی ہے کہ λ مثبت ہے یا منفی۔
- دو سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کو جوڑنے کے لیے ترسیمی طریقہ جس کے لیے یا تو سر سے دم یا پھر متوازی الاضلاع کے طریقے کا استعمال کرتے ہیں۔
- Null یا صفری سمتیہ ایسا سمتیہ ہوتا ہے جس کی عددی قدر صفر ہوتی ہے۔
- سمتیہ $\vec{B}$ کو $\vec{A}$ سے نفی کرنے کے عمل کو ہم $\vec{A}$ اور $(-\vec{B})$ کو جوڑنے کے طور پر لیتے ہیں۔ $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$
- کسی سمتیے $\vec{A}$ کو کسی مستوی میں واقع دو سمتیوں a اور b کی سمت میں جز تجزیہ (Resolve) کرسکتے ہیں۔ $\vec{A}=\lambda a+\mu b$ یہاں λ اور μ حقیقی عدد ہیں۔
- اکائی سمتیہ وہ سمتیہ ہے جس کی عددی قدر ایک ہوتی ہے اور وہ $\vec{A}$ کی سمت میں واقع ہوتا ہے۔ اکائی سمتیہ $\hat{n}=\frac{\vec{A}}{|A|}$

1.11 کلیدی الفاظ (Key Words)

میزانیہ	:	وہ طبعی مقدار جو صرف عددی قدر رکھتی ہو،
سمت	:	وہ طبعی مقدار جو عددی قدر کے ساتھ سمت بھی رکھتی ہو،
اکائی سمتیہ	:	وہ سمتیہ جس کی قدر اکائی ہو،
صفر سمتیہ	:	وہ سمتیہ جس کی قدر صفر ہو
مساوی ویکٹرس	:	اگر دو ویکٹاریں کی قدریں اور سمتیہ مساوی ہوں
یکساں ویکٹرس	:	اگر دو ویکٹرس کی سمتیے مساوی ہوں اور قدریں علاحدہ ہوں
غیر یکساں ویکٹرس	:	اگر دو ویکٹرس سمتیے مخالف ہو اور قدریں بھی علاحدہ ہوں
غیر متوازی ویکٹرس	:	اگر دو ویکٹرس کی سمت مخالف ہو تو وہ ان دونوں کے درمیان زاویہ 180^0 ڈگری کا ہوتا ہے
بنیادی اکائی ویکٹر	:	وہ تین ویکٹرس جو ایک دوسرے سے پرپینڈی کلر ہو اور وہ تینوں محوروں میں ہو
مقامی ویکٹر	:	وہ ویکٹر جو ایک نقطے کے مقام کو ظاہر کرتا ہو

1.12 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.12.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اکائی سمت کی اکائیاں کیا ہوں گی ؟
2. کیا ایک صفر قدر والے سمت کے اجزا غیر صفر ہوں گے ؟
3. $A = i - j$ ہو تو x محور اور سمتیے کا درمیانی زاویہ کیا ہو گا؟
4. کن حالات میں سمتیے کا جز سمتیے کی قیمت کے مساوی ہوتا ہے ؟
5. اگر سمتیے کا ایک جزو صفر نہیں ہے تو کیا اس کے سمتیے کی قیمت صفر ہو سکتی ہے ؟
6. اگر $|B| = |A|$، تب A اور B کے اجزا کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں ؟
7. کیا یہ ممکن ہے کہ صفر سمتیے کا جز غیر صفر ہو گا؟
8. اسراع سمتیہ یا میزانیہ ہے ؟
9. بنیادی اکائی ویکٹر سے کیا مراد ہے ؟
10. جو ایک نقطے کے مقام کو ظاہر کرتا ہو............... ویکٹر ہوتا ہے۔

1.12.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ذیل کے طبیعی مقداروں میں بتائیے کہ کون سی سمتیہ ہے اور کون سی میزانیہ۔ حجم، کمیت، چال، اسراع، کثافت، مول کی تعداد، رفتار، زاویائی تعدد، نقل مقام، زاویائی رفتار۔
2. ذیل میں سے کسی دو میزانیہ مقداروں کی نشاندہی کیجیے۔ قوت، زاویائی معیار حرکت، کام، برقی رو، خطی معیار حرکت، برقی میدان، اوسط رفتار، مقناطیسی معیارے اثر، اضافی رفتار۔
3. درج ذیل میں سے ایک سمتیہ مقدار شامل ہے۔ اس میں سے سمتیہ مقدار کی نشاندہی کیجیے ۔ درجہ حرارت، دباؤ، دھکا، وقت، جفت، توانائی، تجاذبی قوت، رگڑ کی شرح۔
4. اگر $P = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 14\hat{k}$ اور $Q = 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 10\hat{k}$ تب P+Q کی قدر معلوم کرو۔

1.12.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. میزانیہ اور سمتیہ کی تعریف مثال کے ذریعے کیجیے۔ اکائی سمتی، صفر سمتی اور مقامی سمتی کے بارے میں اپنی معلومات کا اظہار کیجیے۔
2. (a) میزانیہ اور سمتیہ کی تعریف مثال کے ذریعے کیجیے۔

(b)ذیل کے طبیعی مقداروں میں بتائیے کہ کون سی سمتیہ ہے اور کون سی میزانیہ۔ حجم، کمیت، چال، اسراع، کثافت، مول کی تعداد، رفتار، زاویائی تعدد، نقل مقام، زاویائی رفتار۔

1.12.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. اگر $F = i + 2j - k$ اور $V = 4i - j + 7k$ ہو تو F. V معلوم کرو۔
2. $A = i + 2j - k$ اور $B = -i + j - 2k$ کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔
3. اگر $2i + 2j + k$ اور $3i - 6j + nk$ ایک دوسرے پر عمودوار ہو تب n کی قدر معلوم کرو۔
4. اگر $F = 3i + 4j + 5k$ اور $S = 6i + 2j + 5k$ ہو تب اس کے ذریعے انجام شدہ کام معلوم کرو۔
5. اگر $A = 3i - 4j$ اور $B = -i - 4j$ ہو تب (a) $A + B$ (b) $A - B$ (c) $|A + B|$ (d) $|AB|$ (e) $|A + B|$ $|A - B|$ معلوم کرو۔

1.13 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

---

1. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta,Dhanpat Rai Publications
2. Physics Part- I by Resnik.R &Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi
3. Unified Physics Vol-I,Mechanics by,Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta Jai Prakash Nath &Co.Meerut
4. Vector Algebr by Dr. Rishi Kumar Jha& Dr. Anshuman Signh
5. Vector Algebra and Analysis with Application by Prasun Kumar nayak
6. Vector Algebra by Shanti Narayan& P.K. Mittal, s chand
7. Vector Analysis tensor analysis and linear vector space by S.P. Kuil

اکائی 2۔ حرکت کے کلیات

(Laws of Motion)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید

2.1 مقاصد

2.2 حوالے کے فریم

2.2.1 جمودی حوالے کے فریم

2.2.2 غیر جمودی حوالے کے فریم

2.3 نیوٹن کے حرکت کے کلیات

2.3.1 نیوٹن کا حرکت کا پہلا کلیہ

2.3.2 نیوٹن کا حرکت کا دوسرا کلیہ

2.3.3 نیوٹن کا حرکت کا تیسرا کلیہ

2.4 جھٹکا

2.5 حل شدہ مثالیں

2.6 اکتسابی نتائج

2.7 کلیدی الفاظ

2.8 نمونہ امتحانی سوالات

2.8.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

2.8.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

2.8.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

2.8.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

2.9 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

2.0 تمہید (Intoduction)

اس اکائی میں ہم طبیعیات کے اس بنیادی سوال کی طرف مرکوز کریں گے کہ اجسام میں حرکت کس وجہ سے پیدا ہوتی ہے؟ آیئے سب سے پہلے ہم اپنے عام تجربات کی طرف اس سوال کے جواب کا اندازہ لگائیں۔ کسی کھیل کے میدان میں سکون کی حالت میں موجود فوٹ بال کو حرکت فراہم کرنے کے لیے کسی نہ کسی کو اس پر ٹھوکر ضرور مارنی ہوتی ہے۔ ہماری ہتھیلی پر رکھے کسی پتھر کو اوپر اچھالنے کے لیے ہمیں اسے اوپر کی طرف اچھالنا پڑتا ہے۔ بلکہ ہوا پیڑ کی شاخوں کو جھولا دیتی ہے۔ طاقتور ہوا کا جھونکا تو ہمارے اجسام کو لڑھکا سکتا ہے۔ ان عام تجربات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی جسم کو حالت سکون سے حرکت میں لانے کے لیے کسی بیرونی ذریعہ ' جاندار یا غیر جاندار کے ذریعے قوت لگانے کی ضرورت ہوتی ہے۔ اسی طرح حرکت کو روکنے یا کم کرنے کے لیے بھی بیرونی قوت کی ضرورت ہوتی ہے۔ مختصراً کسی ساکن، جسم کو حرکت دینے اور متحرک جسم کو روکنے کے لیے قوت کی ضرورت ہوتی ہے اور اس قوت کو فراہم کرنے کے لیے کسی بیرونی کے ذریعہ میں بھی ہو سکتا ہے۔ یہ بیرونی قوت کے ذریعے اس جسم کے تماس (Contact) میں بھی ہو سکتا ہے اور نہیں بھی۔

2.1 مقاصد (Objectives)

اجسام کی حرکت کے اسباب کا علم حرکت کہلاتا ہے آسانی کے لیے اس علم کا اطلاق ہم چھوٹے ذرات پر کرتے ہیں۔ ان ذرات کی رفتار روشنی کی رفتار کے مقابلے میں بہت کم ہوتی ہے۔ ان مفروضات میں علم حرکت 'قدیم علم حرکت' (Classical Mechanics) کہلاتا ہے اور اس میں ہی نیوٹن کے کلیات قابل استعمال ہوتے ہیں۔

اس اکائی میں ہم:

i. نیوٹن کے حرکت کے کلیات کے بارے میں پڑھیں گے۔

ii. جھٹکے کا تصور قوت کی جانب سے کیا گیا کام طاقت کے بارے میں پڑھیں گے۔

2.2 حوالے کے فریم (Frame of Reference)

ایک متحرک بس یا گاڑی میں اچھالا گیا پتھر (Stone) بس یا گاڑی میں بیٹھے ہوئے شخص کو ایک خط مستقیم (Straight Line) میں حرکت کرتا ہوا دکھائی دیتا ہے جب کہ زمین پر ٹھہرے ہوئے ایک اور شخص کو پتھر کی حرکت کا راستہ ناقص یا مڑا ہوا (Curved) دکھائی دیتا ہے۔ اس مشاہدے سے یہ بات ثابت ہوتی ہے کہ کسی جسم کی حرکت کا بیان اس وقت تک بے معنی ہے جب تک کہ اس کے مختص نظام (Coordinate system) کی وضاحت نہ کی جائے جس میں پیمائش کی گئی ہے۔ وہ مختص نظام جس کے لحاظ سے کسی جسم کی حرکت کا اظہار کیا جاتا ہے وہ 'حوالے کا فریم' کہلاتا ہے۔

2.2.1 جمودی حوالے کا فریم(Inertial Frame of Reference)

حوالے کے ایسے فریم جن میں متحرک اجسام نیوٹن کے کلیات اور میکانیات کے دیگر کلیات کی پابندی کرتے ہیں، جمودی حوالے کے فریم کہلاتے ہیں۔ ان فریموں میں ایسے اجسام جو بیرونی قوتوں کے زیر اثر نہ ہوں یا تو حالت سکون میں ہوں گے یا پھر ہموار رفتار سے متحرک ہوں گے۔ یعنی جمودی حوالے کے فریم میں بیرونی قوت کی غیر موجودگی میں ایک جسم حالت سکون میں ہو گا یا ہموار رفتار سے خط مستقیم میں متحرک ہو گا۔

2.2.2 غیر جمودی حوالے کا فریم(Non-Inertial Frame of Reference)

حوالے کا ایسا فریم جس میں ایک جسم بلا کسی بیرونی قوت کی عمل آور اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے، غیر جمودی حوالے کا فریم کہلاتا ہے۔ ایسے کسی حوالے کے فریم میں نیوٹن کے کلیات حرکت کی پابندی نہیں ہوتی۔

آئزک نیوٹن(Issac Newton) 1624 میں انگلینڈ کے وولس تھارپے نام کے شہر میں پیدا ہوئے، اتفاق سے اسی سال گیلیلیو کا انتقال ہوا۔ ان کی ریاضی اور طبیعیات کی بنیادی دریافتیں ہیں۔ منفی اور کسری قوت نماؤں کی بائی نامیل تھیورم، احصا(Calculus) کی ابتداء تجاذید کا مقلوب مربعی کلیہ ،نور کے اسپیکٹرم وغیرہ۔

1684 میں اپنے دوست ایڈمنڈ ہیلی کی حوصلہ افزائی پر نیوٹن نے اپنے سائنسی کاموں کو رکھنا شروع کیا اور "دی پرنسپیا ریاضی میتھ میٹک"(The Principia Mathematic)نام کی عظیم کتاب کی تخلیق کی جو کسی بھی دور میں تخلیق کی گئی عظیم کتابوں میں سے ایک مانی جاتی ہے۔ اس کتاب میں انھوں نے حرکت کے تینوں کلیات اور ثقلی کے آفاقی کلیہ کو واضح طور پر پیش کیا جو کیپلر کے سیاری مداروں کے تین کلیات کی باقاعدہ تشریح کرتے ہیں۔

1704 میں نیوٹن نے ایک دیگر منفرد کتاب نوریات (Optics) پیش کی جس میں ان کے روشنی اور رنگ سے متعلق کام کا خلاصہ پیش کیا گیا تھا۔ کوپرنکس نے جس سائنسی انقلاب کو حرکت دی اور جسے کیپلر اور گیلیلیو نے تیزی سے آگے بڑھایا اسی کو نیوٹن نے شان دار تکمیل کی۔ نیوٹنی میکانیات نے ریاضی اور ملکیاتی مظاہر کو یکھا کیا۔ ایک نئی ریاضی مساوات زمین پر سیب کے گرنے اور زمین کے گرد چاند کے گردشی کرنے کو معین کر سکتی ہیں۔

خلاصے کے طور پر اگر بیرونی قوت صفر ہے تو حالت سکون میں واقع جسم حالت سکون میں ہی رہتا ہے اور حرکت پذیر جسم متواتر ہموار رفتار سے متحرک رہتا ہے۔ اشیا کی اس خصوصیت کو جمود (Inertia) کہتے ہیں۔ جمود سے مراد ہے، تبدیلی کے لیے مزاحمت، کوئی جسم اپنی حالت سکون یا ہموار حرکت کی حالت میں تب تک کوئی تبدیل نہیں کرتا جب تک کوئی بیرونی قوت ایسا کرنے کے لیے اسے مجبور نہیں کرتی۔

نیوٹن نے گیلیلیو کے تصورات کی بنیادی حرکت کے تین کلیات پر مشتمل جو ان کے نام سے جانے جاتے ہیں، ایک میکانیات کی بنیاد رکھی۔ گیلیلیو کے جمود کا کلیہ اس کا ابتدائی نقطہ تھا جس کو نیوٹن نے حرکت کے پہلے کلیے کے طور پر پیش کیا۔

2.3 نیوٹن کے حرکت کے کلیات (Newton's Law of Motion)

2.3.1 نیوٹن کا حرکت کا پہلا کلیہ (Newton's First Law of Motion)

"ہر ایک جسم تب تک اپنی حالت سکون میں یا خط مستقیم میں ہموار حرکت کی حالت میں رہتا ہے جب تک کوئی بیرونی قوت اسے اس کے خلاف کرنے پر مجبور نہیں کرتی۔"

اب حالت سکون یا ہموار خطی حرکت دونوں ہی میں صفر اسراع اثر انداز ہوتا ہے۔ لہٰذا حرکت کے پہلے کلیے کو آسان الفاظ میں اس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے:

"اگر کسی جسم پر لگنے والی کل بیرونی قوت صفر ہو تو اس کا اسراع بھی صفر ہوتا ہے۔ غیر صفر اسراع تبھی ہو سکتا ہے جب جسم پر کوئی بیرونی قوت عمل کرتی ہو۔"

جب ہم ایک کار کی حرکت پر غور کرتے ہیں جس میں وہ کار سکون کی حالت سے حرکت شروع کر کے اپنی چال میں اضافہ کرتی ہے اور پھر ہموار سیدھی سڑک پر پہنچ کر یکساں رفتار سے حرکت کرتی ہے۔ جب یہ حالت سکون میں ہوتی ہے تب اس پر کوئی مجموعی قوت نہیں ہوتی۔ چال میں اضافے کے وقت اس میں اسراع ہوتا ہے۔ کل بیرونی قوت کے سبب ایسا ہونا چاہیے۔ کار کے اسراع کی وضاحت کسی بھی طریقے سے اندرونی قوت کے ذریعے نہیں کی جا سکتی۔ لیکن یہ حقیقت ہے اگر یہاں سڑک پر کسی بیرونی قوت کے بارے میں غور کیا جاتا ہے تو یہ رگڑ کی قوت ہے۔ جب اسی پر غور کیا جاتا ہے تو کار کی حرکت میں اسراع کا سبب رگڑ کی قوت ہے۔ جب کار ہموار رفتار سے حرکت کرتی ہے تب بھی اس پر کوئی مجموعی بیرونی قوت نہیں ہوتی۔

حرکت کے پہلے کلیے میں شامل جمود کی خاصیت بہت ہی واضح نظر آتی ہے۔ فرض کرو کہ ہم کسی رکی ہوئی بس میں غیر محتاط طور پر کھڑے ہیں اور اچانک بس کا ڈرائیور بس کو چلا دیتا ہے تو ہم جھٹکے کے ساتھ پیچھے کی طرف گر پڑتے ہیں۔ اسی طرح کا معاملہ تیزی کے ساتھ چلتی بس کے اچانک رکنے پر بھی ہوتا ہے۔ ہمارے پیر رگڑ کی وجہ سے رک جاتے ہیں کیوں کہ قوت رگڑ پیروں اور بس کے فرش کے درمیان اضافی حرکت نہیں ہونے دیتی لیکن جسم کا باقی حصہ جمود (Inertia) کی وجہ سے آگے کی طرف حرکت کرتا رہتا ہے۔ نتیجتاً ہم آگے کی طرف پھینک (جھونک) دیے جاتے ہیں۔ بحالی عضلاتی قوتیں پھر فعال ہو جاتی ہیں اور جسم کو حالت سکون میں لے آتی ہیں۔

2.3.2 نیوٹن کے حرکت کا دوسرا کلیہ (Newton's Second Law of Motion)

نیوٹن کا پہلا کلیہ اس سادہ صورت سے تعلق رکھتا ہے جس میں کسی جسم پر جملہ بیرونی قوت صفر ہوتی ہے۔ حرکت کا دوسرا کلیہ اسی صورت سے تعلق رکھتا ہے جس میں جسم پر ایک مجموعی قوت لگ رہی ہو۔ یہ کلیہ جملہ بیرونی قوت اور جسم کے اسراع میں رشتہ بتاتا ہے۔

کسی جسم کے معیار حرکت (Momentum) کو اس کی کمیت m اور رفتار V کے حاصل ضرب کے ذریعے معلوم کیا جاتا ہے اور اسے p سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسے

$$P = mv$$

جہاں معیار حرکت ایک سمتیہ ہے۔ عام تجربات سے اجسام کی حرکت پر قوتوں کے اثر پر غور کرتے وقت ہمیں معیار حرکت کی اہمیت کا پتہ چلتا ہے۔

اگر دو پتھر' ایک ہلکا اور دوسرا بھاری ایک ہی عمارت کی چوٹی سے گرائے جاتے ہیں تو زمین پر کھڑے کسی شخص کے لیے بھاری پتھر کے مقابلے ہلکے پتھر کو لپکنا آسان ہوتا ہے۔ اسی طرح کسی جسم کی کمیت ایک اہم پیرامیٹر ہے جو حرکت پر قوت کے اثر کو متعین کرتا ہے۔

اس مشاہدے سے اس بات کا پتہ چلتا ہے کہ کمیت اور رفتار کا حاصل ضرب یعنی معیار حرکت ہی حرکت پر قوت کے اثر کے لیے بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔

فرض کرو کہ' مختلف کمیتوں کے دو اجسام پر جو ابتدا میں سکون کی حالت میں ہیں' ایک قائم قوت(Fixed Force)ایک قائم وقفہ وقت کے لیے لگائی جاتی ہے تو ہلکا جسم بھاری جسم کے مقابلے نسبتاً زیادہ رفتار اختیار کرلیتا ہے۔ لیکن وقفہ وقت کے آخر میں تجربہ یہ ظاہر کرتا ہے کہ ہر ایک جسم ہموار معیار حرکت حاصل کرتا ہے۔ اس طرح "ہموار وقت کے لیے لگائی گئی ہموار قوت مختلف اجسام میں ہموار معیار حرکت کی تبدیلی کرتی ہے۔ یہ حرکت کے دوسرے کلیہ کے لیے اہم مرحلہ ہے۔ یہ کیفیتی تجربہ ہمیں نیوٹن کے حرکت کے دوسرے کلیہ کی طرف اشارہ کرتا ہے جسے نیوٹن نے کچھ اس طرح پیش کیا تھا:

"کسی جسم میں معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح لگائی گئی قوت کے راست متناسب ہوتی ہے اور اس سمت میں ہوتی ہے جس سمت میں قوت کام کرتی ہے۔"

اگر m کمیت کے کسی جسم پر کوئی قوت F وقفہ وقت Δt تک لگانے پر اس جسم کی رفتار میں v سے Δv کی تبدیلی ہوتی ہے یعنی جسم کے ابتدائی معیار حرکت $P = mv$ میں $\Delta p = m\Delta v$ کی تبدیلی ہو جاتی ہے۔ تب حرکت کے دوسرے کلیے کے مطابق $F \propto \frac{\Delta p}{\Delta t}$

یعنی $F = k\,\frac{\Delta p}{\Delta t}$ یہاں k ایک مستقل ہے

اگر $\Delta t \to 0$' تب $\frac{\Delta p}{\Delta t}$' t کی نظر سے p کا تفرقی ضریب(Differential Co-efficient) بن جاتا ہے۔ جسے $\frac{dp}{dt}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس طرح سے $F = K\,\frac{dp}{dt}$

کسی قائم کمیت m کے لیے

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}\,(\because p = mv) \qquad (2.1)$$

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma\left(\because a = \frac{dv}{dt}\right) \qquad (2.2)$$

$$\therefore \frac{dp}{dt} = ma \qquad (2.3)$$

یعنی دوسرے کلیے کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$F = k.ma \qquad (2.4)$$

اگر ہم k=1 مانتے ہیں تب دوسرا کلیہ اس طرح ہو جاتا ہے۔

$$F = \frac{dp}{dt} = ma \qquad (2.5)$$

System of International یا S1 اکائیوں میں' ایک اکائی قوت وہ ہوتی ہے جو 1kg کے جسم میں $1\,{}^{m}/_{s^2}$ کا اسراع پیدا کر دیتی ہے۔ اس اکائی قوت کو نیوٹن کہتے ہیں۔ اس کی علامت N ہے۔

$$1N = 1kg\,{}^{m}/_{s^2}$$

2.3.3 نیوٹن کے حرکت کا تیسرا کلیہ (Newton's Third Law of Motion)

ہم جانتے ہیں کہ حرکت کا دوسرا کلیہ کسی جسم پر لگی بیرونی قوت اور اس میں پیدا اسراع میں رشتہ بتاتا ہے۔ کون سا ذریعہ بیرونی قوت فراہم کرتا ہے۔ اس سوال کا سادہ جواب یہ ہے کہ کسی جسم پر لگنے والی قوت ہمیشہ ہی کسی دوسرے جسم کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے۔

فرض کرو جسم B' جسم A پر کسی بیرونی قوت کو پیدا کرتی ہے۔ تب یہ سوال بھی اٹھتا ہے کہ کیا جسم A بھی جسم B پر کسی بیرونی قوت کو پیدا کرتی ہے۔ کچھ مثالوں میں جواب واضح طور پر معلوم ہوتے ہیں۔ اگر آپ کسی لچھے دار کمانی کو اپنی ہاتھوں سے دبائیں تو وہ کمانی آپ کے ہاتھوں پر قوت لگاتی ہے۔ آپ اسی قوت کو محسوس کر سکتے ہیں۔

جب کبھی تجاذبی کشش کے سبب زمین کسی پتھر کو نچلی سمت میں کھینچتی ہے، کیا پتھر زمین پر کوئی قوت لگاتا ہے۔ اس کا جواب واضح نہیں ہے کیوں کہ پتھر کے ذریعے زمین پر لگی قوت کے اثر کو نہیں دیکھ سکتے۔ لیکن نیوٹن کے مطابق اس کا جواب ہے ہاں پتھر بھی زمین پر ایک مساوی مخالف قوت لگاتا ہے۔ ہمیں اس قوت کا احساس نہیں ہو پاتا، اس کی وجہ نہایت بھاری ہونے کے سبب زمین کی حرکت پر پتھر کے ذریعے لگنے والی کم قوت کا اثر نا قابل محاظ ہوتا ہے۔

اسی طرح نیوٹن میکانیات کے مطابق' قدرتی ماحول میں قوت کبھی بھی اکیلی نہیں پائی جاتی۔ دو اجسام کے درمیان واقع باہمی بین العمل (Interaction) کو ہی قوت کہا جاتا ہے۔ قوت ہمیشہ جوڑوں میں واقع ہوتی ہے۔ ساتھ ہی دو اجسام کے درمیان باہمی قوتیں ہمیشہ مساوی اور مخالف سمتوں میں ہوتی ہیں۔ نیوٹن نے اس تصور کو حرکت کے تیسرے کلیے کے طور پر پیش کیا۔ "ہر ایک عمل کا ہمیشہ ایک

مساوی اور مخالف رد عمل ہوتا ہے"۔

آیئے اس کلیہ کے اہم نکات پر غور کریں:

i. تیسرے کلیہ کو آسان اور واضح الفاظ میں اس طرح بھی کہا جاسکتا ہے۔

"قوت ہمیشہ جوڑوں (Pairs) میں واقع ہوتی ہے۔ جسم A پر B کے ذریعے لگائی گئی قوت جسم B پر A کے ذریعے لگائی گئی قوت کے مساوی اور مخالف ہوتی ہے۔

ii. تیسرے کلیے کے مطابق 'عمل۔ رد عمل سے پہلے آتا ہے۔ یعنی عمل سبب ہے اور اسی سے ہونے والا رد عمل اس کا اثر۔ A پر B کے ذریعے لگائی گئی قوت اور A کے ذریعے B پر لگائی گئی قوت ایک ہی ساعت میں عمل پذیر ہوتی ہے۔ اس بنیاد پر ان میں سے کسی بھی ایک کو عمل اور دوسرے کو رد عمل کہا جاسکتا ہے۔

iii. عمل اور رد عمل قوتیں دو مختلف اجسام پر عمل کرتی ہیں اس لیے دو اجسام A اور B کے جوڑے پر غور کیجیے۔ تیسرے کلیہ کے مطابق

$$F_{AB} = -F_{BA}$$

B پر A کے ذریعے لگائی گئی قوت A پر B کے ذریعے لگائی گئی قوت

اس طرح اگر ہم کسی ایک جسم A یا B کی حرکت پر غور کرتے ہوں تو دونوں قوتوں میں سے جسم کے لیے صرف ایک ہی قوت بامعنی ہوتی ہے۔

نیوٹن کے کلیات کے اطلاقات (Applications of Newton's Law)

کسی ذرے یا جسم کے لیے نیوٹن کے کلیات کا اطلاق کرنے کے لیے ان باتوں کا لحاظ کرنا چاہیے:

1) اس نظام کی صراحت کریں جس پر نیوٹن کے کلیات کا اطلاق کرنا ہو۔ یہ نظام خواہ ایک ذرے یا جسم پر دو یا زائد اجسام پر پھر ڈور سے باندھے ہوئے اجسام پر مشتمل ہو سکتا ہے۔ نظام کی سرحد کے اندر کتنے اجسام شامل کر لیے گئے ہیں ان کی وضاحت ہونا ضروری ہے۔ ان اجسام کا اسراع بھی یکساں ہونا چاہیے۔

2) نظام کے باہر موجود اجسام کی جانب سے عائد ہونے والی قوتوں کی نشاندہی کرلی جائے بیرونی جانب سے عائد ہونے والی قوتوں کی فہرست بنالی جائے۔ اندرونی قوت کا کوئی اثر نہیں ہوتا ہے۔

3) ایک آزاد جسم کا خاکہ بنالیا جائے جو نقطی شکل کا ہو اور اس سے باہر نکلتی ہوئی تیر کے نشانات اتار لیے جائیں جو اس نظام پر عائد ہونے والے قوتوں کے سمیتوں کو ظاہر کرتی ہوں۔

4) جیومیٹری کے محور کا انتخاب کر کے مساوات حرکت لکھے جائیں۔

2.4 جھٹکا (Impulse)

جب کوئی گیند کسی دیوار سے ٹکرا کر واپس آتی ہے تب دیوار کے ذریعے گیند پر لگنے والی قوت بہت کم وقت کے لیے عمل پذیر رہتی ہے تو بھی یہ قوت گیند کے معیار حرکت کی سمت بدلنے کے لیے کافی ہوتی ہے۔ اکثر ان حالات میں قوت اور قوت کا حاصل ضرب جو جسم کے معیار حرکت کی تبدیلی ہے، جھٹکا یا دھکا کہلاتا ہے۔

قوت x وقت = جھٹکا = معیار حرکت میں تبدیلی

معیار حرکت میں ایک تبدیلی پیدا کرنے کے لیے کم وقت کے لیے عمل پذیر رہنے والی بڑی قوت کو جھٹکا پیدا کرنے والی قوت کہتے ہیں۔ دیگر قوتوں کی طرح جھٹکا پیدا کرنے والی قوت بھی قوت ہی ہے مگر یہ بڑی قوت ہوتی ہے اور کم وقت کے لیے عمل کرتی ہے۔

جھٹکا (Impulse) = قوت x وقت

$$\vec{I} = \vec{F}.t$$

جھٹکے کی SI اکائی Ns یا $Kgms^{-1}$ ہے، اور اس کا ابعادی ضابطہ MLT^{-1} ہے۔ یہ ایک سمتیہ ہے اور اس کی سمت قوت ہی کی ہوتی ہے۔ دو ذروں کے درمیان تصادم کی صورت میں دھکے کی قوت میں وقت کے لحاظ سے ہونے والی تبدیلی کو شکل (2.1) میں دکھایا گیا ہے۔

جھٹکے کے دوران دھکے کی قیمت کی پیمائش سختی کے تحت کے رقبے سے کی جاتی ہے۔

نیوٹن کے دوسرے کلیے کی رو سے

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{m(\vec{V}_f - \vec{V}_i)}{t} \qquad (2.6)$$

جہاں 'm' کمیت والے ذرے کی ٹکر سے پہلے اور ٹکر کے بعد کی رفتاریں علی الترتیب $\vec{V}_i$ اور $\vec{V}_f$ ہیں۔ دھکے I کے لیے لکھا جاسکتا ہے۔

$$\vec{I} = \vec{F}t = \frac{m(\vec{V}_f - \vec{V}_i)}{t}.t \qquad (2.7)$$

$$\vec{I} = m(\vec{V}_f - \vec{V}_i) \qquad (2.8)$$

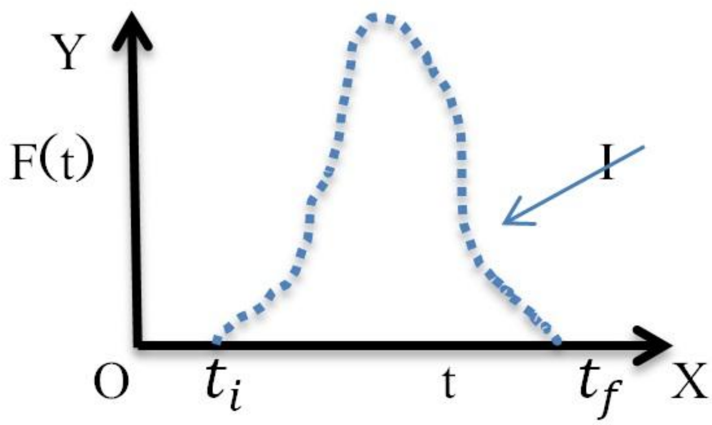
جھٹکا = معیار حرکت میں تبدیلی

مساوات (2.8) سے جب کسی جسم پر دھکے کی قوت عمل کرتی ہے تو جسم کے معیار حرکت کی تبدیلی اور دھکا یا جھٹکا مساوی ہوتے ہیں۔

جھٹکے کے دوران جھٹکے کی قوت کا یکساں مقدار میں ہونا ضروری نہیں تب۔

$$P_f - P_i = \int_{P_i}^{P_f} dp = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dp}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} F dt \qquad (2.9)$$

یعنیF-t ترسیم سے گھرا ہوا رقبہ جھٹکے کی مقدار یا معیار حرکت میں تبدیلی کی مقدار کو ظاہر کرتا ہے۔



شکل(2.1)

جھٹکے کے اطلاقات(Applications of Impuls)

1. گاڑیاں جب غیر ہموار سڑک سے گزرتی ہیں تو انہیں ہونے والے جھٹکوں کو جذب کرنے کے لیے Shock absorbers استعمال کیے جاتے ہیں۔
2. کرکٹ کا کھلاڑی گیند کو پکڑتے وقت ہاتھوں کو اپنی طرف کھینچ لیتا ہے۔ تاکہ جھٹکے کا وقت بڑھ جائے اور جھٹکے کی قوت میں کم ہو جائے۔
3. سخت فرش پر کودنے والے کو جھٹکے کی قوت زیادہ محسوس ہوتی ہے۔ لیکن ریت میں کودنے والے کو جھٹکے کی قوت کم محسوس ہوتی حالانکہ دونوں میں معیار حرکت کی یکساں تبدیلی ہوتی ہے۔ ایسا اس لیے ہوتا ہے کہ دونوں میں جھٹکے کا وقت مختلف ہوتا ہے۔
4. کانچ کے برتن ظروف وغیرں کو Packing کے دوران کاغذ یا نرم شا لیے کا استعمال کیا جاتا ہے تاکہ جھٹکے کا وقت بڑھایا جائے اور جھٹکے کی قوت کو گھٹایا جائے۔

2.5 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

5Kg کمیت والے رکے ہوئے جسم پر 20N کی قوت لگائی جاتی ہے۔ اس میں کتنا اسراع پیدا ہوگا۔ 5sec بعد اس کی رفتار کتنی ہو جائے گی؟ اگر 5sec بعد یہ قوت ہٹالی جائے تو یہ جسم کسی حرکت کرے گا۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $F = ma$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{F}{m} = 4msec^{-2}$$

$$u = 0 \ \ ,a = 4msec^{-2} \ \ \ ,t = 5\ sec$$

5sec بعد یہ قوت ہٹالی جائے تو تب یہ جسم کی حرکت

$$V = u + at$$

$$V = 0 + 4 \times 5 = 20msec^{-2}$$

حل شدہ مثال2

2kg کمیت والا ایک جسم رکا ہوا ہے۔ اس پر ایک مستقل قوت 5sec تک عائد ہوتی رہے اور پھر 5sec کے اختتام پر ہٹالی گئی۔ اگر ابتدائی 4sec میں یہ جسم 20m کا فاصلہ طے کرتا ہے تو بتایئے اس پر عائد ہونے والی قوت کی مقدار کتنی ہے۔ قوت کے ہٹائے جانے کے بعد 5sec میں یہ کتنا فاصلہ طے کرتا ہے۔

حل:

حل میں دی گئی قدریں

$$t = 4\,sec\,, \quad s = 20m \quad u = 0 \quad M = 2kg$$

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$20 = 0 + \frac{1}{2}a4^2$$

$$20 = 8a\,; a = \frac{20}{8} = 2.5msec^{-2}$$

$$F = Ma = 2 \times 2.5 = 5N$$

قوت کے ہٹائے جانے کے بعد 5sec میں یہ فاصلہ ہوگا

$$V = u + at$$

$$V = 0 + 2.5 \times 5 = 12.5\ msec^{-1}$$

حل شدہ مثال3

5g کمیت والے جسم پر 5N کی قوت 2ms تک لگائی جاتی ہے جھٹکے کی مقدار معلوم کیجیے۔ اور اس کی رفتار میں ہونے والی تبدیلی کو معلوم کیجیے۔

حل:

حل میں دی گئی قدریں

$$F = 5N\ ; t = 2msec = 2 \times 10^{-3} sec$$
$$M = 5gr = 5 \times 10^{-3} kg$$
$$I = F\ .t$$
$$I = 5 \times 2 \times 10^{-3} = 10 \times 10^{-3} Nsec$$
$$M(v-u) = I$$

رفتار میں تبدیلی ہو گی

$$\Longrightarrow (v-u) = \frac{I}{M}$$
$$v - u = \frac{1 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-3}} = 2msec^{-1}$$

حل شدہ مثال4

10kg کمیتی بندوق سے 0.01kg کمیتی گولی کو داغا گیا۔ اگر بندوق کی نالی کے لحاظ سے گولی کی رفتار $50msec^{-1}$ ہو تو بندوق کے جھٹکے کی رفتار معلوم کرو۔

حل:

حل میں دی گئی قدریں

$$M_1 = 0.01kg\ ; V_1 = 50msec^{-1}\ ; M_2 = 10kg$$
$$V_2 = \cdots$$
$$M_2V_2 = -M_1V_1$$
$$V_2 = \frac{M_1V_1}{M_2} = \frac{0.01 \times 50}{10}$$

بندوق کے جھٹکے کی رفتار

$$V_2 = 0.05msec^{-1}$$

حل شدہ مثال5

ایک جسم کی کمیت 10kg پر $3t^2$ قوت لگائی جاتی ہے۔ اور 32N بیرونی قوت بھی عائد ہوتی ہے۔ جسم کی ابتدائی رفتار 10m/sec ہے۔ 5sec کے وقت کے دوران اس جسم کی رفتار معلوم کرو۔

حل:

حل میں دی گئی قدریں

$$3t^2 - 32 = Force$$
$$F = ma = m\frac{dv}{dt}$$
$$m\frac{dv}{dt} = 3t^2 - 32$$
$$10dv = (3t^2 - 32)dt$$
$$\int 10\,dv = \int (3t^2 - 32)\,dt$$
$$10v = \frac{3 \times t^3}{3} - 32t + C_1$$

جہاں مستقل تکمیلی $C_1 \ (Integral\ Constant)$

$$10 \times 10 = \frac{3 \times 0^3}{3} - 32 \times 0 + C_1$$
$$C_1 = 100$$
$$10v = t^3 - 32t + 100$$
$$t = 5sec$$
$$10v = 5^3 - 32 \times 5 + 100$$
$$10v = 65$$

5sec کے وقت کے دوران اس جسم کی رفتار

$$v = \frac{65}{10} = 6.5m/sec$$

حل شدہ مثال6

ایک جسم پر وقت کے دوران تبدیلی قوت $F=12mt^2$، جہاں m جسم کی کمیت 2sec کے بعد اس جسم کی نقل مکان اور رفتار معلوم کیجیے۔ یہاں پر t=0 اور x=0 پر رفتار v=−4m/sec

حل:

ایک جسم پر وقت کے دوران تبدیلی قوت

$$F = 12mt^2$$
$$F = ma = m\frac{dv}{dt}$$
$$m\frac{dv}{dt} = 12mt^2$$

$$dv = 12t^2 dt$$
$$\int dv = 12 \int t^2\, dt$$
$$v = 12\frac{t^3}{3} + c_1$$
c_1 $(Integrate\ Constant)$ تکمیلی مستقل

$c_1 = \cdots$ ہے $v = -4m/sec \quad x = 0 \ ; t = 0$

$$-4 = 12\frac{0^2}{3} + c_1$$
$$c_1 = -4$$
$$v = 4t^3 + (-4)$$
$$v = 4t^3 - 4$$
$$\frac{dx}{dt} = 4t^3 - 4 \qquad (v = \frac{dx}{dt})$$
$$dx = (4t^3 - 4)dt$$
$$\int dx = \int (4t^3 - 4)\, dt$$
$$x = 4\frac{t^4}{4} - 4t + c_2$$
$$c_2 = 0 \quad x = 0 \quad ; t = 0$$
$$x = t^4 - 4t$$

2sec کے بعد اس جسم کی نقل مکان

$$t = 2\ sec$$
$$x = 2^4 - 4 \times 2$$
$$x = 8m$$

2sec کے بعد اس جسم کی رفتار

$$v = 4t^3 - 4$$
$$v = 4 \times 2^3 - 4$$
$$v = 28\ m/sec$$

2.6 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- نیوٹن کا پہلا کلیہ حرکت بیان کرتا ہے کہ اگر کسی ساکن جسم پر کوئی باہری قوت نہ لگائی جائے تو وہ جسم ساکن رہے گا اور حرکت کرتا ہوا جسم خط مستقیم میں یکساں چال سے حرکت کرتا رہے گا۔
- زور کوئی اثر ہے جو ایک جسم میں شرح رفتار یا اسراع پیدا کر سکتا ہے۔ نظام عشاری میں زور کی اکائی نیوٹن اور انگریزی نظام میں پونڈ ہے۔
- نیوٹن کا دوسرا کلیہ حرکت بیان کرتا ہے کہ جب ایک جسم پر زور مطلق کام کرتا ہے تو اس میں زور کی سمت میں زور کی مقدار کے متناسب شرح رفتار یا اسراع پیدا ہو گا۔ یعنی زور جس قدر زیادہ ہو گا اس کی رفتار بھی اسی کے مطابق بڑھ جائے گی۔
- استمرار کی اصطلاح اس ظاہری مزاحمت کا حوالہ دیتی ہے جو جسم اپنی حرکت کی حالت میں تبدیلیوں کے خلاف لگاتا ہے۔ m کمیت والا کوئی جسم اگر a کے اسراع سے حرکت میں ہو تو اس پر قوت $F = ma$ عائد ہوتی ہے۔ قوت کی اکائی نیوٹن(N) اور ابعادی ضابطہ MLT^{-2} ہوتا ہے۔
- نیوٹن کا تیسرا کلیہ حرکت بیان کرتا ہے کہ جب ایک جسم دوسرے جسم پر زور لگاتا ہے تو دوسرا جسم پہلے جسم پر اسی جسامت کا مگر مخالفت سمت میں زور لگاتا ہے۔
- **جھٹکا:** بڑی قوت اور چھوٹی مدت وقت کا حاصل ضرب جھٹکا کہلاتا ہے جو معیار حرکت میں تبدیلی پیدا کرتا ہے اس کی SI اکائی Ns یا $Kgms^{-1}$ اور ابعادی ضابطہ MLT^{-1} ہوتا ہے۔
- **جمود:** جسم کی وہ صلاحیت جس کی وجہ سے یہ اپنی حالت کو سکون سے حرکت یا حرکت سے سکون میں تبدیل کرنے والے بیرونی نظام پر رد عمل ظاہر کرتا ہے جمود کہلاتی ہے۔
- **قوت:** یہ وہ عمل ہے جو کسی جسم کی حالت سکون سے حرکت یا حرکت سے سکون میں تبدیل کرتی ہے۔
- جسم کی کمیت اور رفتار کا حاصل ضرب اس کا معیار حرکت کہلاتا ہے۔

2.7 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **نیوٹن کا پہلا کلیہ** : نیوٹن کا پہلا کلیہ حرکت بیان کرتا ہے کہ اگر کسی ساکن جسم پر کوئی باہری قوت نہ لگائی جائے تو وہ جسم ساکن رہے گا اور حرکت کرتا ہوا جسم خط مستقیم میں یکساں چال سے حرکت کرتا رہے گا۔

نیوٹن کا دوسرا کلیہ : حرکت بیان کرتا ہے کہ جب ایک جسم پر زور مطلق کام کرتا ہے تو اس میں زور کی سمت میں زور کی مقدار کے متناسب شرح رفتار یا اسراع پیدا ہو گا۔

نیوٹن کا تیسرا کلیہ: حرکت بیان کرتا ہے کہ جب ایک جسم دوسرے جسم پر زور لگاتا ہے تو دوسرا جسم پہلے جسم پر اسی جسامت کا مگر مخالفت

سمت میں زور لگاتا ہے۔

جھٹکا: بڑی قوت اور چھوٹی مدت قوت کا حاصل ضرب جھٹکا کہلاتا ہے جو معیار حرکت میں تبدیلی پیدا کرتا ہے۔

جمود: جسم کی وہ صلاحیت "جس کی وجہ سے یہ اپنی حالت کو سکون سے حرکت یا حرکت سے سکون میں تبدیل کرنے والے بیرونی نظام پر رد عمل ظاہر کرتا ہے۔

قوت: یہ وہ عمل ہے جو کسی جسم کی حالت سکون سے حرکت یا حرکت سے سکون میں تبدیل کرتی ہے۔

2.8 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.8.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. جب گھوڑا گاڑی کو کھینچتا ہے تو کون سی قوت گھوڑے کو آگے بڑھنے میں مددگار ہوتی ہے؟
2. چلتی بس سے کودنے کے بعد اپنے بچاؤ کے لیے کیا کرنا پڑتا ہے؟
3. جمود کیا ہے؟ کون سی طبعی مقدار سے جمود کی پیمائش ہوتی ہے؟
4. جھٹکا کے دو اطلاقات لکھیے۔
5. جھٹکا ذیل میں سے.............. کی مساوات ہے۔

$t = \vec{F}.\vec{I}$ (d) $\quad \vec{F} = \vec{I}.t$ (c) $\quad \vec{I} = \vec{F}.t$ (b) $\quad \vec{I} = \vec{F}/t$ (a)

6. نیوٹن کے تیسرے کلیے کی کوئی دو مثالیں پیش کیجیے۔
7. قوت کی تعریف لکھیے۔
8. جھٹکا کی SI اکائی ....ہے۔
9. معیار حرکت کا ابعادی ضابطہ..............ہے۔

MLT^0 (d) $ML^{-1}T$ (c) MLT^{-2} (b) MLT^{-1} (a)

10. نیوٹن کا پہلا کلیہ کو بیان کرو۔

2.8.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. نیوٹن کے کلیات حرکت بیان کیجیے۔ قوت کی SI اکائی کیا ہے؟
2. نیوٹن کے تیسرے کلیے کی تعریف کیجیے۔ اور اس کے اطلاقات بتایئے۔
3. جھٹکا سے کیا مراد ہے؟ اس کے اطلاقات بتایئے۔

4. جھٹکا(Impulse) کیا ہوتا ہے؟اس کی SI اکائی اور ابعادی ضابطہ لکھیے۔
5. حوالے کے فریم(Frame of Reference) سے کیا مراد ہے؟
6. جمودی حوالے کے فریم کی تعریف کیجیے۔
7. نیوٹن کادوسرا کلیہ بیان کیجیے۔اس کے ذریعے $F = ma$ کواخذ کیجیے۔
8. معیار حرکت اور جھٹکا کی تعریف کیجیے۔

2.8.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. نیوٹن کا دوسرا کلیہ حرکت بیان کیجیے اور اس سے مساوات $F = ma$ اخذ کیجیے۔ ایک جسم مستقل دائروی رفتار سے ایک دائرے میں گھوم رہاہے۔ کیااس پر جسم کوئی قوت عمل کررہی ہے۔
2. ثابت کیجیے کہ حرکت کاپہلا کلیہ دوسرے کلیہ سے حاصل کیاجاسکتاہے۔کیاحرکت کاتیسرا کلیہ بھی دوسرے کلیہ سے حاصل کیا جاسکتاہے؟
3. نیوٹن کے کلیات حرکت کوتفصیل سے بیان کیجیے۔
4. جھٹکاکے مفہوم کو سمجھاؤ۔جب کوئی قوت اچانک ایک لمحے کے لیے کسی جسم پر عمل کرے تو ثابت کرو کہ وہ دھکا جسم کے معیار حرکت کی تبدیلی مساوی ہوتاہے۔

2.8.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات(Solved Answer Type Questions)

1. ایک رکے ہوئے 10kg کمیتی جسم پر50N کی قوت ہوتواس میں کتنااسراع پیداہوتاہے۔اگر یہ قوت مسلسل عائد ہوتی رہے تو بتائیے کہ5s میں اس کی رفتار کتنی ہوجائے گی؟
2. 5kg کمیتی ایک جسم $10ms^{-1}$ کی ہموار رفتار سے متحرک ہے۔اگر اس کو روکنے کے لیے20N کی قوت مخالف سمت میں لگائی جائے توبتائیے کہ یہ کتنی دیر میں رکے گا۔
3. 0.5kg وزن ایک بیس بال(Baseball) کی گیند50M فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے ایک بیٹ سے ٹکراتی ہے۔ ٹکر کے بعد گیند بیٹ سے اپنی ابتدائی سمت کے مخالف سمت میں $100ms^{-1}$ رفتار سے جداہوتی ہے بیٹ اور گیند کے درمیان تماس کا مجموعی وقت 10^{-3}sec ہوتوگیند پر عمل پیراجھٹکاکی قوت محسوب کیجیے۔
4. 50N کی ایک اوسط قوت ایک قائم گیند پر0.5sec عمل کرتی ہے۔گیند پر عمل کرنے والے جھٹکاکو معلوم کرو اس جھٹکاکے بعد گیند کے معیار حرکت کو بھی معلوم کیجیے۔

2.9 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. College Physics by Sears.F.W.& Zemansky.M.W. Wesley Publishing Co.Inc.London
2. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta Dhanpat Rai Publications
3. Mechanics by Kittel,M.C.Graw Hill
4. Mechanics by Mathur .D.S,S.Chand Publication
5. Modern College Physics by White.H.E. East West Press Pvt.Ltd New Delhi
6. Physics by Zafiratos.C, John wesiey &Sons. Inc. New York
7. Physics Matter Energy and Univers by Hruwell G.P.&Legge.G.J.F. East West Press Pvt.Ltd.New Delhi
8. Physics Part I by Resnik.R &Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi
9. Technical Physics by Bueche.F ,Harper &Row Publication,New York
10. Unified Physics Vol-I,Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath &Co.Meerut

اکائی 3۔ کمیت کا مرکز

(Centre of Mass)

اکائی کے اجزا

3.0 تمہید

3.1 مقاصد

3.2 کمیت کا تصور

3.3 کمیت اور وزن

3.4 مرکز کمیت

3.4.1 مرکز کمیت کے خصوصیات

3.5 ثقلی مرکز اور مرکز کمیت

3.6 تین ابعادی میں ذرات کے نظام کا مرکز کمیت

3.7 مرکز کمیت کی حرکت (مرکز کمیت کی رفتار اور اسراع)

3.8 تحویل شدہ کمیت

3.9 مرکز کمیت کے حرکت کے کلیات

3.10 حل شدہ مثالیں

3.11 اکتسابی نتائج

3.12 کلیدی الفاظ

3.13 نمونہ امتحانی سوالات

3.13.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

3.13.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

3.13.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

3.13.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

3.14 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

3.0 تمہید (Introduction)

قدرتی طبعی مظاہر کتنے ہی مشکل کیوں نہ ہوں طبیعیات دانوں نے 'سادہ کلیات' اشکال اور مساواتوں کے ذریعے ان کو آسان کرکے سمجھانے کی کوشش کی ہے۔ حرکیات کے مطالعے کے دوران نیوٹن کے کلیات کا اطلاق ایسے اجسام کے لیے ہوتا ہے جو نقطی کمیت رکھتے ہوں۔ ماہر طبیعیات کی نظر سے ایک ایسے نقطے کا تعارف کرایا ہے جسے مرکز کمیت یا ذرات کے نام کا جمودی مرکز کہتے ہیں بیرونی قوت کے زیر اثر اس ذرے کی حرکت پورے نظام کی حرکت کو ظاہر کرتی ہے۔ اس اکائی میں ہم نظام کے مرکز کمیت کی تعریف، خصوصیات اور اس کی حرکت کی تشریح کرنے کے لیے مرکز کمیت کے تصور اور اس کی حرکت پر غور کریں گے۔

3.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں مرکز کمیت کے تصور کو سمجھانے کی کوشش کی گئی ہے۔ اس اکائی میں ہم:

i. کمیت اور وزن تعریف کریں گے۔

ii. مرکز کمیت کے خصوصیات کو بیان کریں گے۔

iii. مرکز کمیت اور ثقلی مرکز کے درمیان امتیاز کو سمجھیں گے۔

iv. مرکز کمیت کے تصور کی مدد سے ذرات کے نظام کی حرکت کو بیان کریں گے۔

v. کسی نظام کی تحویل شدہ کمیت کے تصور کی اہمیت کو بیان کریں گے۔

vi. مرکز کمیت کے حرکت کے کلیات کو سمجھیں گے۔

3.2 کمیت کا تصور (Concept of Mass)

سر آئزک نیوٹن نے حرکت کے پہلے کلیہ کو بیان کیا ہے۔ ہر ساکن (Rest) جسم حالت سکون (Rest) میں رہتا ہے۔ یا متحرک جسم ہموار رفتار سے خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔ جب تک کہ کوئی بیرونی قوت (Applied Force) اس حالت کو بدلنے پر مجبور نہ کریں۔ بیرونی قوتوں کی عدم موجودگی میں اجسام اپنی حالت نہیں بدلتے۔ اس حقیقت کو مادے کا جمود (Inertia) کہتے ہیں۔ اس لیے اس کلیے کو جمود کا کلیہ بھی کہتے ہیں۔ نیوٹن کا پہلا کلیہ تمام اجسام (Total Body) پر لاگو ہوتا ہے۔ لیکن وزنی جسم (Weight Body) اور ہلکے جسم (Weightless Body) جسم کے برتاؤ میں فرق (Difference) پایا جاتا ہے۔

تجربہ یہ کہتا ہے کہ وزنی اجسام کی حالت میں زیادہ قوت پر تبدیلی درکار ہوتی ہے اور ہلکے اجسام کے لیے کم قوت ہوتی ہے۔ جسم کی اس خاصیت کو جمودی کمیت (Inertial Mass) کہتے ہیں۔

3.3 کمیت اور وزن (Mass and Weight)

کسی جسم کے "وزن" کی تعریف سے ہم واقف ہیں۔ یہ وہ قوت ہے جس سے زمین اپنے ثقلی کشش کی وجہ سے کسی جسم کو اپنی طرف کھینچتی ہے۔ وزن اور کمیت کا تعلق ہونے کے باوجود بھی یہ دونوں ایک نہیں ہیں۔

کسی جسم پر عمل کرنے والی تجاذبی قوت (Gravitational Force) کو وزن w کہتے ہیں۔ وزن کو 'm' سے ظاہر کرتے ہے۔

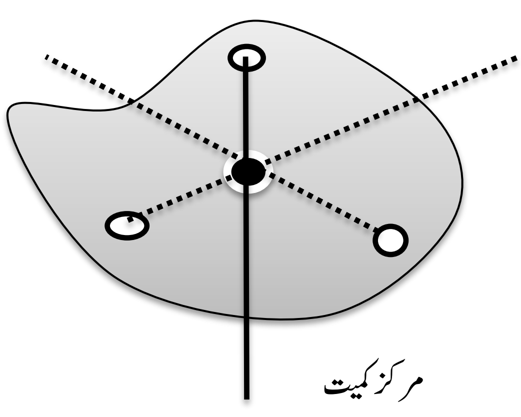
جہاں 'm' کمیت اور g اسراع بوجہ جاذبہ زمین ہے۔ 'm' کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{w}{1N} = g$$

کسی ایک مقام پر g کی کمیت بہ لحاظ کمیت تمام اجسام کے لیے یکساں ہوتی ہے۔ اس مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی دیے ہوئے مقام پر وزن کمیت کے راست تناسب ہوتا ہے۔ کمیت اور وزن کے تناسبی رشتے کو سب سے پہلے گیلیلوں (Galileo) نے قائم کیا۔

3.4 مرکز کمیت (Centre of Mass)

اگر کوئی نظام ایسے کئی ذرات پر مشتمل ہو جو آپس میں ایک دوسرے پر عمل پیرا ہوں اور نظام پر بیرونی قوتیں بھی عمل پیرا ہوں تو نظام کے ذرات کی حرکت کو بیان کرنا آسان نہیں ہے۔ لیکن ذرات کے نظام کی جگہ ایک واحد معادل ذرے کو لے کر مرکز کمیت کے تصور کی مدد سے مسئلہ کو آسان بنایا جاسکتا ہے۔ اس طرح اگر کوئی نظام 'n' ذرات پر مشتمل ہو تو اس میں ایک ایسے نقطے کا وجود ہوتا ہے جو اس طرح عمل کرتا ہے جیسے تمام کمیت اس نقطے پر مرکوز ہو گئی ہو اور نظام پر عمل کرنے والی بیرونی قوتیں راست اس پر لگائی گئی ہوں۔ اس نقطے کو نظام کا مرکز کمیت کہتے ہیں۔



شکل (3.1)

3.4.1 کمیت کا مرکز کے خصوصیات(Importance of Center of Mass)

i. مرکز کمیت کا مقام جسم کی شکل اور اس میں کمیت کی ترتیب پر منحصر ہوتا ہے۔

ii. جب مرکز کمیت محوروں کے مبدا پر موجود رہتا ہے۔ اس وقت اس کے ذرات کے کمیتوں کے معیار اثر کے مجموعہ یعنی $\sum_n m_i x_i = 0$ کی قیمت صفر ہوتی ہے۔

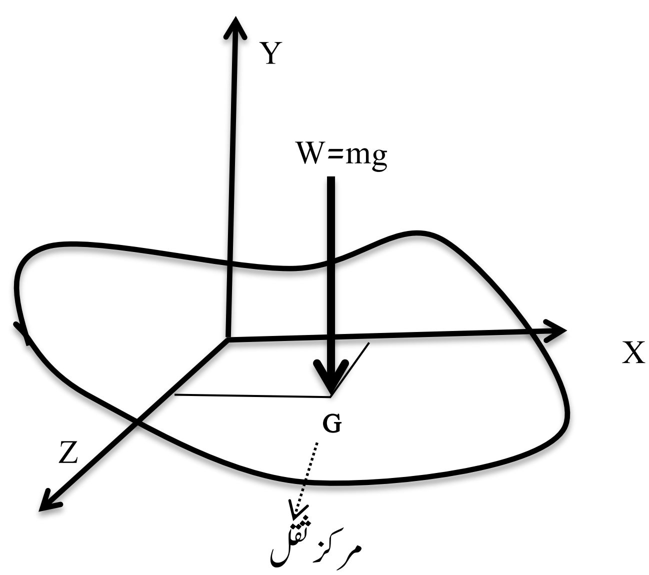
iii. مرکز کمیت جسم کے اندر بھی ہو سکتا ہے یا پھر باہر بھی۔ مرکز کمیت پر کمیت کا موجود ہونا ضروری نہیں۔ ایک حلقے(Ring) کی صورت میں مرکز کمیت حلقے میں نہیں آتا ہے۔ جہاں کمیت نہیں پائی جاتی ہے۔

مرکز کمیت کے مقام کا انحصار اس کو ظاہر کرنے والے محوروں کے نظام پر موقوف نہیں ہوتا بلکہ اس سے آزاد ہوتا ہے۔

3.5 ثقلی مرکز اور مرکز کمیت (Centre of Gravity and Centre of Mass)

اجسام چھوٹے چھوٹے ذرات سے مل کر بنتے ہیں۔ اگر ذرات چھوٹے ہوں تب یہ نقطی ذرات(Particles Point) کہلاتے ہیں۔ سطح زمین پر یہ نقطی ذرات زمینی مرکز کی طرف کشش کرتے ہیں۔ زمین کی طرف قوت کشش (نقطی ذرات کے لیے) متوازی ہوتی ہے۔

کئی متوازی قوتیں زمین کی طرف عمل کرتی ہیں یہ تمام قوتیں متوازی قوتوں کے نظام کی طرح عمل کرتے ہیں ایسا حاصل نقطہ جس مرکز سے گزرتا ہو۔ اس نقطے کو ثقلی مرکز(Centre of Gravity) کہتے ہیں۔



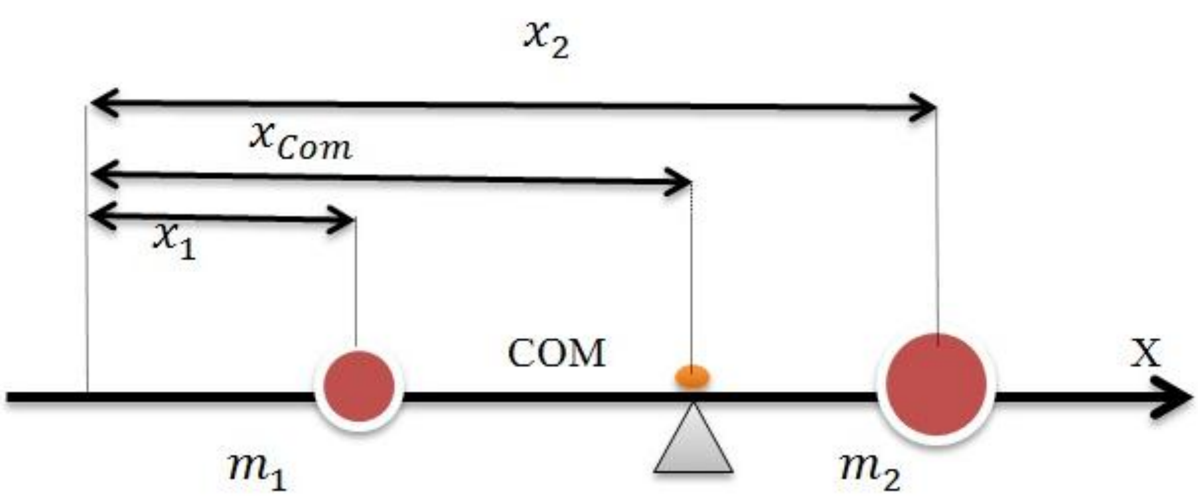
شکل(3.2)

بڑے اجسام یا نظام کی صورت میں جن کی جسامت پر کشش میدان کا اثر ہموار نہیں ہوتا۔ متوازی قوتوں کا اثر اطلاق نہیں کرتا۔ مرکز کمیت اور ثقلی مرکز ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہوتے۔ لیکن ہموار کشش میدان میں مرکز کمیت اور ثقلی مرکز ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ مرکز کمیت پورے جسم کی حرکت کو ظاہر کرتی ہے جب کہ ثقلی مرکز اس مقام کو ظاہر کرتی ہے جہاں جسم کا سکونی اعتدال عمل میں آتا ہے۔ مرکز کمیت بہت آسان تر مفہوم ہے کیوں کہ یہ کشش قوت پر منحصر نہیں ہوتا۔

3.6 تین ابعادی میں ذرات کے نظام کا مرکز کمیت

(Centre of Mass of a System of Particles in Three Dimensions)

فرض کرو کہ m_1 اور m_2 کمیت والے دو ذرات محور x کے نقاط x_1 اور x_2 پر موجود ہیں۔ ان ذرات کے مرکز کمیت کی مساوات اس طرح لکھ سکتے ہیں۔



شکل 3.3

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

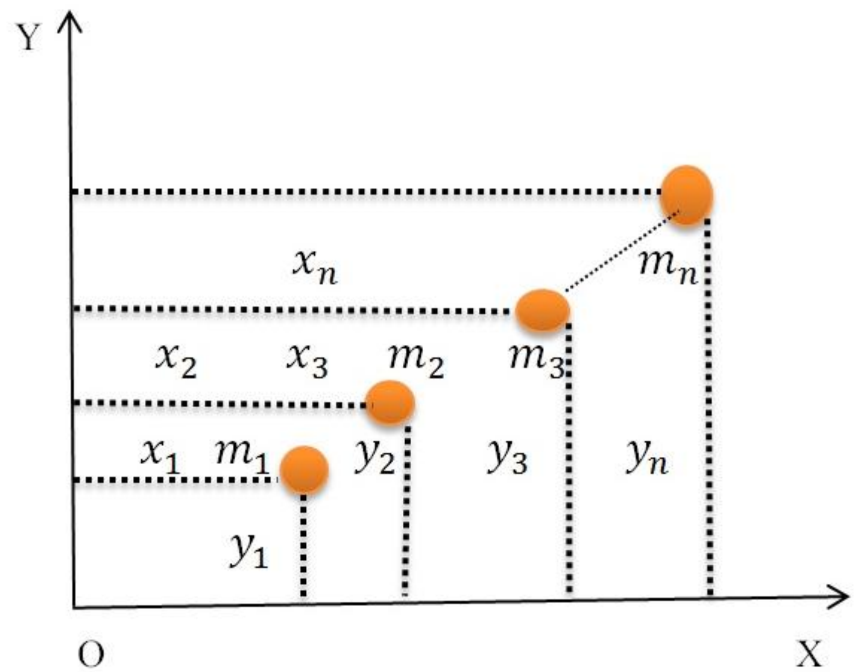
اگر ذرات مستوی xy میں واقع ہوں اور ان کے محور (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) ہوں تو مرکز کمیت کے محدد مندرجہ ذیل ہوتے ہیں۔

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$$

تین ابعادی نظام میں ہر ایک ذرہ x, y اور z محور پر واقع ہوتا ہے۔ بہ لحاظ n ذرات کی کمیتیں $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots, m_n$ محورات (x_1, y_1, z_1) $(x_2\ y_2, z_2)$ ---------- $(x_n\ y_n\ z_n)$ ترتیب دار ہوں گے۔ نظام کے مرکز کمیت کے محد د اس طرح ہو گا۔

ہو گا۔



شکل (3.4)

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ------ + m_nx_n}{m_1 + m_2 ------ + m_n}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + ------- + m_ny_n}{m_1 + m_2 + ------- + m_n}$$

$$z_{cm} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + ------ + m_nz_n}{m_1 + m_2 + ------ + m_n}$$

کسی استوار جسم کا مرکز کمیت دریافت کرنے کے لیے اس جسم کو Δm کمیت کے کئی چھوٹے عناصر میں تقسیم کیا جاتا ہے جو تقریباً نقاط x_i, y_i, z_i پر ہوتے ہیں۔ تب مرکز کمیت کے محور کے مساواتیں ہوتے ہیں

$$x_{cm} = \frac{\sum_1^n \Delta m_i x_i}{\sum_1^n \Delta m_i}$$

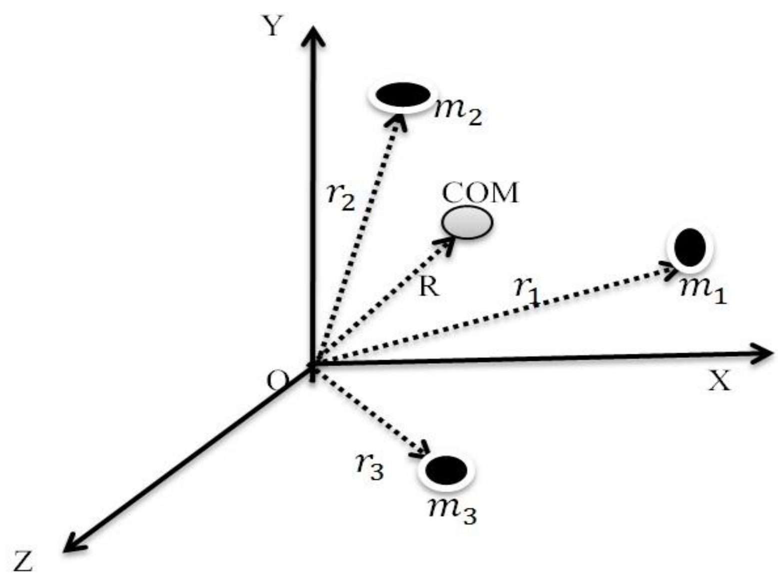
$$Y_{cm} = \frac{\sum_1^n \Delta m_i y_i}{\sum_1^n \Delta m_i}$$

$$Z_{cm} = \frac{\sum_1^n \Delta m_i z_i}{\sum_1^n \Delta m_i}$$

روز مرہ زندگی میں جن اشیا سے ہمیں سابقہ پڑتا ہے اُن میں کئی ذرات پائے جاتے ہیں۔ یہ ذرات کسی مادے میں مساویانہ طور پر تقسیم کیے ہوئے ہوتے ہیں۔ یہ مساواتوں میں مجموع $\int$ (تکمیلہ) کا استعمال کیا جاتا ہے۔ تب کمیتیں تفرقی کمیتیں(Differential Masses)ہو جاتے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں اگر کمیت کے عناصر کی تعداد لامتناہی ہے تو اوپر کی مساواتوں کو آپس میں جمع کرنے کی بجائے ان کے تکملے (Intigration) سے کام لیا جاسکتا ہے۔ تب مساواتیں

$$X_{cm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_1^n \Delta m_i x_i}{\sum_1^n \Delta m_i} = \frac{\int xdm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int xdm$$
$$Y_{cm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_1^n \Delta m_i y_i}{\sum_1^n \Delta m_i} = \frac{\int ydm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int ydm$$
$$Z_{cm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_1^n \Delta m_i z_i}{\sum_1^n \Delta m_i} = \frac{\int zdm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int zdm$$

ان تین مساواتوں کو ملانے پر مرکز کمیت کے مقام کو ظاہر کرنے والا سمتیہ (Position Vector) حاصل ہوتا ہے جس کو مقامی سمتیہ کہتے ہیں۔ سمتیوں کی رقوم میں:



شکل (3.5)

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m}\int rdm$$

$$\vec{R}_{cm} = \left(\hat{\imath}x_{cm} + \hat{\jmath}y_{cm} + \hat{k}z_{cm}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\imath}x_i + \hat{\jmath}y_i + \hat{k}Z_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

جہاں $\sum_{i=0}^{n} m_i$ نظام کی جملہ کمیت M ہے۔

$$M\overrightarrow{R_{cm}} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i$$

3.7 مرکز کمیت کی حرکت (مرکز کمیت کی رفتار اور اسراع)

(Motion of a Center of Mass (Velocity and Acceleration of Center of Mass)

کسی نظام میں پائے جانے والے ذرات کی مرکز کمیت کو سمجھنے کے لیے ہم تفرق لیں گے۔ تب

$$\frac{dr_c}{dt} = V_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\frac{dri}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i v_i \qquad (3.1)$$

V_c مرکز کمیت کی رفتار، i, V_C ویں ذرے کی رفتار

مساوات کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$M\vec{V}_{cm} = \sum_i m_i\vec{v}_i = \sum_i P_i = P_{total} \qquad (3.2)$$

مساوات (3.2) کے دائیں جانب تمام ذرات کے خطی معیار حرکت کا مجموعہ ہے جو نظام کا جملہ معیار حرکت کہلاتا ہے۔
مساوات (3.2) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ نظام کا جملہ معیار حرکت جملہ کمیت اور مرکز کمیت کی رفتار کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔
دوسرے الفاظ میں کسی نظام کے کئی ذرات کی حرکت واحد ذرہ m اور اس کی رفتار V_c کے طور پر کی جاتی ہے۔
مساوات (3.1) کو دوبارہ تفرق کرنے پر

$$\frac{dv_c}{dt} = a_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{dvi}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i a_i \qquad (3.3)$$

مرکز کمیت کی اسراع a_i،iویں ذرے کی اسراع ہے۔ مساوات یوں بھی لکھی جاسکتی ہے۔

نیوٹن کے دوسرے کلیے کی رو سے

$$M\vec{a}_{cm} = \sum_{i=0}^{n} m_i \overrightarrow{a_i} \tag{3.4}$$

'a_c'مرکز کمیت کی اسراع

نیوٹن کے دوسرے کلیے کی رو سے i_{th}ذرے پر عمل کرنے والی حاصل قوت $m_i\overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{F_i}$ہوتی ہے۔

$$Ma_c = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_1^n F_i = F_{ext} = F_1 + F_2 + - - - + F_n \tag{3.5}$$

'F_i' iویں ذرے کی غیر متوازن یا بیرونی قوت ہے۔

مساوات (3.5) کا دایاں بازو تمام ذرات پر عمل کرنے والی حاصل قوت یا نظام پر عمل کرنے والی حاصل قوت کو ظاہر کرتا ہے۔ اب یہ لکھا جاسکتا ہے کہ

$$Ma_{cm} = \sum\nolimits_i \vec{F}_{ie} + \sum_i \vec{F}_{ij} \tag{3.6}$$

$$i \neq j$$

جہاں i_{th}،F_{ie} ذرے پر عمل کرنے والی بیرونی قوت ہے اور J_{th}،F_{ij} ذرے کی وجہ سے i_{th} ذرے پر عمل کرنے والی باہمی قوت عاملہ (Forced Interaction) ہے۔ F_{ij} مساوی اور مخالف ہوتی ہے ذرہ i کی وجہ سے ذرہ j پر عمل کرنے والی قوت کے (جو F_{ij} کے حملے میں واقع ہوتا ہے)۔ اس طرح نظام کے ذرات کے مابین عمل کرنے والی تعاملی قوتیں جوڑیوں میں واقع ہوتی ہیں۔ ہر جوڑی عمل اور رد عمل پر مشتمل ہوتی ہے۔ جو ایک دوسرے کو زائل کر دیتی ہیں۔ اگر نظام پر عمل کرنے والی حاصل قوت کو $\vec{F}$ سے تعبیر کیا جائے تو

$$\vec{F} = \sum\nolimits_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_{ie} = \overrightarrow{F_e} \tag{3.7}$$

جہاں F_e نظام پر عمل کرنے والی حاصل بیرونی قوت ہے۔

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_e \qquad (3.8)$$

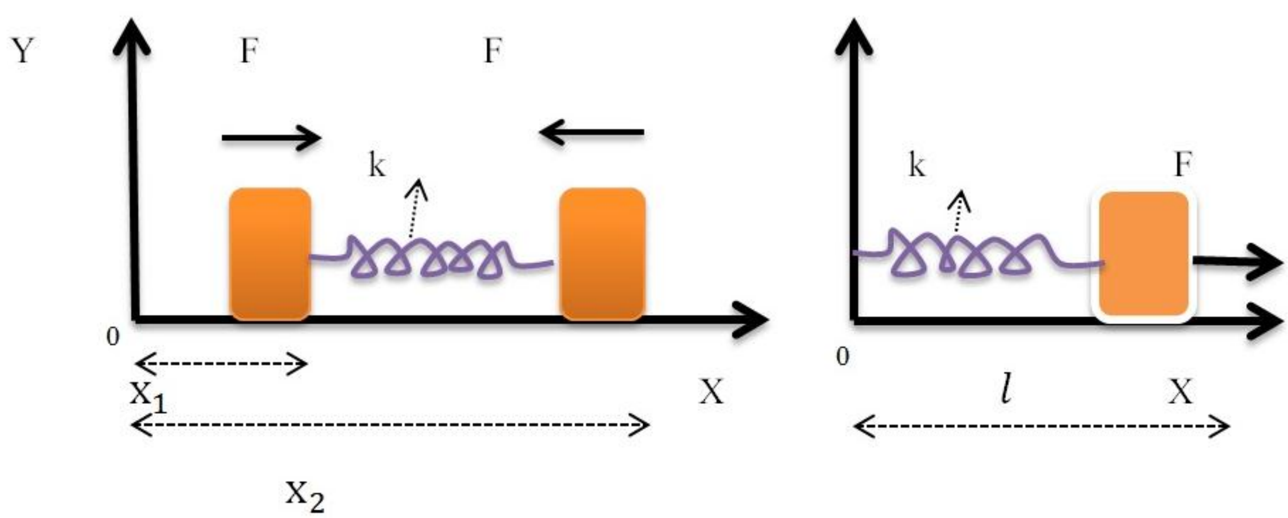
مساوات(3.8) سے ظاہر ہوتا ہے کہ مرکز کمیت کا اسراع اس طرح ہوتا ہے جیسا کہ نظام کی ساری کمیت 'مرکز کمیت پر مرکوز ہوگئی ہو اور حاصل بیرونی قوت اس پر عمل پیرا ہو۔

3.8 تحویل شدہ کمیت(Reduced Mass)

اگر ایک اسپرنگ جس کا مستقل K ہو، اور ایک استوار سہارے سے آویزان ہے۔ایک چھوٹی کمیت 'm' جڑی ہوئی ہو تو یہ کمیت ایک سادہ موسیقی اہتزاز (Simple Harmonic Oscillation) بن جاتی ہے۔ یہ دو اجسام کا ایک نظام ہے جس میں استوار سہارا لامتناہی کمیت کے جسم کے طور پر کام کرتا ہے۔ جب اسپرنگ سے لگی ہوئی کمیت 'm' اہتزاز کرتی ہے۔تب استوار سہارا جمودی حوالے کے ڈھانچے میں حالت سکون میں رہتا ہے اور اہتزازی نظام کی توانائی بالقوہ U(x) کمیت کے نقل مکان x کا تفاعل ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر HCl, CO, H_2 وغیرہ کے سالمات۔

اس مثال میں ہمیں دو دو جسموں والے اہتزازی نظام ملتے ہیں جس میں کسی ایک جسم کی کمیت کو لامتناہی تصور نہیں کیا جاسکتا۔ یہ سالمات ان کے تشاکل کے محور کے ساتھ اہتزاز کرتے ہیں۔ دونوں اجسام کی حرکتوں پر کسی مناسب حوالے کے جمودی ڈھانچے میں غور کریں
دو اجسام m_1 اور m_2 پر غور کیجیے جن کو بموجب شکل قوتی مستقل k کے ایک ہلکے اسپرنگ سے جوڑ دیا گیا ہے۔ یہ نظام ایک بے رگڑ افقی سطح پر اہتزاز کرنے کے لیے زد ہے۔ فرض کرو کہ x_1 اور x_2 اسپرنگ کے سرے کی حدود کو ظاہر کرتے ہیں۔ ایک متجانس کرہ، مکعب، دار وی قرص مستطیلی تختی وغیرں کا مرکز ثقلی ان کے مرکز پر ہوتا ہے۔ایک استوانے کا مرکز ثقلی اس کے محور پر واقع ہوتا ہے۔



شکل(3.6)

کسی ایک لمحے پر اسپرنگ کا طول $(x_1 - x_2)$ ہے۔ اگر اسپرنگ کا طول بغیر کسی کھنچاؤ کے l ہو تو اس اسپرنگ کے طول میں تبدیلی ہوتی ہے۔

$$X = l - (x_2 + x_1) \qquad (3.9)$$

اگر 'x' مثبت ہو تو اسپرنگ کھینچی ہوئی حالت میں رہتا ہے۔

اگر $x=0$ ہو تو اسپرنگ اپنے طبعی طول (Normal Length) پر ہوتا ہے۔

اگر $x>0$ ہو تو اسپرنگ کھینچا گیا ہے۔

کمیت m_1 اور m_2 نیوٹن کا دوسرا کلیہ کو عائد کرنے پر مساوات ہمیں حاصل ہوگی۔

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -Kx \qquad (3.10)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = +Kx \qquad (3.11)$$

مساوات (3.11) کو m_2 سے اور مساوات (3.10) کو m_1 سے ضرب دے کر تفریق (Differentiate) کرنے پر

$$m_1 m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -m_2 Kx - m_1 Kx \qquad (3.12)$$

دوبارہ ترتیب دینے پر

$$\left[\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right] \frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = -Kx \qquad (3.13)$$

اس مساوات میں ہم $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ کو تحویل شدہ کمیت (Reduced Mass) μ سے متعین کرتے ہیں جس کے ابعاد کمیت کے ہوتے ہیں۔
جہاں μ کی کمیت دونوں کمیتیوں سے کم ہوتا ہے اس لیے اس کو تحویل شدہ کمیت کہتے ہے۔ یہ ایک مستقل ہے۔

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad (3.14)$$

مساوات(3.14)کو(3.13)میں درج کرنے پر

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{\mu}x = 0 \qquad (3.15)$$

یہ مساوات ایک جسم کے نظام کی حرکت کو بیان کرتی ہے جیسا کہ شکل(3.6) میں دیکھا جاسکتا ہے۔

اگر $m_1=m_2=m$ ہو تو $\mu = \frac{m}{2}$ ہوتا ہے۔اگر نظام کے کسی ایک جسم کی کمیت بہت چھوٹی ہو تو تحویل شدہ کمیت چھوٹے جسم سے متعلق ہوتی ہے۔

اگر m_1 کی قیمت بہت چھوٹی ہو تو

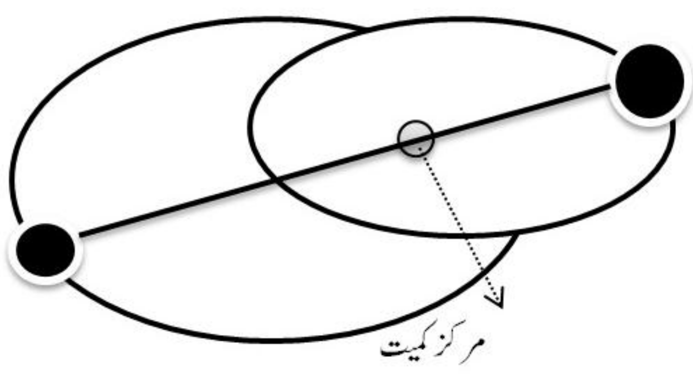
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m_1 \left[\frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\right] \qquad (3.16)$$

$$\mu = m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} \cong m_1\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \qquad (3.17)$$

یہاں $\frac{m_1}{m_2} \cong 0$ ہو تو جب مساوات

$\mu = m_1$ ہوتی ہے

3.9 مرکز کمیت کے حرکت کے کلیات (Motion of Law of Center of Mass)

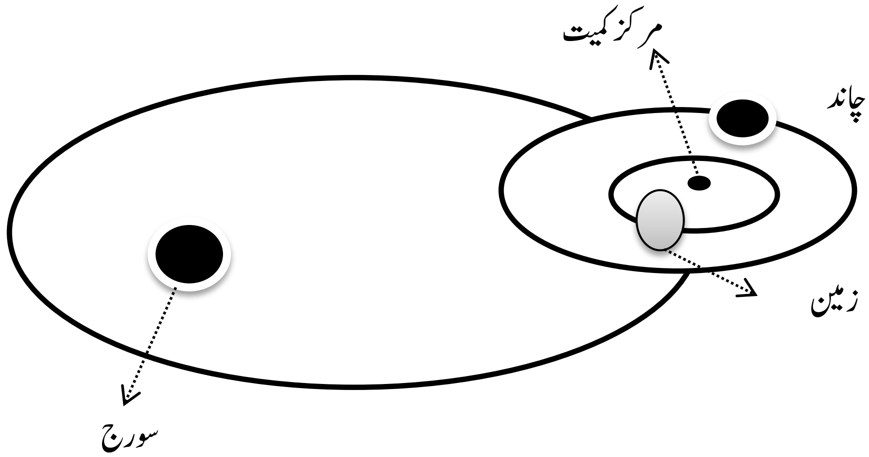


شکل(3.7)

شکل(3.7) میں مرکز کمیت پر پورے نظام کی کمیت کو مرکوز تصور کیا جائے تو مرکز کمیت کی حرکت پورے نظام کی حرکت کو ظاہر کرتی ہے اور نظام پر اثر انداز قوتوں کا مجموعہ مرکز کمیت پر عائد ہوتا ہے۔

کسی بند نظام کے ذرات کا مرکز کمیت ہموار حرکت میں ہوتا ہے۔ یہ ہموار رفتار سے خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔ اسی لیے مجموعی معیار حرکت ہمیشہ مستقل بنتا ہے۔ اور اسراع صفر ہوتا ہے۔

شکل(3.8) میں جسم کی اندرونی قوت اس کے مرکز کمیت کی حرکت کو متاثر نہیں کرتی۔ زمین کے اطراف چاند گردش کرتا ہے لیکن یہ کہنا درست نہیں ہے کہ مشترکہ مرکز کمیت پر زمین چاند کے چاروں طرف گردش کرتی ہے۔ یہاں پر چاند کے مقابلے میں زمین کی کمیت 81 گنا زیادہ ہے چاند کے مرکز کا درمیانی فاصلہ زمین کے مرکز سے $3.84x10^{5}$km ہے۔ زمین کے مرکز سے زمین چاند '6' مرکز کمیت کی قیمت 4700km حاصل ہوتی ہے۔ زمین کا نصف قطر 6370km ان دو قیمتوں سے پتہ چلتا ہے کہ زمین چاند کا مرکز کمیت اور زمین کا مرکز کمیت بہت قریب ہے۔



شکل(3.8)

زمین اور چاند کے نظام کا مرکز کمیت زمین کی حرکت اور چاند کی حرکت پر اثر انداز نہیں ہوتا ہے۔ سورج کی کششی قوت جو کہ بیرونی قوت ہوتی ہے یہ زمین چاند نظام پر اثر انداز ہوتی ہے۔ چاند زمین کا مرکز کمیت سورج کے اطراف مدار میں گردش کرتا ہے۔

3.10 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

دو 3kg کی کمیت رکھنے والے کمیتیں جس کی رفتاریں $V_1 = 2i + 3j m/sec$ اور $V_2 = 4i - 6j m/sec$ ہے تب (a) مرکز کمیت کی رفتار (b) نظام کا مجموعی معیار حرکت (c) مرکز کمیت کی رفتار جب کہ $F = 24i\ N$ کی مستقل قوت 5 سکنڈ کے لیے لگائی ہوتی ہے۔ (d) مرکز کمیت کا مقام جب کہ 5 سکنڈ کے وقفہ سے جسم مبدا سے t=0۔

حل:

(a)مرکز کمیت کی رفتار

مرکز کمیت کی رفتار کی مساوات

$$V_c = \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$$

$$m_1 = m_2 = 3Kg;\ v_1 = 2i + 3j\,\frac{m}{sec}$$

اور

$$V_2 = 4i - 6j\ m/sec$$

$$V_c = \frac{3Kg(2i+3j)ms^{-1}+3Kg(4i-6j)ms^{-1}}{6Kg}$$

$$V_c = 3i - 1.5j\ m/sec$$

(b)نظام کا مجموعی معیار حرکت

نظام کا معیار حرکت نظام کی کمیت x مرکز کمیت کی رفتار

$$MV_c = 6Kg\ (3i - 1.5j)m/sec$$

$$= 18i - 9j\ kg\ m/sec$$

(c) 5 سکنڈ کے وقفے میں عائد کردہ قوت $F = 24i$ کے مرکز کمیت کی رفتار دریافت کرنے کے لیے پہلے مرکز کمیت کی اسراع معلوم کرنا ہوگا۔

$$a_c = \frac{F}{M} = \frac{24iN}{6Kg} = 4ims^{-2}$$

قوت عائد کرنے سے پہلے مرکز کمیت کی رفتار V_c ہوگی۔

$$V_c^1 = (3i - 1.5j)ms^{-1} + (4i)5\ s^1ms^{-2}$$

$$= (3i - 1.5j + 20i)ms^{-1}$$

$$= (23i - 1.5j)ms^{-1}$$

(d) مقامی سمتی مقدار کی مساوات سے $r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

یہاں $r_0=0$ (مبدا پر $t=0$)

$t=5sec$ اور $v_0 = v_c : a = a_c$

$$r = [(3i - 1.5j)ms^{-1}]5 + \frac{1}{2}(4i)25ms^{-2}$$

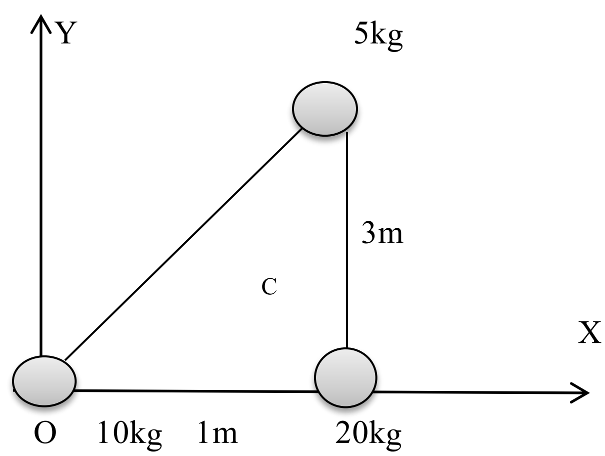
$$= (15i - 7.5j + 50i)m$$

$$= (65i - 7.5j)m$$

قوت جسم کے 5 سکنڈ کے لیے عائد کرنے کے بعد مرکز کمیت کا محور (65m, -7.5m) ہو گا۔

حل شدہ مثال2

شکل (3.9) میں دکھائے گئے مثلث قائم الزاویہ کے کناروں پر واقع تین ذرات کا مرکز کمیت دریافت کرو۔



شکل (3.9) مثلث قائم الزاویہ کے کونوں پر واقع تین کمیتیں

حل:

فرض کرو کہ نظام کے محوروں کا مبدا 10kg کمیت پر واقع ہے۔ تب نظام کے مرکز کمیت c کا x- محور

$$X_{cm} = \frac{10(0)+20(1)+5(1)}{10+20+5} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$$

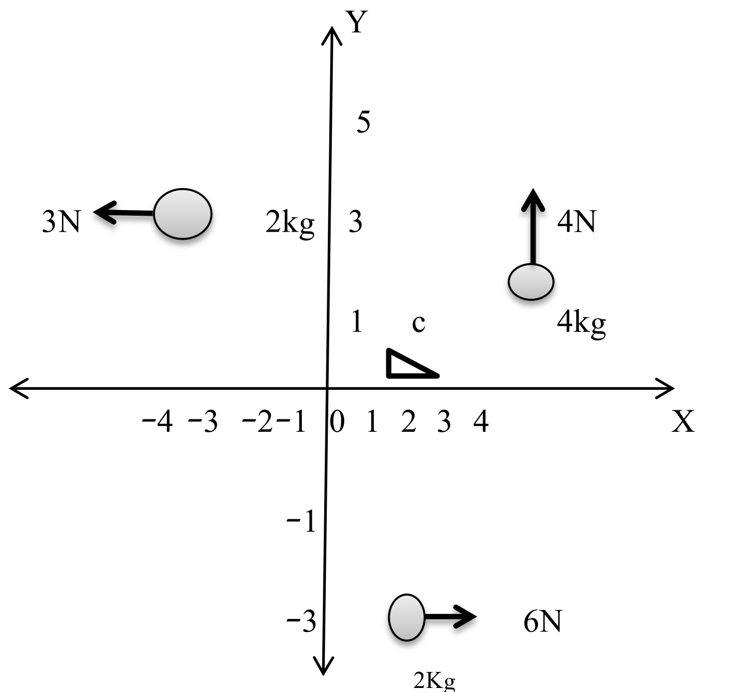
اور نظام کے مرکز کمیت c کا y– محور

$$Y_{cm} = \frac{10(0) + 20(0) + 5(3)}{10 + 20 + 5} = \frac{\cancel{15}}{35} = \frac{3}{7}$$

مرکز کمیت C کے محور $(X_{cm}, Y_{cm}) = \left(\frac{5}{7}, \frac{3}{5}\right)$

حل شدہ مثال 3

جیسا کہ شکل (3.10) میں دکھایا گیا ہے تین ذرات کے ایک نظام پر غور کیجیے جس پر بیرونی قوتیں عمل کر رہی ہیں نظام کے مرکز کمیت کا اسراع معلوم کیجیے۔



شکل (3.10) تین ذرات کا ایک نظام جس پر بیرونی قوتیں کام کر رہی ہیں

حل:

مرکز کمیت C کے محوریں

$$X_{cm} = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{\sum_1^n mi} = \frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$$

$$X_{cm} = \frac{4(4)+2(-2)+2(1)}{4+2+2}$$

$$X_{cm} = \frac{7}{4}$$

$$Y_{cm} = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum_1^n mi} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$Y_{cm} = \frac{4(1) + 2(2) + 2(-3)}{4 + 2 + 2}$$

$$Y_{cm} = \frac{1}{4}$$

$$(X_{cm}, Y_{cm}) = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

محور x–کی سمت میں نظام پر عاملہ قوتوں کے اجزا کا حاصل

$$F_x = 6N - 3N = 3N$$

اور محور y–کی سمت میں قوتوں کے اجزاء کا حاصل

$$F_y = 4N$$

حاصل بیرونی قوت کی مقدار

$$F = \left(F_x^2 + F_y^2\right)^{1/2}$$

$$F = (3^2 + 4^2)^{1/2}$$

$$F = 5N$$

حاصل قوت کا محور x–کے ساتھ بننے والا زاویہ

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{4}{3}$$

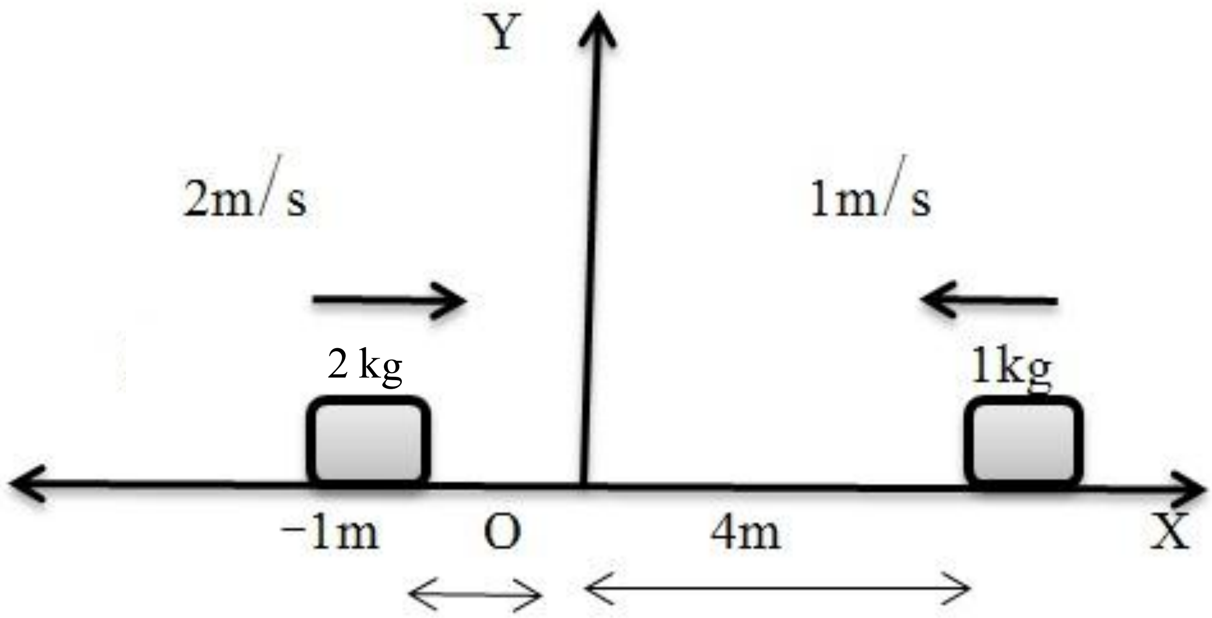
$$\theta = 53^0$$

مرکز کمیت کا اسراع

$$a_{cm} = \frac{F}{M} = \frac{5Kgms^{-2}}{8Kg} = 0.65ms^{-2}$$

حل شدہ مثال4

2kgاور1kg کمیتیوں کے دو اجسام علی الترتیب $2ms^{-1}$اور $1ms^{-1}$ کی رفتاروں سے حرکت کر رہے ہیں اور کسی دیے ہوئے لمحہ پر ان کے مقام شکل (3.11) میں دکھائے گئے ہیں۔(a) مرکز کمیت کا ابتدائی مقام اور اس کی رفتار معلوم کیجیے۔(b) 6 سیکنڈ کے بعد مرکز کمیت کا مقام اور اس کی رفتار محسوب کیجیے۔



شکل(3.11) محور کی سمت میں مجرد کمیتوں کی حرکت

حل:

فرض کرو کہ مرکز کمیت کا ابتدائی مقام (X_{cm}) اور اس کی رفتار V_{cm} ہے۔

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$X_{cm} = \frac{1(4)+2(-1)}{1+2} = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$v_{cm} = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i v_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i} = \frac{1(-1)+2(2)}{1+2} = \frac{-1+4}{3} = {}^{3}/_{3} = 1$$

$$V_{cm} = 1m/sec^2$$

شروع میں مرکز کمیت مبدا سے $\frac{2}{3}$ میٹر کے فاصلے پر تھا اور اس وقت وہ دائیں جانب کی $1ms^{-1}$ رفتار سے حرکت کر رہا تھا۔ چونکہ نظام تنہا ہے۔ تصادم کے بعد بھی مرکز کمیت دائیں جانب سیدھی مستقل چال سے حرکت کرتا ہے۔ اس طرح 6 سکنڈ کے بعد مرکز کمیت کا نقل مکان A_x ہو گا۔

$$\Delta x = V_{cm} \times \Delta t$$

$$\Delta x = 1ms^{-1} \times 6s = 6m$$

اس لیے 6 سکنڈ کے بعد مرکز کمیت کا مقام ہو گا۔

$$(V_{cm})_f = V_{cm} + \Delta x$$

$$= \frac{2}{3}m + 6m$$

$$(V_{cm})_f = 6\frac{2}{3}m$$

اس طرح باوجود اس کے یہ بتانا مشکل ہے کہ تنہاں ذرات کہاں ہیں اور ان کی رفتاریں کیا ہیں، تصادم کے بعد کسی بھی لمحے پر مرکز کمیت کا مقام آسانی سے بتایا جاسکتا ہے۔

3.11 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- کسی جسم کے ذرے کی حرکت کو مختصراً بیان کرنے کے لیے ایک ریاضی عبارت بنائی گئی ہے جیسے مرکز کمیت کہتے ہیں۔
- کسی جسم کا وزن وہ قوت ہے جو ارضی ثقلی کشش کی وجہ سے اس پر عمل کرتی ہے۔
- کسی جسم کی کمیت مستقل رہتی ہے جب کہ اس کا وزن اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کے ساتھ بدلتا رہتا ہے۔
- کسی ذرے کے نظام کی حرکت کا مطالعہ نظام کے مرکز کمیت کے تصور کی مدد سے کیا جاتا ہے۔
- n ذرات پر مشتمل ایک نظام کے مرکز کمیت کا مقام r_{cm} رفتار V_{cm} اسراع a_{cm} حسب ذیل ہیں۔

$$a_{cm} = \frac{\sum_1^n m_i a_i}{\sum_1^n m_i} \qquad V_{cm} = \frac{\sum_1^n m_i v_i}{\sum_1^n m_i} \qquad r_{cm} = \frac{\sum_1^n m_i r_i}{\sum_1^n m_i}$$

- انفرادی قوت تمام ذرات کا مجموعی حاصل قوت کے برابر ہوتا ہے۔

$$Ma_c = \sum_1^n F_i = F_{ext} = F_1 + F_2 + - - - + F_n$$

- بیرونی قوت F کے زیر اثر نظام کا اسراع، مرکز کمیت کے اسراع کے برابر ہوتا ہے۔

$$a_c = \frac{1}{M}\sum_1^n m_i a_i$$

$$F = ma_c$$

3.12 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **نقطی ذرات (Point Particles)** : نقطی ذرات میں ذرات چھوٹے ہوتے ہیں۔
- **سادہ موسیقی حرکت (Simple Harmonic Motion)**: کسی جسم کی حرکت سادہ موسیقی اس وقت کہلاتی ہے جب کہ اس کے نقطہ اعتدال کے گرد اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس پر عمل کرنے والے قوت ہمیشہ اس نقطے کی جانب ہوتی ہے اور کسی بھی نقل مکان کے راست تناسب ہوتی ہے۔
- **مرکز کمیت (Centre of Mass)**: اجسام کی تمام ذرات کی کمیت مرکز پر ہوتی ہے۔
- **ثقلی مرکز (Centre of Gravity)**: کئی متوازی قوتیں زمین کی طرف عمل کرتی ہیں یہ قوتیں متوازی قوتوں کے نظام کی طرح عمل کرنے والے نقطے۔

3.13 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

3.13.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کیا یہ ضروری ہے کہ مرکز کمیت پر کمیت موجود ہو؟
2. خط x- محور پر دو ذرات کے نظام کا مرکز کمیت .... ہے۔
3. مرکز کمیت سے کیا مراد ہے؟
4. نظام کے اندرونی قوتیں .... کی حرکت پر اثر انداز نہیں ہوتیں۔

   a) کششی مرکز　　b) مرکز کمیت　　c) قوت　　d) نقل مکان
5. اپنے سر کے بال کھینچ کر کیا ہم اپنے جسم کی مرکز کمیت بدل سکتے ہیں۔
6. ثقلی مرکز سے کیا مراد ہے؟
7. مرکز کمیت کا مقام .... کی ترتیب پر منحصر ہوتا ہے۔
8. مقامی سمتیے سے کیا مراد ہے؟
9. m_1 اور m_2 کمیت والے دو ذرات محور x کے نقاط x_1 اور x_2 پر موجود ہیں۔ ان ذرات کے مرکز کمیت کی مساوات .... ہے۔

10. nذرات پر مشتمل ایک نظام کے مرکز کمیت کی رفتار کا ضابطہ Vcm = ... ہیں۔

3.13.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مرکز کمیت کے خصوصیات لکھیے۔

2. مرکز کمیت اور ثقلی مرکز میں فرق کو واضح کیجیے۔

3. مرکز کمیت کے تحویل شدہ کمیت پر ایک نوٹ لکھیے۔

3.13.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ذرات کے کسی نظام کے مرکز کمیت کی تعریف کیجیے۔ بیرونی قوتوں کی موجودگی میں نظام کے مرکز کمیت کے مقام رفتار اور اسراع اور قوت کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔

3.13.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. دو کرے جن کی کمیتیں 8kg،4kg ہیں۔ ترتیب وار 3m/sec،2m/sec کی رفتاروں سے ایک ہی سمت میں متحرک ہیں۔ ان کے مرکز کمیت کی رفتار معلوم کرو۔

2. تین ذرات جن کی کمیتیں $m_1=2kg$، $m_2=3kg$، $m_3=5kg$ ہیں، ایک میٹر ضلع کے ایک مثلث مساوی الاضلاع کے کونوں پر واقع ہے۔ مرکز کمیت کے مقام کا تعین کیجیے۔

3. Hcl سالمے کا مرکز کمیت دریافت کیجیے، جس کے جوہروں کا درمیانی فاصلہ $1.8x10^{-10}m$ ہے۔ (H) ہائیڈروجن اور کلورین (cl) کے جوہری وزن علی الترتیب 1amu اور 35.5amu ہیں نظام کی تحویل شدہ کمیت دریافت کیجیے۔

4. دو ذرات جن کی کمیتیں 3kg،1kg ہیں ان کی رفتاریں ترتیب وار (10i-7j-3k) اور (7j+9j+6k) ہیں۔ ان کے لحاتی مقامی سمتیے ترتیب وار (2i+5j+13k) اور (7i+9j+6k) ہوا ہو کے مرکز کمیت کی لحائی رفتار اور لحماتی مقامی سمتیہ معلوم کرو۔

3.14 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. College Physics by Sears.F.W.& Zemansky.M.W. Wesley Publishing Co.Inc.London

2. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta Dhanpat Rai Publications

3. Mechanics by Kittel,M.C.Graw Hill

4. Mechanics by Mathur .D.S,S.Chand Publication
5. Modern College Physics by White.H.E. East West Press Pvt.Ltd New Delhi
6. Physics by Zafiratos.C, John wesiey &Sons. Inc. New York
7. Physics Matter Energy and Univers by Hruwell G.P.&Legge.G.J.F. East West Press Pvt.Ltd.New Delhi
8. Physics Part I by Resnik.R &Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi
9. Physics the pioneer science Vol.I by Taylor .L.W. Dover Publication
10. UnifiedPhysicsVol−I, Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath &Co.Meerut

اکائی 4۔ عام تفرقی مساواتیں

(Ordinary Differential Equations)

اکائی کے اجزا

4.0 تمہید
4.1 مقاصد
4.2 عام تفرقی مساواتیں
4.2.1 پہلے رتبے اور پہلے درجے کی عام تفرقی مساواتیں
4.2.1.1 متغیر جداپذیر کی تفرقی مساواتیں
4.2.1.2 خطی تفرقی مساواتیں
4.3 اعلا رتبہ کی عام تفرقی مساواتیں
4.3.1 اصول انطباق تفرقی مساواتیں
4.3.2 دوسرے رتبے کی مستقل سروں والی متجانس تفرقی مساواتیں
4.3.3 دوسرے رتبہ کی غیر یکساں تفرقی مساواتیں
4.4 حل شدہ مثالیں
4.5 اکتسابی نتائج
4.6 کلیدی الفاظ
4.7 نمونہ امتحانی سوالات
4.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
4.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
4.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
4.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات
4.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

4.0 تمہید (Introduction)

طبیعیات میں تفرقی مساواتیں (Differential Equations) اہم رول ادا کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات کی مدد سے کئی طبیعی نظام کی حرکیات کو سمجھایا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک مرتعش (Vibrating) اسپرنگ کی حرکت اور راکٹ کی حرکت کو سمجھانے کے لیے الکٹروڈائنامکس کی جدید مساوات جیسے شروڈنگر مساوات اور میکس ویل (Maxwell) مساوات کی ضرورت پیش آتی ہے۔ تب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ تفرقی مساوات کیا ہے؟

تفرقی مساوات' ایک مساواتوں کی مجموعہ ہیں جو مشتق (Derivatives) پر مشتمل ہوتی ہے۔

(a) بنیادی طور پر تفرقی مساوات کو دو قسموں میں بانٹا جاتا ہے، جنہیں عام تفرقی مساوات اور جزوی (Partial) تفرقی مساوات کہا جاتا ہے۔

یہاں ہم عام تفرقی مساوات استعمال میں لائیں گے۔ آپ کی اطلاع کے لیے یہ بتانا ضروری ہے کہ جزوی تفرقی مساوات وہ مساوات ہیں جو دو یا زیادہ غیر منحصر متغیر (Independent Variable) کے مشتق پر مشتمل ہوتی ہیں۔ جب کہ عام تفرقی مساوات عام مشتق پر مشتمل ہوتی ہیں۔ یعنی سنگل غیر منحصر متغیرہ کے ساتھ والے ڈیری ویٹیوز۔

یہ غیر منحصر متغیرہ اور ان کے مشتق کے درمیان کے رشتے کو ظاہر کرتا ہے۔ آنے والے سیکشن میں ہم عام تفرقی مساوات کا ترتیب (رسمی طور) سے تعارف کرائیں گے۔

4.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم طبیعیات میں استعمال ہونے والے عام تفرقی مساوات پر بحث کریں گے۔ یہاں پر ہمارا مقصد عام تفرقی مساواتیں کے اہم اقسام جیسے پہلا رتبہ اور پہلا رتبہ کی عام تفرقی مساواتیں اور اس کو حل کرنے کے مختلف طریقوں کو حاصل کرنا ہے۔ اس طرح ہم اعلا درجوں کی عام تفرقی مساواتوں پر بھی غور کریں گے۔ خاص طور پر

i. دوسرے رتبے کی مستقل سروں والی متجانس تفرقی مساواتیں۔

ii. دوسرے رتبے کی غیر یکساں تفرقی مساواتیں ۔

4.2 عام تفرقی مساواتیں (Ordinary Differential Equations)

ایک عام تفرقی مساوات (ODE) کسی تفاعل y(x) اور اُس کے مشتق(Derivatives) کے درمیان کے رشتے کو بتاتی ہے۔

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} = y^n(x) \tag{4.1}$$

عام تفرقی مساوات کو عام طور پر اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$F\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots y^{(n)}\right) = 0 \qquad (4.2)$$

یہاں پر 'n' کو عام تفرقی مساوات کا رتبہ کہتے ہیں۔

کسی مساوات میں آنے والے سب سے اعلا مشتق(Higher Derivatives) کے رتبے کو عام تفرقی مساوات کا رتبہ (Order) کہتے ہیں۔

یہاں ایک اور اہم بات پر بھی غور کرنے کی ضرورت ہیں وہ یہ ہے عام تفرقی مساوات کی ڈگری ہائیسٹ آرڈر مشتق کا پاور درجہ یا ڈگری ہوتا ہے۔ نیچے مساوات میں رتبہ اور درجہ کی مثالیں دی گئی ہے۔

مثال کے طور پر

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (4.3)$$

آرڈر یا رتبہ $= 2$، ڈگری یا درجہ $= 3$

ایک n^{th} رتبہ عام تفرقی مساوات کی عام شکل اس طرح لکھی جا سکتی ہے۔

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + a_3(x)\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \cdots \dots\dots\dots + a_{n-1}(x)\frac{d^1y}{dx^1} + a_n(x)y = f(x) \qquad (4.4)$$

یہاں پر $a_0(x)$ ' $a_1(x)$ کو مساوات کی سروں (Coefficients of Equation) کہتے ہیں جب کی f(x) غیر یکساں رکن (Term) کہلاتی ہے۔

اگر $f(x) = 0$ یکساں تفرقی

اور $f(x) \neq 0$ غیر یکساں تفرقی

اگر ضربیہ $a_n(x)$ پر منحصر ہے تو وہ تغیرہ (Variables) کہلائیں گے ورنہ وہ مستقل کہلاتے ہیں۔

4.2.1 پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی عام تفرقی مساواتیں

(Differential Equations of First Order and First Degree)

یہ ایسی مساوات ہوتی ہے جس میں صرف $\frac{dy}{dx}$ موجود ہوتا ہے یعنی پہلا رتبہ کی عام تفرقی مساوات کسی x یا y کے فنکشن کا مساوی ہوتا ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \qquad (4.5)$$

اوپر دیے گئے مساوات کا رتبہ ایک ہے، چنانچہ یہ ایک پہلے رتبے اور پہلے درجے کی عام تفرقی مساوات ہے۔ طبیعات میں کئی طرح کے پہلا آرڈر پہلا ڈگری عام تفرقی مساوات استعمال ہوتے ہیں۔ اب ہم ان مساوات کے حل پر تفصیلی بحث کریں گے۔

4.2.1.1 متغیر جداپذیر کی تفرقی مساواتیں (Variable Seperable of Differential Equations)

ایک متغیر جداپذیر کی تفرقی مساواتوں کو اس طرح سے لکھا جائے گا۔

$$\frac{dy}{dx} = F(x)g(y) \qquad (4.6)$$

اوپر دی گئی مساوات میں f(x) اور g(y)، x اور y کے علاحدہ تفاعلی (Functional) ہے یا وہ مستقل ہوں گے ۔ مساوات (4.6) کو اس طرح سے لکھیں گے جیس ے کہ x پر منحصر ٹرمس مساوات کی ایک طرف اور y پر منحصر ٹرمس مساوات کے دوسری طرف ہو گئی، یعنی ہم ان کو الگ کریں گے اور پھر ان کو تکمل (Integrated) کریں گے۔

$$\int \frac{dy}{gy} = \int F(x)\, dx \qquad (4.7)$$

اوپر دی گئی مساوات کو حل کرنے کے ہم دونوں Integral کو معلوم کریں گے۔ عام طور پر ایک پہلے رتبے کی تفرقی مساوات کا حل، ایک بار انٹی گریشن (Integration) کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور اس میں ایک انٹی گریشن کا مستقل ہوتا ہے۔ آیئے ایک مثال دیکھتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = x + xy \qquad (4.8)$$

R.H.S فیکٹرز $\qquad \frac{dy}{dx} = x(1 + y)$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int x\, dx \Rightarrow ln(1+y) = \frac{x^2}{2} + c \qquad (4.9)$$

$$1 + y = exp\left(\frac{x^2}{2} + c\right) \qquad \text{C آربیٹری مستقل}$$

$$y = 1 - exp\left(\frac{x^2}{2} + c\right) \tag{4.10}$$

4.2.1.2 خطی تفرقی مساواتیں (Linear Differential Equations)

پہلا رتبہ کی خطی تفرقی مساوات طبیعیات میں استعمال ہونے والے تفرقی مساوات کی ایک خاص قسم (جماعت) ہے اور اس کی سب سے عام شکل اس طرح ہوتی ہے۔

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{4.11}$$

اب فرض کیجیے کہ ایک فنکشن $\mu(x)$ ہے، جسے انٹی گریٹنگ فیکٹر کہتے ہے۔ اس فنکشن $\mu(x)$ کی مدد سے ہم مساوات (4.11) کو حل کریں گے۔ $\mu(x)$ کو مساوات (4.11) سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)y = \frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x) \tag{4.12}$$

اس مساوات کو انٹی گریٹ کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dy \tag{4.13}$$

اب ہم انٹی گریٹنگ فیکٹر $\mu(x)$ کی مقدار کو مساوات (4.12) سے حاصل کریں گے۔

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu\frac{dy}{dx} + \mu py \tag{4.14}$$

اس مساوات (4.14) میں ایک جیسی دکھنے والی ٹرمس کا مقابلہ (Compare) کریں گے تو ہمیں حاصل ہو گا

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)P(x) \tag{4.15}$$

اس مساوات (4.15) کو انٹی گریٹ کرنے پر

$$\mu(x) = exp\left[\int p(x)dx\right] \tag{4.16}$$

اب ہم اس طریقے کار کو ایک مثال کے ذریعے سمجھائیں گے۔

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \tag{4.17}$$

$$\mu(x) = exp\left[\int 2xdx\right] \tag{4.18}$$

مساوات (4.18) کو انٹی گریٹنگ کرنے پر

$$\mu(x) = exp(x^2) \quad (4.19)$$

مساوات(4.17)سے(4.18)کو ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہو گا۔

$$y.exp(x^2) = 4\int x.exp(x^2)dx \quad (4.20)$$

مساوات(4.20) انٹی گریٹنگ کرنے پر

$$y.exp(x^2) = 2.exp(x^2) + c \quad (4.21)$$

$$y = 2 + cexp[-x^2]$$

4.3 اعلا رتبے کی عام تفرقی مساواتیں (Higher Order Ordinary Differential Equations)

اب تک ہم نے پہلے رتبہ یا فرسٹ آرڈر عام تفرقی مساواتیں پر بحث کی، آیئے اب ہم دوسرے اور اس سے زیادہ یا اعلا رتبہ کی عام تفرقی مساواتیں اور ان کے حل پر بحث کرتے ہیں۔ اس سے پہلے ہم ایک اہم اصول، اصولِ انطباق پر بحث کریں گے جس کا اعلا رتبہ کی عام تفرقی مساوات کو حل کرنے میں استعمال ہوتا ہے۔

4.3.1 اصول انطباق تفرقی مساواتیں (Superposition Differential Equations)

کسی بھی اعلی رتبہ(Higher Order) تفرقی مساوات کے ایک سے زیادہ حل ہوتے ہیں۔

ایک عام خطی عام تفرقی مساوات جس کا رتبہ n ہے اس کو اس طرح لکھا جائے گا۔

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + a_3(x)\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \cdots \dots\dots\dots + a_{n-1}(x)\frac{d^1y}{dx^1} + a_n(x)y = 0 \quad (4.22)$$

اس مساوات کے 'n' خطی غیر منحصر حل ہوتے ہے، ان سب حلوں کا مجموعہ خطی انطباق بھی ایک ہی حل ہو گا۔ فرض کیجیے کہ $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots\dots\dots . y_n(x)$ مساوات(4.22) کا حل ہے تو ان کا خطی یکجائی (Linear Cobination)اس طرح ہوتا ہیں۔

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots \dots\dots\dots\dots . + c_ny_n(x) \quad (4.23)$$

'n' حل کا مجموعہ یا خطی یکجائی کہلائے گا اور یہ بھی مساوات(4.22)کے حل ہو گا۔

کسی بھی تفاعل یا حل کے خطی غیر منحصر(Linear Independent) کے لیے ضروری ہے کہ

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . + c_ny_n(x) = 0 \qquad (4.24)$$

اور یہ مساوات صفر(0)ہو گی جب

$$C1 = C2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = C_n = 0$$

آگے آنے والے تراش(سیکشن) میں مختلف اقسام کے دوسری رتبہ کی تفرقی مساوات پر بحث کریں گے۔

4.3.2 دوسرے رتبہ کی مستقل سروں والی متجانس تفرقی مساواتیں

(Second Order Homogeneuose Equation with Constant Coefficent)

ایک دوسرے رتبہ کی مستقل سروں والی متجانس عام تفرقی مساواتیں پر غور کیجیے، جس کو معیاری شکل میں اس طرح لکھا جائے گا۔

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_0\frac{dy}{dx} + q_0y = 0 \qquad (4.25)$$

جہاں P_0 اور Q_0 مستقل ہے۔ اوپر دی گئی مساوات کو حل کرنے کے لیے ہم خصوصیات مساوات کے طریقے کو استعمال کریں گے۔ مساوات(4.25) کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$(D^2 + p_0D + q_0)y = 0 \qquad (4.26)$$

یہاں D ایک قطعی آپریٹر ہے جو $D = \frac{d}{dx}$ کے مساوی ہے۔

مساوات(4.26) میں بریکٹ کے اندر والی مقدار کو صفر کے مساوی کیا جانے پر حاصل ہونے والی الجبریک مساوات ہو گی

$$D^2 + p_0D + q_0 = 0 \qquad (4.27)$$

اور اسے مددغار(Auxilary) یا کیریکٹرسٹک مساوات کہتے ہیں۔ اس الجبریک مساوات (4.27) کو حل کرنے سے ہمیں دوسرے رتبہ ODE کا حل حاصل ہو گا۔ آیئے اب مساوات (4.27) کو حل کرنے کی ترکیب دیکھتے ہیں۔ مساوات (4.27) کی شکل کے الجبریک مساوات کے روٹس تین اقسام کے ہوتے ہیں۔

i. حقیقی اور غیر مساوی

ii. حقیقی اور مساوی

iii. مخلوط-زون(کامپلکس-کانجوگیٹ)جوڑی

پہلا کیس(i): روٹس حقیقی اور غیر مساوی

فرض کیجیے کہ 'a' اور 'b' مساوات(4.27) کے روٹس ہیں، تب ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$(D - a)(D - b)y = 0 \qquad (4.28)$$

$$(D - a)y_1 = 0, (D - b)y_2 = 0 \qquad (4.29)$$

$$Dy_1 = ay_1 \qquad (4.30)$$

$$Dy_2 = by_2 \qquad (4.31)$$

اوپر دیے گئے دو مساواتوں سے ہم دیکھ سکتے ہے کہ کس طرح ایک دوسرے رتبے کی مساوات 'دو پہلا رتبہ (First Order) کی مساواتوں میں تبدیل ہو گئی۔ اب ہم پچھلے سیکشن میں پہلا رتبہ خطی تفرقی مساوات کے حل کے استعمال سے مساوات (4.30) اور (4.31) کو حل کریں گے۔ (4.30) اور (4.31) اس طرح لکھیں گے

$$y_1 = c_1 e^{ax} \;\; ; y_2 = c_2 e^{bx} \qquad (4.32)$$

اب سب سے عام یا عمومی حل اوپر دیے گئے دو خطی غیر منحصر (Linear Independent) حلوں y_1 اور y_2 کا خطی یکجائی (Linear Cobination) ہو گا

$$y = y_1 + y_2 \qquad (4.33)$$

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx} \qquad (4.34)$$

y مساوات (4.25) کا حل ہے جب روٹس حقیقی اور غیر مساوی ہوں

دوسرا کیس (ii) : جب روٹس حقیقی اور مساوی

دونوں روٹس مساوی ہے یعنی a = b ایسی صورت میں

$$(D-a)(D-a)y = 0 \qquad (4.35)$$

اس صورت کا حل ہو گا $y_1 = c_3 e^{ax}$

دوسرے خطی غیر منحصر حل کو معلوم کرنے کے لیے فرض کیجیے کہ

$$(D-a)y_2 = u \qquad (4.36)$$

اس مساوات کے استعمال سے مساوات (4.35) بن جائے گا

$$(D-a)u = 0 \qquad (4.37)$$

اب اوپر دیے گئے مساوات ایک پہلا رتبہ عام تفرقی مساوات ہے اور اس کا حل ہو گا

$$u = c_4 e^{ax} \qquad (4.38)$$

اگر ہم اب 'u' کو مساوات (4.36) میں قائم مقام (درج) کریں گے تو

$$(D-a)y_2 = c_4 e^{ax} \qquad (4.39)$$

$$(Dy_2 - ay_2) = c_4 e^{ax} \qquad (4.40)$$

اب یہ مساوات بھی ایک ہی پہلا رتبہ عام تفرقی مساوات ہے اور قطعی پہلا رتبہ عام تفرقی مساوات کے حل کی مدد سے حل ہو گا

$$y_2 = [c_5 x + c_6]e^{ax} \tag{4.41}$$

اس طرح مساوات(4.26)کا عمومی حل(General Solution)ہو گا

$$y = y_1 + y_2 \tag{4.42}$$

$$y = c_3 e^{ax} + (c_5 x + c_6)e^{ax} \tag{4.43}$$

$$y = (Mx + N)e^{ax} \tag{4.44}$$

جہاں پر متغیرہ کا تعارف اس طرح کیا گیا ہے۔

$$M = C_{5c} \quad ; N = c_3 + c_6 \tag{4.45}$$

تیسرا کیس(iii): مخلوط-زون(کامپلکس-کانجوگیٹ)جوڑی

اس کا حل کیس (i) کی طرح ہی معلوم کریں گے، سوائے اس کے b = a* یعنی 'a' 'b' کا مخلوط-زون(کامپلکس-کانجوگیٹ) ہو گا۔

4.3.2 دوسرے رتبے کی غیر یکساں تفرقی مساواتیں

(Second Order Non-homgeneous Differential Equations)

ایک دوسرے رتبے کی غیر یکساں تفرقی مساواتیں جس کی مستقل سروں ہے کی معیاری شکل(Standard Form)اس طرح ہو گی۔

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_0\frac{dy}{dx} + q_0 y = f(x) \tag{4.46}$$

اوپر دی گئی مساوات کو حل کرنے کا طریقہ ہے۔ہم متواتر تکمیلی (Successive Integration)کے طریقے کو استعمال کریں گے جو سابقہ سیکشن (4.3.2)میں استعمال کیے گئے طریقے کے مماثل (Similar) ہے۔ مساوات (4.46) کے لیے مخصوص (Specific)مساوات اس طرح ہو گی۔

$$(D^2 + p_0 D + q_0)y = f(x) \tag{4.47}$$

فرض کیجیے کہ 'a' اور 'b' مساوات(4.47)کے روٹس ہے، تب

$$(D - a)(D - b)y = f(x)$$

$$(D - a)u = f(x) \tag{4.48}$$

جہاں ہم نے مانا ہے

$$(D - b)y = u \tag{4.49}$$

اس طرح اب ہمارے پاس دو پہلی رتبہ عام تفرقی مساواتیں ہیں جنہیں ہم آسانی سے حل کرسکتے ہیں۔ مساوات (4.48) کو (4.2.1.2) میں دیے طریقے سے حل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$u\left(e^{bx}\int f(x)e^{-ax}dx + c_1e^{ax} = \bar{G}(x)\right) \qquad (4.50)$$

اوپر حاصل ہونے والی 'u' کی مقدار کو مساوات (4.49) میں قائم مقام کو درج کرکے، حل کیا جائے تو ہمیں حاصل مساوات $y(x)$ ہوں گی:

$$y(x) = e^{bx}\int \bar{G}(x)e^{-bx}dx + c_2e^{bx} \qquad (4.51)$$

یہ مساوات (4.46) کا مطلوبہ حل ہے، متواتر تکمیلی کی مدد سے کسی بھی دوسرے رتبے کی غیر یکساں تفرقی مساوات کا حل معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اگر f(x) کی شکل پیچیدہ ہو تو اس طریقے کو استعمال کرنا مشکل ہوتا ہے۔

تفرقی مساواتوں کے اطلاقات (Applications of Differential Equations)

تفرقی مساواتوں کے اطلاقات، میکانیات، حرحرکیات، امواج، اہتزاز، برقی مقناطیات وغیرہ میں ہوتے ہیں۔ عام تفرقی مساوات کی چند مثالیں مندرجہ ذیل ہیں۔

i. نیوٹن کے دوسرے کلیے کی مساوات
ii. سادہ موسیقی حرکت کی مساوات
iii. برنولی کی مساوات
iv. ایل سی آر سرکٹ کی مساوات
v. ایک ابعادی شراڈنگر (Schrodinger) کی تفرقی مساوات

4.4 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

$e^{\frac{dy}{dx}} = (x+1)$ تفرقی مساوات کو حل کیجیے۔ جہاں y=3 اور x=0

حل: $e^{\frac{dy}{dx}} = (x+1)$

اس مساوات کو log عمل کریں

$$\frac{dy}{dx} = \log_e(x+1)$$

متغیر کو الگ کریں، تب

$$dy = \log_e(x+1)dx$$

$$\int dy = \int 1.\log_e(x+1)\,dx$$

$$y = x\log_e(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx + c$$

C تکمیلی مستقل ہے

$$y = x\log_e(x+1) - \int \frac{(x+1)-1}{x+1}dx + c$$

$$y = x\log_e(x+1) - \int \frac{(x+1)}{x+1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx + c$$

$$y = x\log_e(x+1) - x + log_e(x+1) + c$$

$$y = (x+1)\log_e(x+1) - x + c$$

جہاں $y = 3$, $x = 0$ پر $c = 3$

$$y = (x+1)\log_e(x+1) - x + 3$$

حل شدہ مثال2

$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$ تفرقی مساوات کو حل کیجیے۔

حل:

$$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$$

یہ مساوات یکساں تفرقی مساوات ہے

تب y=vx کو درج کرے

$$\frac{dy}{dx} = V + x\frac{dv}{dx}$$

$$x\left(v + \frac{dv}{dx}\right) - vx = \sqrt{x^2 + v^2x^2}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} - v = \sqrt{1 + v^2}$$

ان مساوات کو تکمیل کیا جائے

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\log_e\left[v + \sqrt{1 + v^2}\right] = \log_e x + \log c$$

جہاں c تکمیل مستقیل ہے

$$v + \sqrt{1 + v^2} = cx$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = cx$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$$

4.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اغراض:

- اس اکائی کو مکمل کر لینے کے بعد آپ اس قابل بن جائیں گے کہ طبیعیات میں استعمال ہونے والے عام تفرقی مساواتوں کو اخذ کر سکیں گے اور عام تفرقی مساوات کے اہم اقسام جیسے پہلا رتبہ کی تفرقی مساواتوں اور اس کو حل کرنے کے مختلف طریقوں کو سیکھ چکے ہوں گے۔ اس طرح سے آپ اعلا رتبہ کی عام تفرقی مساواتوں کو بھی حل کر سکیں گے۔ خاص طور پر:

i. پہلا رتبہ کی تفرقی مساواتیں جیسے کہ متغیر جداپذیر کی تفرقی مساواتیں اور خطی مساواتیں۔
ii. دوسری رتبہ کی یکساں تفرقی مساواتیں۔
iii. دوسری رتبہ کی غیر یکساں تفرقی مساواتیں۔

خلاصہ:

- تفرقی مساوات ایسی مساوات ہوتی ہے جس میں ڈیریویٹیوس(Derivatives)ہوتاہیں۔
- تفرقی مساوات میں سب سے اعلا (Highest) مشتق کے رتبہ(Order) کی بنیاد پر انہیں پہلے، دوسرے یا اعلا رتبہ کی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔
- عام تفرقی مساوات(ODE)ایسی مساوات ہوتے ہے جس میں عام مشتق ہوتے ہے یعنی واحد غیر منحصر تغیر کے مشتق ۔
- ایسی تفرقی مساوات جو صفر کے برابر ہو اسے یکساں تفرقی مساوات کہتے ہیں جب کہ اگر وہ کسی فنکشن f(x) کے برابر ہو تو اسے غیر یکساں غیر تفرقی مساوات کہتے ہیں۔
- اس اکائی میں ہم نے دو طرح کے پہلے رتبہ مشتق(فرسٹ آرڈر) کے عام تفرقی مساوات پر نظر ڈالی۔
- متغیر جداپذیر کی تفرقی مساواتیں:۔ایسی مساوات کو حل کرنے کے لیے پہلے ہم متغیر کو الگ کریں گے اور پھر انہیں تکملہ کریں گے۔
- پہلے رتبہ کی خطی عام تفرقی مساوات:۔جس کا حل ہم انٹی گریٹنگ فیکٹر طریقے سے معلوم کرتے ہیں۔
- اعلیٰ رتبہ کی تفرقی مساواتیں : اعلیٰ رتبہ کی تفرقی مساوات کے ایک سے زیادہ حل ہوتے ہیں اور ان حل کا خطی یکجائی (Combination) بھی ایک حل ہوتا ہے،اسے اصول انطباق یا سوپر پوزیشن پرنسپل کہتے ہیں۔
- دوسرے رتبہ کے عام تفرقی مساوات کو حل کرنے کے لیے ہم نے مخصوص مساوات(Specific Equations) کے طریقے کا استعمال کیا جہاں عام تفرقی مساوات کو ایک الجبریک مساوات میں تبدیل کیا جاتا ہے۔اس طرح ایک دوسرے رتبہ عام تفرقی مساوات پہلا رتبہ کے عام تفرقی مساوات میں تبدیل ہو جاتا ہے اور ان کا حل آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

4.6 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **مشتق:** ڈیری ویٹیو یا مشتق کسی شئے منحصر متغیر (Dependant Variable) میں کسی دوسری شئے غیر منحصر متغیر (Independent Variable) کے حساب سے ہونے والا بدلاؤ کی پیائش کرتا ہے۔مثال کے طور پر رفتار(Velocity)وقت کے ساتھ مقام میں بدلاؤ کی پیائش کرتا ہے۔
- **آرڈر یا رتبہ:** کسی مساوات میں ظاہر ہونے یا آنے والا سب سے اعلیٰ(Highest) مشتق ۔
- **ڈگری یا درجہ:** کسی بھی مساوات میں سب سے اعلیٰ رتبہ کے مشتق(ڈیریکیٹو) کی طاقت جب مساوات میں مکمل طاقت

(Integerpower)ہو۔

- **قطعی مساوات:** ایسی مساوات جس میں ہر شے ٹرم یا تو مستقل ہوتی ہے یا مستقل اور متغیر (Variable) کا ضرب ہوتی ہے۔
- **سوپر پوزیشن:** اعلیٰ رتبہ کے عام تفرقی مساوات کے مختلف حل کا یکجائی (Combination) بھی اس مساوات کا ایک حل ہوتا ہے۔

4.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کسی تفرقی مساوات میں آنے والے سب سے اعلا رتبہ کا عام تفرقی مساوات کو.. ... ... کہتے ہیں۔
2. عام تفرقی مساوات کی ڈگری سے کیا مراد ہے؟
3. عام تفرقی مساوات کے رتبہ سے کیا مراد ہے؟
4. قطعی مساوات کی تعریف کرو۔
5. سوپر پوزیشن سے کیا مراد ہے؟
6. $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{3dy}{dx} + y$ مساوات کا آرڈر... ... ... ہے۔

   (a) 0 (b) 1 (c) 4 (d) 3
7. اصول الطباق کی تعریف کیجیے۔
8. مساوات $\frac{dy}{dx} + Ay = f(x)$ کے ہوموجینس ہونے کی شرط..... ... ... ہے۔

   $f(x) = 1$ (a) $f(x) = 0$ (b) $f(x) \neq 0$ (c) $f(x) > 0$ (c)
9. کسی دوسری رتبہ کی یکساں تفرقی مساوات کے.. ... ... حل ہوتے ہیں۔

4.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. انٹی گریٹنگ فیکٹر کو معلوم کیجیے۔
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 x = 0$ کلاسیکلی سادہ موسقی اہتزازیہ کے مساوات کو حل کریں۔
3. ایک طبیعیات یہ رتبہ دی گئی تفرقی مساوات کے مطابق کام کرتا ہے۔ $\frac{dF}{dt} = -\lambda F, F(t = 0) = F_0$، دیے گئے ابتدائی شریعت کی مدد سے $F(x)$ کو معلوم کیجیے۔

4.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. عالی حد گی متغیر(سپریشن آف ویریابلس) کے ذریعے $\frac{dy}{dx} - xy^2 = 0$ کو حل کیجیے۔
2. عالی حد گی متغیر(سپریشن آف ویریابلس) کے ذریعے $\frac{dy}{dx} - xy^2 = 0$ مساوات کو حل کیجیے۔
3. $\frac{dy}{dx} - y\,cot\,x + csc\,x = 0$ تفرقی مساوات کو حل کیجیے۔

4.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات(Solved Answer Type Questions)

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ مساوات کو حل کیجیے۔
2. $\frac{d^2}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + ay = 0$ مساوات کو حل کیجیے۔
3. $\frac{d^2}{dx^2} - 2y^4 + y = 2\,cos\,x$ مساوات کو متواتر تکمیلی کے ذریعے حل کیجیے۔

4.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. College Physics by Sears. F.W. & Zemansky. M.W. Wesley Publishing Co. Inc. London
2. Engineering Physics by R.K.Gaur & S.L.Gupta, Dhanpat Rai Publications
3. Introduction to Mathematical Physics,Charlic Harper, Prientice Hall of India
4. Mathematical Method for Engineering and scientist, K.L.Tang, Springe
5. Mathematical Method for Physics and Engineering, Combridge University Press, K.F.Riley, M.P.Hobson and S.J.Bence
6. Mechanics by Kittel, M.C.Graw Hill
7. Mechanics by Mathur .D.S, S.Chand Publication
8. Technical Physics by Bueche.F, Harper & Row Publication, New York
9. Unified Physics Vol-I, Mechanics by Dr.S.L.Gupta & Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath & Co.Meerut

اکائی 5۔ معیار حرکت اور توانائی

(Momentum and Energy)

اکائی کے اجزا

5.0 تمہید

5.1 مقاصد

5.2 خطی معیار حرکت

5.2.1 خطی معیار حرکت کا بقائے

5.2.2 بقائے زاویائی معیار حرکت

5.3 کام اور توانائی

5.3.1 کام اور توانائی کا تھیورم

5.4 حل شدہ مثالیں

5.5 اکتسابی نتائج

5.6 کلیدی الفاظ

5.7 نمونہ امتحانی سوالات

5.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

5.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

5.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

5.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

5.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

5.0 تمہید (Introducton)

کسی بھی حرکت کرنے والی شے (Object) کے ساتھ جوڑی ہوئی چند خاصیت (Properties) ہوتی ہیں۔ مثال کے طور پر رفتار ' اسراع۔ جب کہ چند خصوصیت اس شے کی ذاتی یا موروثی (Inherent) ہوتی ہے جیسے کہ اس کا ماس' پوزیشن یا بالقوہ توانائی ۔ جب شے پر کوئی قوت عمل میں آتی ہو وہ حرکت کرتا ہے جسے ہم حرکت کہتے ہیں۔ حرکت نیوٹنس کہ کلیوں کے تعین چلتی (Newton's Law of Motion) ۔ نیوٹن کے دوسرے کلیے کے مطابق کسی بھی شے پر عمل میں آنے والی جملہ قوت اس کے اسراع اور ماس کے ضرب کے برابر ہو گا یعنی یہ کسی شے کی کمیت' اسراع اور فورس کے درمیان رشتہ بتاتا ہے۔ یہاں پر ہم سوال پوچھ سکتے ہیں کہ کیا ماس اور رفتار کے درمیان بھی اس طرح کوئی رابطہ ہو سکتا ہے کیا؟ جواب ہے ہاں' رفتار اور ماس ایک دوسرے سے معیار حرکت (Momentum) سے جڑے ہوئے ہیں۔ کسی شے کی کمیت (Mass) اور حرکت (Velocity) کے ضرب (Product) کو معیار حرکت کہتے ہیں۔ آنے والے حصے (Section) میں ہم معیار حرکت کی خاصیت کو تفصیل سے جانیں گے۔

5.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی کسی حرکت کرنے والی شے کے معیار حرکت سے متعارف کرتی ہے۔ اس اکائی میں ہم

i. طبیعیات کے بنیادی اصول کو سمجھیں گے۔

ii. معیار حرکت کے بقائے پر بحث کریں گے۔

iii. ہمارا مقصد خطی اور زاویائی معیار حرکت، دونوں کے بقائے کے اصول کو بیان اور ثابت کریں گے۔

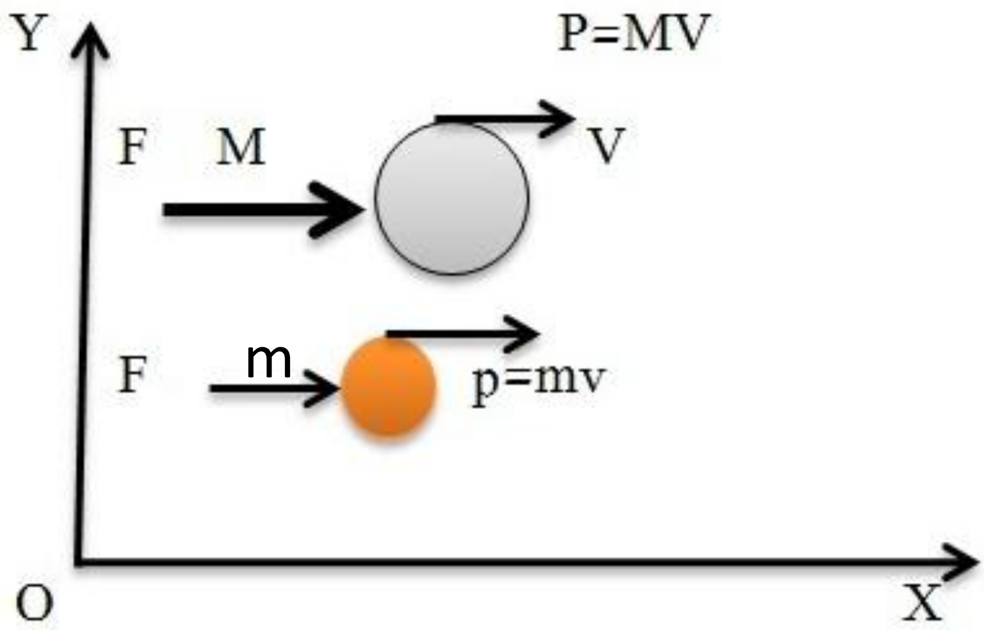
iv. توانائی اور کام کے رشتے کو ظاہر کرنے والے کلیہ یعنی کام-توانائی تھیورم کو بھی ثابت کریں گے۔

5.2 خطی معیار حرکت (Linear Momentum)

معیار حرکت یا خطی معیار حرکت کسی شے کے ماس اور رفتار کا ضرب ہوتا ہے۔ یہ ایک سمتیہ (Vector) ہوتا ہے یعنی اس میں مقدار اور سمت دونوں ہوتے ہیں۔

$$P = mv$$

یہاں پر ہم معیار حرکت کو ویکٹر p کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں اور v اس شے کی رفتار ویکٹر ہے اور m اس شے کا کمیت ہے۔ معیار حرکت کی SI اکائی kg m/s ہو گی جیسا کہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ معیار حرکت کسی بھی شے کے کمیت اور رفتار پر منحصر ہوتا ہے۔ اسے ہم شکل (5.1) میں دیکھ سکتے ہیں۔ ایسی شے جس کا کمیت 'm' زیادہ اور تیز رفتار سے حرکت میں ہے۔ اس کا معیار حرکت زیادہ ہو گا ایسی شے کہ جس کا ماس 'm' کم ہے۔ مثال کے طور پر ایک بس جو کہ تیز رفتار سے چل رہی ہے، اس کا معیار حرکت ایک آہستہ چلنے والی کار سے کم ہو گا۔ کیوں کہ کار کی کمیت بس کے کمیت سے کم ہے۔



شکل(5.1)

معیار حرکت ایک بقائی مقدار ہے یعنی جب تک کہ بند نظام(System) پر کوئی بیرونی قوت عمل میں نہیں آرہی ہے تو اس کا جملہ معیار حرکت مستقل ہو گا۔ آنے والے سیکشن (حصے) میں ہم اسے تفصیل سے سمجھائیں گے۔

مومنٹم کسی شے کی رفتار اور کمیت کے رشتے کو بتاتا ہے۔

رفتار بڑھے گی	معیار حرکت بڑھے گا
کمیت زیادہ ہے	معیار حرکت زیادہ ہو گا
رفتار گھٹے گی	معیار حرکت گھٹے گا
کمیت گھٹے گا	معیار حرکت گھٹے گا

5.2.1 خطی معیار حرکت کا بقائع(Conservation of Linear Momentum)

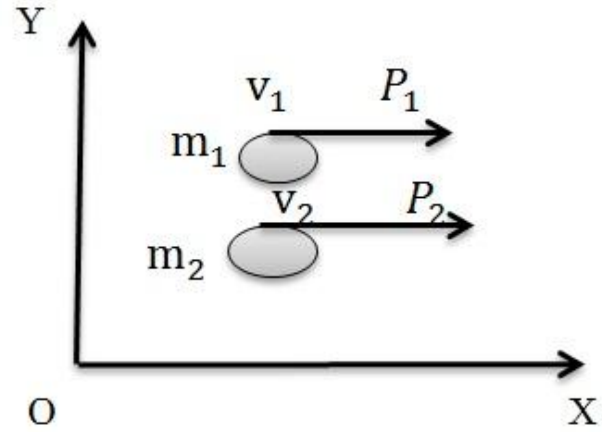
فرض کیجیے کہ 'n' ذرات کا نظام (system) ہے ،جن کی کمیت $m_1, m_2, m_3, ...$ اور رفتار v_1, v_2, v_3 ... . ہیں۔

اس نظام کا جملہ خطی معیار حرکت ذرات کے انفرادی معیار حرکت کا جمع ہو گا (Sum of Vector)۔

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots \ldots .. + P_N$$

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \cdots \ldots \ldots .. + m_n v_n$$

$$P = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i \tag{5.1}$$



شکل (5.2)

$$\mathrm{P = MV_{cm} (\because M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n)} \tag{5.2}$$

M نظام کا جملہ کمیت ہے اور V_{cm} اس کے مرکز کمیت کی رفتار ہے

اب ہم مساوات (5.2) کو تفرق کریں گے۔

$$\frac{dP}{dt} = M\frac{dV_{cm}}{dt} = Ma_{cm} \tag{5.3}$$

a_{cm} مرکز کمیت کا اسراع ہے اور ہم جانتے ہیں کہ $Ma_{cm} = F_{ext}$، F_{ext} نظام پر عمل میں آنے والی جملہ بیرونی (external) قوت ہے۔ جسے ہم مساوات (5.4) میں لکھیں گے۔

$$F_{ext} = \frac{dP}{dt} \tag{5.4}$$

مساوات (5.4) پر غور کرنے سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ کسی نظام پر عمل میں آنے والی جملہ بیرونی (External) قوت اس کے معیار حرکت کے بدلاؤ (Rate of Change) کے برابر ہوگی جب تک کہ کسی نظام میں کمیت مستقل ہے یعنی کوئی ماس اس میں داخل یا خارج نہیں ہو رہا ہے۔

اب فرض کیجیے کہ نظام پر کوئی بیرونی (External) قوات عمل میں نہیں ہے یعنی $F_{ext} = 0$ ایسی صورت میں مساوات (5.4) ہوگی۔

$$\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow P = const \qquad (5.5)$$

جسے ہم ذرات (Particles) کے انفرادی معیار حرکت لکھیں گے۔

$$P = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = const$$

یعنی جملہ معیار حرکت مستقل ہو گا۔

بقائے خطی معیار حرکت کا اصول(Principle of Linear Conservation of Momentum)

جب کسی ذرات کے نظام (System of Particle) پر عمل میں آنے والی جملہ بیرونی طاقت (External Force) صفر (Zero)ہو گی۔ تو اس نظام کا جملہ معیار حرکت مستقل رہتا ہے۔

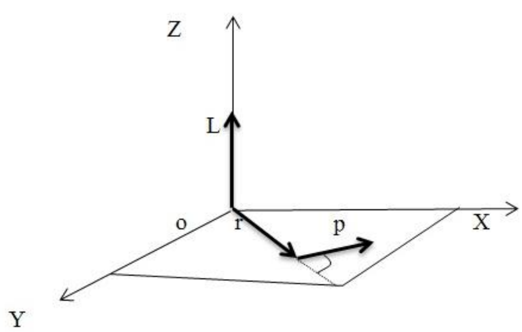
یہاں پر یہ بات ضروری ہے کہ بقائے خطی معیار حرکت طبعیات میں بہت اہمیت رکھتا ہے اور اس اصول کی مدد سے کئی اہم سوال کے جواب حاصل کر سکتے ہیں۔ آنے والے کئی موضوعات میں ہم اس کا استعمال کریں گے۔

اس سے متعلق ایک اہم بات یہ بھی ہے کہ بقائے خطی معیار حرکت کا اصول ،نیوٹن کے تیسرے کلیے کے مثاوی ہو تا ہے۔ ہم بقائے خطی معیار حرکت کے ذریعے نیوٹن کے تیسرے کلیے کو اخذ کر سکتے ہیں۔

5.2.2 بقائے زاویائی معیار حرکت (Conservation of Angular Momentum)

جب کوئی شے گردش حرکت (Rotatory Motion)میں ہوتی ہے تو اس سے جڑے ہوئے معیار حرکت کو زاویائی معیار حرکت کہتے ہیں۔ ایک قائم (Fixed)کی جگہ کے اطراف گردش کرنے والی شے کا زاویائی معیار حرکت اس کا مقامی سمتیہ اور خطی معیار حرکت کا ضرب(Sum of Vectors)ہو گا۔

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



شکل(5.3)

یہاں r اس شے کا (Origin) مقامی سمتہ ہے۔

P معیار حرکت ہے۔

اور 'L'اس کے زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔

اب ہم n ذرات کے نظام پر غور کریں گے۔ جس طرح خطی معیار حرکت میں جملہ معیار حرکت کو انفرادی معیار حرکت کا جمع لکھا جا سکتا ہے، اسی طرح ذرات کے نظام کے جملہ زاویائی معیار حرکت کو ہم

$$L = L_i = r_i \times p_i \qquad (5.6)$$

اب ہم بقائے زاویائی معیار حرکت کے اصول کو ثابت کریں گے۔ اس سے پہلے ہمیں ٹارک (Torque) کے بارے میں جاننا ضروری ہے۔ ٹارک جسے قوت کا معیار اثر (Moment of a Force) بھی کہتے ہیں کسی بھی گردش کرنے والی شے میں زاویائی اسراع پیدا کرنے کے لیے ضروری ہے۔

ایک 'o' قائم نقات (Fixed Point) کے اطراف گردش کرنے والی شے پر عمل میں آنے والا ٹارک ہو گا

$$\tau = r \times F \qquad (5.7)$$

یہاں پر ٹارک r اور F اُس شے پر عمل میں آنے والا فورس ہے۔ جب ذرات کے نظام پر بیرونی ٹارک عمل میں آتا ہے تو زاویائی معیار حرکت میں بدلاؤ (Rate of Change of Momentum) مساوی ہو گا۔

$$\frac{dL}{dt} = \left[\frac{dr_i}{dt} \times p_i + r_i \times \frac{dp_i}{dt}\right] \qquad (5.8)$$

$$\frac{dL}{dt} = \left[\frac{dr_i}{dt} \times m\frac{dr_i}{dt} + r_i \times \frac{dP_i}{dt}\right] \qquad (5.9)$$

اوپر والی مساوات میں پہلی ٹرم صفر ہو گی کیوں کہ $r_i \times r_i = 0$

$$\frac{dL}{dt} = [r_i \times F_i] \qquad (5.10)$$

$$\frac{dL}{dt} = r_i \times F_i = \tau_{ext} \qquad (5.11)$$

مساوات(5.11) سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ ذرات کے نظام کے زاویائی معیار حرکت میں بدلاؤ اس پر عمل میں آنے والی جملہ بیرونی طاقت کے مساوی ہو گا۔ اگر ہم ایسی صورت (Case) پر غور کریں، جب کوئی بیرونی ٹارک عمل میں نہیں ہیں، یعنی

$\tau_{ext} = 0$ پھر

$$\frac{dL}{dt} = 0 \Longrightarrow L = const \qquad (5.12)$$

لہٰذا، جب کسی نظام پر کوئی بیرونی طاقت (Torque) عمل میں نہیں آتی ہے تو اس کا زاویائی معیار حرکت مستقل ہو گا۔ اسے بقائے زاویائی معیار حرکت کا اصول(Law of Consevation of Angular Momentum) کہتے ہیں۔

بقائے زاویائی معیار حرکت کا اصول ہماری روزمرہ کی زندگی میں اہم رول ادا کرتا ہے۔

5.3 کام اور توانائی (Work and Energy)

طبعیات میں کام کو اس طرح بیان کریں گے کہ جب کسی شے پر فورس لگایا جائے اور اس کی وجہ سے فورس کی سمت میں حرکت (Motion) ہو تو اسے کام کہیں گے جس کی مساوات ہو گی۔

$$W = F.dr$$

یہاں پر 'F' فورس ہے اور dr نقل مکان ہے۔ W ورک کی علامت(Symbol) ہے۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب بھی شے پر فورس اس طرح لگایا جائے کہ اس کی وجہ سے نقل مکان پیدا ہو، تب ہم کہیں گے اس شے پر کام(Work) کیا گیا۔

کسی بھی شے (Body) کی کام کرنے کی قابلیت اس کے اندر توانائی(Energy) کی صورت میں ذخیرہ پذیر ہوتی ہے اور وہ جب کام کرتی ہے تو یہ توانائی ایک شے سے دوسری شے میں منتقل ہو جاتی ہے۔ توانائی کی کئی شکلیں ہوتی ہیں، بنیادی طور پر توانائی کی دو صورتیں ہیں، توانائی بالحرکت (Kinetic Energy) اور توانائی بالقوہ(Potential Energy)۔ توانائی کی باقی ساری شکلیں ان دونوں میں سے ہی ہوتی ہے، جسے ہم اس جدول کے ذریعے دیکھ سکتے ہیں۔

توانائی بالحرکت(Kinetic Energy) ۔ حرکت سے	توانائی بالقوہ (Potential Energy)۔ پوزیشن
میکانیکل توانائی تھرمل توانائی الیکٹریکل توانائی برق مقناطیسی(Electro magnetic)توانائی	زمینی کشش توانائی بالقوہ مضبوط اور کمزور نیوکلیر توانائی بالقوہ برق مقناطیسی اشعاعی

توانائی کی اکائی Joules ہے، جو کہ $^{Kgm^2}/_{sec^2}$ یا Nm- یہ ایک مزانیہ (اسکیلر) ہے۔

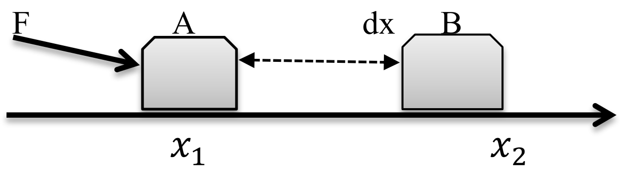
اب ہم کام اور توانائی کے درمیان رشتے کو دیکھیں گے کیوں کہ توانائی اپنے آپ کو کسی کام کے ذریعے واضح کرتی ہے۔

5.3.1 کام اور توانائی کا تھیورم (Work and Energy Theorem)

جب کسی شے پر قوت 'F' لگائی جائے اور اس کی وجہ سے (Displacement) نقل مکان پیدا ہوتا ہے، تب اس پر کیا گیا کام کی مقدار ہو گی۔

$$W = F.dr = F\cos\theta\, dr \qquad (5.13)$$

اب فرض کیجیے کی ایک شے ہے جس کی کمیت m ہے اور اس پر x-سمت میں فورس لگایا جائے تو وہ کسی نقطے (پائنٹ x_1) سے آگے بڑھ کر x_2 تک جائے گی۔



شکل (5.4)

اس نقل مکان (Displacement) کے دوران قوت کے ذریعے کیا گیا کام ہو گا

$$W = F.dx \qquad (5.14)$$

اب نیوٹن کے دوسرے کلیہ کے متعلق، قوت

$$F = ma = m\frac{dV}{dt} \qquad (5.15)$$

یہاں (Velocity) 'V' رفتار ہے

$$F = m\frac{dV}{dx}.\frac{dx}{dt} \qquad (5.16)$$

یہاں ہم نے مساوات RHS کے (5.16) کو $\frac{dx}{dx}$ سے ضرب دیا ہے

$$F = mV\frac{dV}{dx} \qquad (5.17)$$

اگر مساوات (5.14) کو (5.17) میں بدلیں گے

$$W = mV\frac{dV}{dx}dx = mVdV \qquad (5.18)$$

$$W = m\int_{V_1}^{V_2} VdV \qquad (5.19)$$

$$W = \frac{1}{2}mV_2{}^2 - \frac{1}{2}mV_1{}^2$$

$$W = KE_2 - KE_1 \qquad (5.20)$$

مساوات (5.20) میں $KE = \frac{1}{2}mV^2$ کسی دیے گئے شے کی توانائی بالحرکت (Kinetic Energy) ہوگی۔ کسی بھی شے کی $K.E_2$ اختتامی اور $K.E_1$ ابتدائی توانائی بالحرکت (Kinetic Energy) ہوگی۔ ہم توانائی بالحرکت میں بدلاؤ (Change) کو اس طرح بیان کریں گے۔

$$\Delta KE = KE_2 - KE_1 \qquad (5.21)$$

یعنی اختتامی اور ابتدائی K.E کا فرق، لیکن (5.20) کے متعلق ہم جانتے ہیں کہ

$$W = \Delta KE \qquad (5.22)$$

لہذا، کام اور توانائی تھیورم یہ بیان کرتا ہے کہ جب کسی شے پر قوت عمل میں آتا ہے تو اس کام کے ذریعے کیا قوت شے کی توانائی بالحرکت میں ہونے والی تبدیلی کا مساوی ہوگا۔

5.4 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

اگر ایک سائیکل (جس کی کمیت 20 کلو گرام ہے) دائرے میں فی سیکنڈ دو چکر سے گھوم رہی ہے جب کہ دائرے کا نصف قطر 0.5 میٹر ہے تو اس کا زاویائی معیار حرکت کتنا ہوگا اور ایک منٹ کے بعد سائیکل کی رفتار ایک چکر فی سیکنڈ ہو جائے تو اس پر عمل کرنے والا ٹارک

کتنا ہو گا؟

حل: حل میں دیا گیا ہے کے ایک سائیکل کی کمیت 20 کلو گرام ہے یعنی

$$m = 20kg,$$
$$\omega = 2 \times 2\pi \, {}^{rad}/_{sec} = 4\pi \, {}^{rad}/_{sec}$$

دائرے کا نصف قطر 0.5 میٹر

$$r = 0.5m$$

زاویائی معیار حرکت

$$L = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (\because p = mv)$$
$$L = rmv \qquad (\because v = r\omega)$$

$$L = mr^2\omega$$

$$L = 20 \times (0.5)^2 \times 4\pi = 62.8 \, {}^{J}/_{sec}$$

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(mr^2\omega) = mr^2\left[\frac{2\pi\omega_1 - 2\pi\omega_2}{dt}\right]$$
$$\tau = 20(0.5)^2\left(\frac{2-1}{60}\right).2\pi$$

ٹارک

$$\tau = 0.523 \, Nm$$

حل شدہ مثال 2

ایک گیند جس کی کمیت 0.2 کلو گرام ہے، ہوا میں 20 میٹر فی سیکنڈ کی رفتار سے سفر کر رہی ہے۔ اس کی معیار حرکت معلوم کیجیے۔ اگر اس گیند کی رفتار دو گنی ہو جائے تب معیار حرکت کتنا ہو گا؟

حل: ایک گیند جس کی کمیت 0.2 کلو گرام

$$m = 0.2kg$$
$$v_1 = 20 \, {}^{m}/_{sec}$$

معیار حرکت

$$p = mv_1$$
$$p = 0.2 \times 20 = 4kg \, {}^{m}/_{sec}$$

گیند کی رفتار دو گنی ہو جائے تب

$$40\ {}^{m}/_{sec} = 2v_1 = v_2$$

معیار حرکت

$$p = mv_2$$
$$p = 0.2 \times 40 = 8kg\ {}^{m}/_{sec}$$
$$p = 8\ \ {}^{kg\ m}/_{sec}$$

5.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- اس اکائی میں ہم نے معیار حرکت اور کام توانائی تھیورم کے بارے میں جانکاری حاصل کی۔
- کسی شے کی معیار حرکت اس کی کمیت اور رفتار کے براہ راست تناسب ہوتا ہے۔
- جب کسی ذرے کے نظام پر عمل آنے والی بیرونی طاقت صفر ہوگی تو اس نظام کا جملہ معیار حرکت مستقل (Constant) رہتا ہے۔ اسی طرح گردشی حرکت کرنے والے ذروں کے نظام پر کوئی بیرونی قوت ٹارک (Torque) عمل میں نہیں آتی ہے تو اس کا زاویائی حرکت مستقل ہوگا۔
- بقائے زاویائی معیار حرکت کا اصول نیوٹن کے تیسرے کلیے کے مساوی ہوتا ہے۔
- **کام۔** توانائی تھیورم کے مطابق جب کسی شے پر قوت عمل کرتی ہے تو اس قوت کے ذریعے کیا گیا کام شے کی توانائی بالحرکت میں ہونے والی تبدیلی کے مساوی ہوگا۔
- اس اکائی کے مطالعے کے بعد آپ اس قابل ہوگئے ہیں کہ معیار حرکت اور اس کے بقائے اصول کو سمجھا سکیں گے۔
- گردش کرنے والے جسم سے جڑی ہوئی زاویائی معیار حرکت اور اس کے بقائے کو معلوم کر سکیں گے۔
- کام توانائی کلیے کو ثابت کر سکیں گے اور طبعیات میں اس کا اطلاق کر سکیں گے۔

5.6 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **معیار حرکت** : کسی جسم یا شے کی کمیت اور رفتار کا ضرب
- **بقائے معیار حرکت** : کوئی الگ تھلگ نظام (جس پر کوئی بیرونی قوت عمل نہیں کرے گی) جس میں طبعی مقدار کی قیمت ہمیشہ مستقل رہتی ہے۔
- **زاویائی معیار حرکت** : گردشی حرکت کرنے والے جسم کے معیار حرکت کو زاویائی معیار حرکت کہتے ہیں۔
- **کام** : جب کسی شے پر قوت لگائی جائے اور جس کی وجہ سے قوت کی سمت میں نقل

مکان ہو تو اسے کام کہتے ہیں۔

5.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

5.7.1 معروضی سوالات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. خطی معیار حرکت P=................................

2. رفتار کے بڑھنے سے معیار حرکت..............................ہے۔

3. زاویائی معیار حرکت...............................ہے۔

$$\vec{L} = \frac{\vec{r}}{p} (d) \vec{L} = r^2 \times \vec{p} (c) \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} (b) \vec{L} = \vec{r} + \vec{p} (a)$$

4. کام توانائی مسائلہ (Theorem) کا ضابطہ ....ہے۔

5. بیرونی قوت کی غیر موجودگی میں ذرات کے نظام کا معیار حرکت ....ہو گا۔

6. بقائے معیار حرکت نیوٹن کے کس کلیے کے مساوی ہو تا ہے ؟

7. خطی معیار حرکت SI اکائی...............................ہے۔

8. کام کی تعریف کرو۔

9. بقائے معیار حرکت سے کیا مراد ہے۔

10. زاویائی معیار حرکت کی SI اکائی لکھیے ۔

5.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. کام توانائی مسئلے کو ثابت کیجیے۔

2. توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوت کی تعریف کیجیے اور اس کی مثالیں لکھیے ۔

3. مندرجہ ذیل کی تعریف کیجیے:

   i. ٹارک

   ii. کام

5.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. خطی معیار حرکت کے بقائے اصول کو بیان اور ثابت کریں۔

2. زاویائی معیار حرکت سے کیا مراد ہے۔ زاویائی معیار حرکت کے بقائے کے اصول کو بیان کریں۔

5.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. اگر ایک سائیکل (جس کی کمیت 30 کلو گرام ہے) دائرے میں فی سیکنڈ دو چکر سے گھوم رہی ہے جب کہ دائرے کا نسب قطر 1.5 میٹر ہے تو اس کا زاویائی معیار حرکت کتنا ہو گا اور ایک منٹ کے بعد سائیکل کی رفتار ایک چکر فی سیکنڈ ہو جائے تو اس پر عمل کرنے والا ٹارک کتنا ہو گا؟
2. ایک گیند جس کی کمیت 0.5 کلو گرام ہے، ہوا میں 40 میٹر فی سیکنڈ کی رفتار سے سفر کر رہی ہے۔ اس کی معیار حرکت معلوم کیجیے۔ اگر اس گیند کی رفتار دو گنی ہو جائے تب معیار حرکت کتنا ہو گا؟

5.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1.College Physics by Sears.F.W.& Zemansky.M.W. Wesley Publishing Co. Inc. London

2.Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta Dhanpat Rai Publications

3.Mechanics by Kittel, M.C.Graw Hill

4.Modern College Physics by White.H.E. East West Press Pvt.Ltd New Delhi

5.Physics by Zafiratos.C, John wesiey &Sons. Inc. New York

6.Physics Part I by Resnik.R & Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi

7.Physics the pioneer science Vol.I by Taylor .L.W. Dover Publication

8.Technical Physics by Bueche.F ,Harper &Row Publication,New York

9.Unified Physics Vol−I, Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath & Co. Meerut

اکائی 6۔ بقائے زاویائی معیار حرکت

(Conservation of Angular Momentum)

اکائی کے اجزا

6.0 تمہید

6.1 مقاصد

6.2 بقائے زاویائی معیار حرکت

6.2.1 اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کا اطلاق

6.3 نظام ہائے خرد بینی و کلاں بینی پر اطلاق

6.4 حل شدہ مثالیں

6.5 اکتسابی نتائج

6.6 کلیدی الفاظ

6.7 نمونہ امتحانی سوالات

6.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

6.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

6.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

6.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

6.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

6.0 تمہید (Introduction)

یہ اکائی اصول بقائے معیار حرکت کا تعارف کراتی ہے۔ اس اصول کو اس طرح بیان کیا گیا ہے کہ ذرات کے ایک نظام پر عمل کرنے والا حاصل ٹارک صفر ہوتا ہے۔ کسی گردشی نظام میں کوئی بیرونی محصلہ ٹارک نہ ہو تو زاویائی معیار حرکت، ہمیشہ مستقل ہوتا ہے۔ اور روزمرہ کی زندگی میں ہمیں ایسے بے شمار واقعات کا سامنا ہوتا ہے جہاں زاویائی معیار حرکت کی بقائے اصول کارفرما ہتا ہے۔

6.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کا تعارف کراتی ہے۔ اس اکائی میں ہم

i. بقائے زاویائی معیار حرکت کی تعریف اور اصول کو سمجھیں گے۔

ii. اصول بقائے معیار حرکت کے اطلاق کو سمجھیں گے۔

6.2 بقائے زاویائی معیار حرکت (Conservation of Angular Momentum)

کسی گردشی نظام میں کوئی بیرونی ٹارک نہ ہو تو زاویائی معیار حرکت ہمیشہ مستقل ہوتا ہے دونوں مقدار اور سمت میں کسی گردشی نظام میں حاصل شدہ بیرونی ٹارک کا تعلق زاویائی معیار حرکت سے 'L' ہوتا ہے۔

لہٰذا

$$\tau_{ext} = \frac{dL}{dt} \qquad (6.1)$$

اگر بیرونی قوت ٹارک صفر کے برابر ہو تو

$$\tau_{ext} = 0 \qquad (6.2)$$

$$\frac{dL}{dt} = 0 \qquad (6.3)$$

مستقل مقدار کا تفرق کرنے پر حاصل صفر ہوگا۔ L مستقل ہوگی۔

$$L = (Constant) \text{ مستقل} \qquad (6.4)$$

جب کسی نظام پر عمل کرنے والا بیرونی حاصل ٹارک صفر ہو جاتا ہے تب نظام کا مجموعی سمتی زاویائی معیار حرکت مستقل ہو جاتا

ہے۔اسی اصول کو بقائے زاویائی معیار حرکت کہا جاتا ہے۔ذروں کے کسی نظام کے لیے کسی نقطے کے گرد مجموعی زاویائی معیار حرکت 'L' ہوتا ہے۔

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \cdots \qquad (6.5)$$

اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کی رو سے مستقل ہے کیوں کہ بیرونی حاصل ٹارک صفر ہے۔

$$\sum \vec{L}_i = \text{مستقل} \qquad (6.6)$$

یہ مساوات (6.6) ظاہر کرتی ہے کہ نظام کے ذروں کی زاویائی معیار حرکتیں تو بدل سکتی ہیں لیکن کسی حاصل بیرونی ٹارک کی عدم موجودگی میں ان کا سمتی مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

اگر جسم پر عمل کرنے والا بیرونی حاصل ٹارک صفر ہو جائے تو I میں تبدیلی ہونے پر زاویائی رفتار ω کی بھی تبدیلی ہونی چاہیے کہ اصول بقائے زاویائی معیار حرکت جسم کا مجموعی زاویائی معیار حرکت مستقل رہ سکے۔

فرض کرو کہ ایک جسم کا جمود کا معیار اثر اور اس کی زاویائی رفتار علی الترتیب I_0 اور ω_0 تھے اور کچھ وقت کے بعد جسم میں کمیت کے مزید منقسم ہونے کی وجہ سے جسم کے جمود کا معیار اثر اور اس کی زاویائی رفتار علی الترتیب I اور ω ہو جاتی ہے۔تب

$$I_0\omega_0 = I\omega = Constant \qquad (6.7)$$

یہ مساوات (6.7) اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کا اظہار کرتی ہے اور اس کا اطلاق استوار اجسام کی گردشی حرکتوں پر بھی کیا جاسکتا ہے۔

6.2.1 اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کا اطلاق

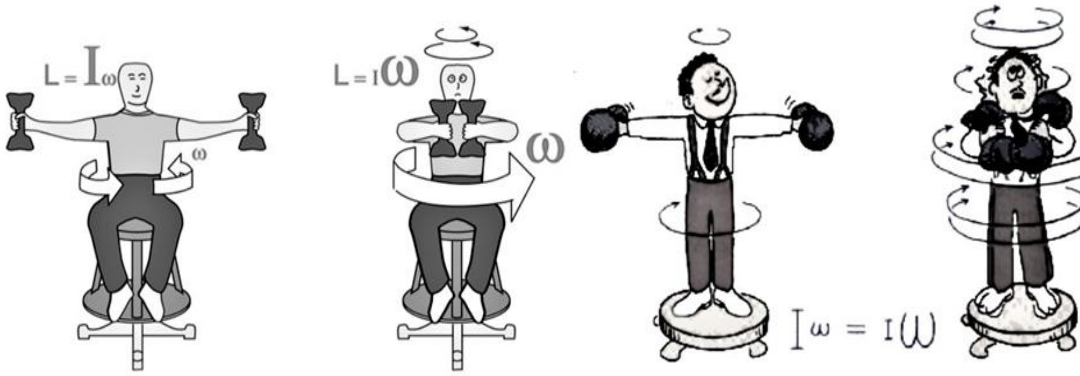
(Application of the Principle of Conservation of Angular Momentum)

روز مرہ کی زندگی میں ہم ایسے بے شمار واقعات کا سامنا کرتے ہیں جہاں زاویائی معیار حرکت کا بقائے اصول کار فرما رہتا ہے۔ گردشی اجسام کی چند خصوصیات سمجھانے میں یہ قانون بہت کار آمد ہے۔

مثالیں(Examples)

1. ایک شخص جیسے شکل (6.1) میں ایک گردشی میز پر Diumb-bell ہاتھ میں لیے کھڑا ہوا ہے۔ گردشی میز کو مستقل زاویائی رفتار ω سے حرکت دیا گیا ہے۔ اب اگر وہ شخص اپنے ہاتھوں کو اپنی جانب کرے تب زاویائی رفتار میں اضافہ ہوگا۔ ہاتھوں کو موڑنے (Fold) پر اس شخص کی زاویائی رفتار اعظم ترین ہوگی۔اس کو سمجھنے کے لیے کلیہ بقائے زاویائی معیار حرکت کا استعمال

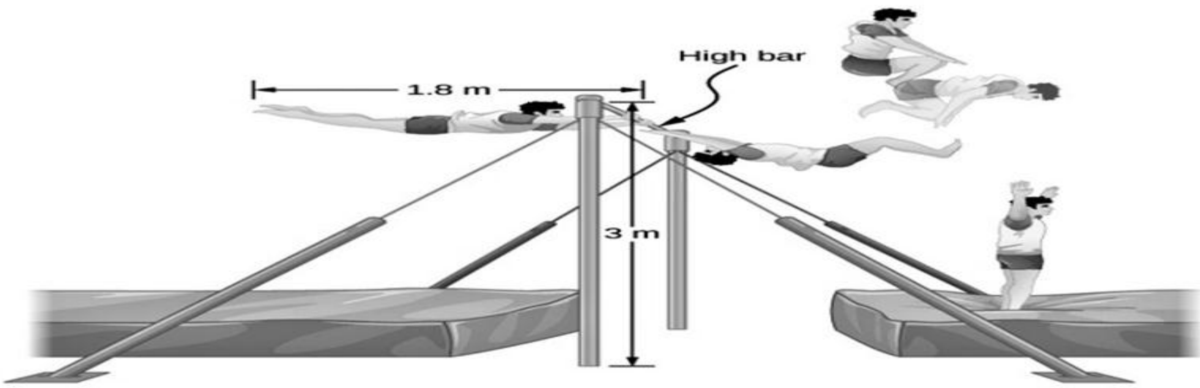
کرنا ہو گا۔ اس اصول کے مطابق اگر کوئی بیرونی ٹارک نہ ہو تو مستقل = L ہو گا۔ تب مستقل = $I\omega$ ہوتا ہے۔ یہاں پر زاویائی رفتار ω جمود کے معیار اثر I سے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔ جیسے جیسے شخص اپنے ہاتھ جسم کے قریب کرے گا۔ I میں کمی واقع ہو گی اور ω میں اضافہ ہو گا۔



شکل (6.1)

(Source:Vector properties of Rotational Quantities, Hyperphysics.com & Rtational Dynamics, Ux1.eiu.edu)

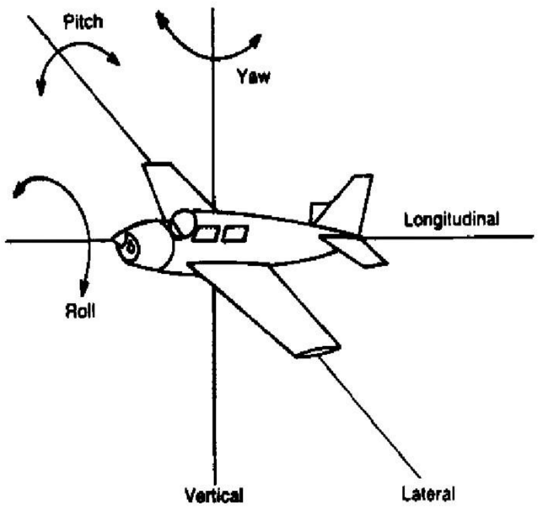
2. ایک شخص جیسے شکل (6.2) میں ایک قلاباز پر موافق سمت ساعت میں ایک خفیف معیار حرکت کے ساتھ ہاتھ و پاؤں کو پھیلائے ہوئے اپنے جھولے کو چھوڑ دیتا ہے۔ جب قلاباز اپنے ہاتھ اور پاؤں سمیٹ لیتا ہے اس کے جمود کا معیار I کم ہو جاتا ہے۔ یہاں $I\omega$ کو مستقل رہنا چاہیے اس لیے قلاباز کی زاویائی رفتار میں اضافہ ہو جاتا ہے۔ جس کی وجہ سے وہ بہت آسانی کے ساتھ سر کے بل چکر لگانے کا (Magic) میجک دکھا سکتا ہے۔

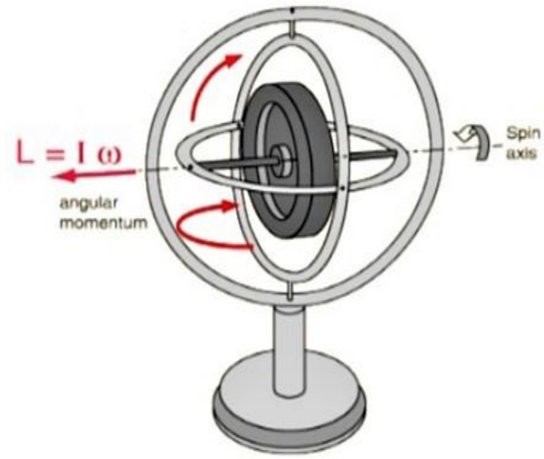


شکل (6.2)

(Source:Conservation of angular momentum, Openstax University)

3. ہوائی جہاز میں سمت کا تعین کرنے والے (Navigation Gyro) آلے کی کارکردگی بھی اسی اصول پر مبنی ہے۔ جیسے شکل (6.3) میں ہوا کے جھونکوں کی مدد سے ایک پہیے کے گھیرے کی گردش کو برقرار رکھا جاتا ہے۔ فضا میں پہیے کے محور کی سمت ہمیشہ معین رہتی ہے۔ ہوائی جہاز فضا میں پلٹے یا ترچھا ہو جائے یا چکر لگائے، جہاز کی بیرونی فضا نا قابل رویئت ہونے کے باوجود پائلٹ کو سمت معینہ کی نشان دہی ہوئی رہتی ہے۔





شکل(6.3)

(Source:Gyroscope,Hyperphsics.com)

4. اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کی ایک عجیب و غریب مثال برف پر چلنے والوں کی اپنی محوری گروشی حرکت میں دیکھی جا سکتی ہے۔ ایک شخص جیسے شکل (6.4) میں ایک جھونکے کے ساتھ برف پر چلنے والا (Ice skater) پلٹتا ہے پھر ایک اسکیٹر کے پنجے پر کھڑا ہو جاتا ہے اور اسی نقطے کے ذریعے آہستہ آہستہ گرد گھومنا شروع کرتا ہے۔ برف پر چلنے والا گویا بے ٹارک (Torque-Free) نظام بن جاتا ہے کیوں کہ برف اور اسکیٹر کے نیچے مابین ایک بے رگڑ بن جاتا ہے۔ ایک اسکیٹر (Skater) عموماً ایک ہاتھ اور پیر کو پھیلا کر گھومنا شروع کرتا ہے اور اس شخص کا باقی دھڑ شکل (6.4) کی طرح جھک جاتا ہے۔

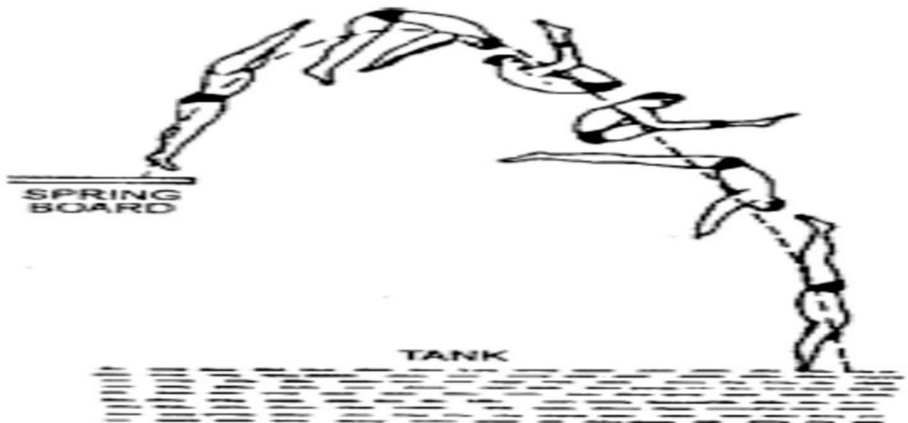
شکل(6.4)

(Source:Gravity and Angular Momentum,Hi-tech Tennis.com)

یہ پوزیشن اسکیٹر کے جسم کی کمیت کو گردشی محور سے بہت دور کر دیتی ہے جس کی وجہ سے اس کے جمود کا معیار اثر اعظم ترین ہو جاتا ہے۔ یہاں پر اسکیٹر اپنے جسم کو حوالے کے محور کے گرد گھومتے ہوئے اپنی پوزیشن کو آہستہ آہستہ تبدیل کرتا جاتا ہے۔ اس پوزیشن پر اسکیٹر کے جسم کی بہت بڑی کمیت گردش محور کے قریب تر ہو جاتی ہے لہٰذا اس کے جمود کا معیار اثر بہت زیادہ حد تک گھٹ جاتا ہے۔ اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کے مطابق $I\omega$ کے حاصل ضرب کو مستقل رہنا چاہیے۔ چنانچہ ω میں اضافہ ہوتا ہے تو I گھٹتا ہے۔ اس طرح اسکیٹر اتنی بڑی رفتاروں کو حاصل کرسکتے ہیں کہ اس پر یہ ایک مشاہد کو دھندلے دکھائی دیتے ہیں۔

5. ایک چھلانگ لگانے والا شخص جیسے شکل (6.5) میں دکھایا گیا ہے۔ اپنے ہاتھ اور پیر جسم سے دور کر کے چھلانگ لگاتا ہے۔ پھر چھلانگ لگانے والا شخص اپنے ہاتھ اور پیر قریب کر کے زاویائی رفتار میں اضافہ کرتا ہے۔ شخص ہوا میں گردش لگا سکتا ہے۔ جیسے جیسے یہ پانی کے قریب ہوتا ہے ہاتھ اور پیر پھر پھیلا دیتا ہے تاکہ جمود کا معیار اثر بڑھے اور ω کم ہو جائے۔

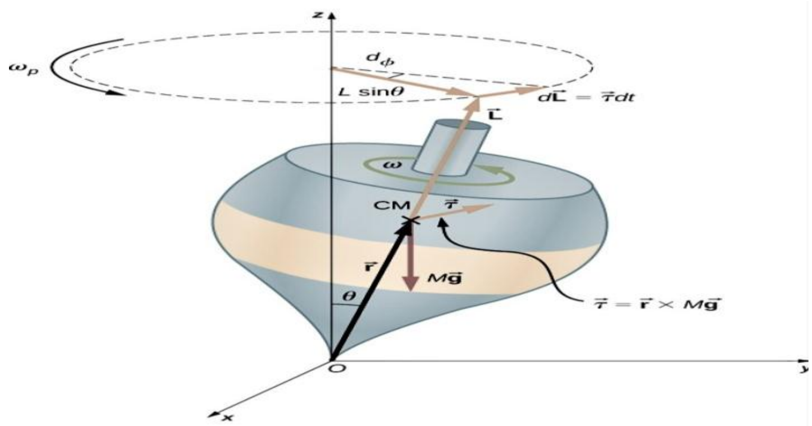
یعنی $I_1\omega_1 = I\omega$ چوں کہ $\omega = 3\omega_1$ ہے اس لیے چھلانگ کے مرکز سے گزرنے والے افقی محور کے گرد اس کے جمود کے معیار اثر کو اپنی ابتدائی قیمت I_1 سے بدل کر $I = \frac{I_1}{3}$ کرنا ہوگا۔ اس کے لیے وہ اپنے ہاتھ اور پاؤں کو اپنے جسم کے مرکز کمیت کے بہت قریب کھینچ لیتا ہے۔ اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ اس کی ابتدائی رفتار جتنی زیادہ ہوگی اور یہ جتنا اپنے گردشی جمود کے معیار کو گھٹا سکتا ہے اتنے زیادہ چکر وہ پانی کو چھونے سے قبل بنا سکتا ہے یعنی ایک دیے ہوئے وقفے میں وہ زیادہ سے زیادہ چکر لے سکتا ہے۔ جیسے جیسے چھلانگ کے بعد گھومتا ہے اس کی گردشی توانائی بالحرکت بدلتی جاتی ہے۔ چوں کہ $I < I_1$ اس لیے قلابازی کے وقت چھلانگ کی توانائی بالحرکت چھلانگ کی گدی کو چھوڑتے وقت موجود توانائی بالحرکت کے مقابلے میں زیادہ ہوتی ہے یعنی $\frac{1}{2}I\omega^2 > \frac{1}{2}I_1{\omega_1}^2$ چھلانگ سے اپنے جسم کے اعضاء کو کھینچنے کا کام سرزد ہوتا ہے اس لیے توانائی کے اعضائے غوطہ خود ہی مہیا کر لیتا ہے۔



شکل (6.5)

(Source:Conservation of Angular momentum, Braincort.com)

6. ایک گولی اپنے محور کے گرد تیز چکر کرتی ہوئی بموجب شکل (6.6) ڈگمگاہٹ کو روکتی ہے۔ اگر یہ ڈگمگانے لگے تو زاویائی معیار حرکت کے سمیتے کو اپنا رخ ہمیشہ بدلتے رہنا چاہیے۔ لیکن گولی پر عمل پیرا معمولی انصرافی قوتوں سے پیدا ہونے والے ٹارکس چونکہ زاویائی معیار حرکت میں کوئی نمایاں اور بڑی تبدیلیاں پیدا نہیں کرسکتے اس لیے گولی اپنی خاص سمت حرکت کو برقرار رکھتی ہے اور اس میں ڈگمگاہٹ باقی نہیں رہتی۔ مثلاً ایک گھومتے ہوئے لٹو کو دکھایا گیا ہے جو محو نیند ہے جب تک کہ اس کی گھومنے کی رفتار بہت کم نہ ہو جائے لٹو نہ تو ڈگمگائے گا اور نہ ہی گرے گا۔



شکل (6.6)

(Source:Precession of a Gyroscope,University Physics Vol-1)

6.3 نظام ہائے خرد بینی وکلاں بینی پر اطلاق

(Application of Microscopic and Macroscopic System)

کلاں بینی جسیم اجسام جیسے ستاروں (Stars) اور سٹیلائیٹ کی حرکتوں پر بھی اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کا اطلاق کرتے ہیں۔ ان پر اس اصول کے اطلاق کے وقت یہ ضروری ہے کہ ان کے اپنے ذاتی محور کے گرد گردشی حرکت کو بھی ملحوظ رکھیں۔ ستاروں کی سکڑن جیسے مسئلے سے متعلق پیش کردہ نظریات کو حسابی شکل دینے میں بقائے زاویائی معیار حرکت کا اصول ایک بہت اہم کردار ادا کرتا ہے ۔مثال کے طور پر اب ہم ستاروں کی سکڑن کے مظہر کو بقائے زاویائی معیار حرکت کے اصول کی روشنی میں سمجھنے کی کوشش کریں گے۔ بین نجی فضا (Inter Stallar Space) میں گیس اور گرد و غبار کے بادلوں کی اپنی ذاتی تجاذبی قوتوں کی وجہ سے ستاروں کی تشکیل ہوتی ہے۔ کہکشاں کے نظام کی رفتار میں غیر معمولی اضافہ ہو جاتا ہے کیوں کہ ستارہ وسیع عرض اور منتشر حالت سے سکڑ کر قدرے قریب، چھوٹے اور کثیف جسم میں بدل جاتا ہے۔ اس وجہ سے نظام کے جمود کا معیار اثر کم ہو جاتا ہے اور اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کی اتباع میں نظام کی زاویائی رفتار میں متناسب اضافہ ہو جاتا ہے۔ تجاذبی سکڑن کی وجہ سے ستارں چمکنے لگتے ہیں بلکہ اس سے بھی زیادہ حد تک گرم ہو جاتے ہیں۔

اس طرح اس کی اندرونی تپش کے اضافے سے ستارے میں خود بخود قائم رہنے والا نیوکلیر تعامل شروع ہو جاتا ہے۔

جوہری اور نیوکلیر طبیعیات میں ہمارا سابقہ ایسے نظاموں سے پڑتا ہے جوہری ذرات خوردبینی نظام پر مشتمل ہوتے ہیں ان ذرات پر بھی اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کا اطلاق ہوتا ہے۔ جوہری تصادم کے دوران متصادم ذرات کے باہمی عمل کو سمجھنے میں یہ اصول بہت ہی کار آمد ہے۔ یہ تو جانی مانی بات ہے کہ جوہری اور نیوکلیر اقلیم میں نیوٹنی میکانیات درست نہیں ہوتا لیکن اس قلیم میں کلیہ بقائے زاویائی معیار حرکت کے استعمال سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ نیوٹنی اصولوں کے مقابلے میں یہ اصول بہت زیادہ بنیادی اہمیت کا حامل ہے۔

ذرات پر مشتمل نظام کے لیے ہم دیکھ چکے ہیں کہ کلیہ بقائے زاویائی معیار حرکت صحیح اور درست ہے۔ اگر دیے ہوئے نظام محدود ابعاد اور گھماؤ(Spin) رکھنے والے اجسام پر مشتمل ہوں تو ان کے زاویائی معیار حرکت کا تحفظ بھی ممکن ہے۔ ہم اس اصول کو گھماؤ سے متعلق زاویائی معیار حرکت کو ان کے مجموعی زاویائی معیار میں شامل کریں اور نیوکلیر طبیعات میں ابتدائی ذرات جیسے الکٹرانس، پروٹانس، نیوٹرانس، مسانس وغیرہ سے بحث کرتے ہیں جو کسی بیرونی نقطے کے گرد اپنی مداری حرکت اور اپنے ہی محور کے گرد گردش(Spin) کی وجہ سے زاویائی معیار حرکتوں کے حامل ہوتے ہیں۔ اس لیے جب ہم ان پر مجموعی زاویائی معیار حرکت کے کلیے کا اطلاق کرتے ہیں تو اس میں اپنے ہی محور کے گرد گردشی حرکت کے زاویائی معیار حرکت کو بھی شامل کرنا چاہیے۔

6.4 حل شدہ مثالیں(Solved Examples)

حل شدہ مثال1

اگر زمین کی کمیت مستقل رکھ کر اس کا نصف قطر نصف کر دیا جائے تب گردشوں کا وقت دوران دریافت کریں۔

حل:

جب نصف قطر کو نصف کر دیا جائے اور کمیت کو نہ بدلا جائے تب زمین کے زاویائی معیار حرکت بھی مستقل ہوگی۔

$$I\omega = \text{مستقل}$$

اگر Iبدل کر I_1 سے I_2 ہوتا ہے۔ ωبدل کر ω_1 سے ω_2 ہوتا ہے تو بقائے زاویائی معیار حرکت

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

زمین کا ایک ٹھوس کرہ ہے۔ تب اس کا جمود کا معیار اثر

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

حل شدہ مثال2

5kg کمیت اور 0.5 گردشی نصف قطر کا ایک قرص 120 چکر فی منٹ (120 rpm) کی زاویائی رفتار سے گھومتے ہوئے ایک دوسرے قرص کو اپنے ساتھ گردش میں جوڑ لیتا ہے جس کی کمیت 10kg گردش نصف قطر 1m ہے۔ یہ قرص ابتداً 60rpm زاویائی رفتار

سے پہلے قرص کی سمت میں گھوم رہا تھا۔ دونوں قرصوں کی آخری زاویائی رفتار معلوم کیجیے۔

حل:

5kg کمیت والے قرص کے جمود کا معیار

$$I_1 = 5kg(0.5)^2 = 1.25kg\ m^2$$

10kg کمیت والے قرص کے جمود کا معیار

$$I_2 = 10kg(1)^2 = 10kgm^2$$

5kg کمیت والے قرص کی زاویائی رفتار ہوتی ہے

$$\frac{120}{60} X\ 2\pi = 4\pi\ rad/sec$$

10kg کمیت والے قرص کی زاویائی رفتار ہوتی ہے۔

$$\frac{60}{60} X 2\pi = 2\pi\ rad/sec$$

زاویائی معیار حرکت کے بقائے اصول کا اطلاق جوڑنے سے پہلے اور جوڑنے کے بعد کے نظام پر کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega$$

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$$

$$\omega = \frac{1.25X4\pi + 10\ X\ 2\pi}{10 + 1.25}$$

$$\omega = \frac{25\ \pi}{11.25} = 2.22\pi\ X \frac{1}{2\pi} X60\ rpm$$

یہاں پر نصف قطر R سے $\frac{R}{n}$ ہوتا ہے۔

$$\frac{2}{5} M{R_1}^2\omega_1 = \frac{2}{5} M{R_2}^2\omega_2$$

$$R^2 = \frac{2\pi}{24\ hour} = \left(\frac{R}{n}\right)^2\ \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{24\ hour}{n^2}$$

حسابی سوال کے لحاظ سے نصف قطر R سے $\frac{R}{2}$ ہوتا ہے۔

$$\frac{2}{5}MR^2X\ \frac{2\pi}{24\ hour} = \frac{2}{5}M\left(\frac{R}{2}\right)^2\frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{24}{2^2} = \frac{24}{4} = 6\ hrs$$

حل شدہ مثال 3

ایک ڈانسر اپنے ہاتھ باہر کی طرف کر کے انتصابی محور سے 60rpm کی گردش کے ساتھ ناچتا ہے۔ جب وہ ہاتھ کو موڑ لیتا ہے تب زاویائی تعداد 90 rpm ہو جاتی ہے اس کے جمود کے معیار اثر میں تبدیلی دریافت کرو۔

حل:

زاویائی معیار حرکت کی بقائے اصول کے مطابق

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$I_1\ 2\pi\left(\frac{n}{t}\right)_1 = I_2\ 2\pi\left(\frac{n}{t}\right)_2$$

$$\left(\frac{n}{t}\right)_1 = 60\ rpm\quad ;\left(\frac{n}{t}\right)_2 = 90\ rpm$$

انتہائی جمود کا معیار اثر

$$I_2 = \frac{2I}{3}$$

جمود کے معیار اثر میں تبدیلی = ابتدائی I – انتہائی I

$$I - \frac{2I}{3} = \frac{I}{3} = \frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$$

$$\omega = 66.6\ rpm$$

یعنی دونوں قرصوں کی زاویائی رفتار 66.6 چکر فی منٹ ہے۔

حل شدہ مثال4

ایک استوانوی قرص کی شکل کا ایک افقی پلیٹ فارم بے رگڑ کے محور کے گرد افقی مستوی میں گھومتا ہے۔ پلیٹ فارم کی کمیت 100kg اور اس کا نصف قطر 2m ہے۔ 25kg کمیت کا ایک شخص پلاٹ فارم کے کگر (Rim) سے اس کے مرکز کی جانب آتا ہے۔ جب شخص کگر پر ہوتا ہے تو اس کی اور پلیٹ فارم کی زاویائی رفتار 5rad/sec رہتی ہے اور جب وہ مرکز سے ایک میٹر کے فاصلے پر پہنچ جاتا ہے تو اس کی زاویائی رفتار کتنی ہو گی۔

حل:

گردشی محور کے گرد پلیٹ فارم کے جمود کا معیار اثر ہوتا ہے

$$\mathrm{I_P} = \frac{1}{2}\mathrm{MR^2} = \frac{1}{2}(100\mathrm{kg})(2\mathrm{m})^2 = 200\mathrm{kg.m^2}$$

گردشی محور کے گرد شخص کے جمود کا معیار اثر جب کہ وہ کگر پر ہوتا ہے۔

$$I_{m_0} = mR^2 = 25\ kg\ (2m)^2 = 100\ kgm^2$$

جمود کا مجموعی معیار اثر جب کہ شخص کگر پر ہو

$$I_0 = I_P + I_{m_0}$$

$$I_0 = 200 + 100 = 300\ kgm^2$$

جب شخص r = 1m پر ہو تو اس کے جمود کا معیار I_m میں تبدیل ہو جاتا ہے۔

$$I_m = mr^2 = 25\ kg\ (1m)^2 = 25\ kgm^2$$

جب شخص مرکز سے ایک میٹر کے فاصلے پر ہوتا ہے تو نظام کے جمود کا معیار اثر ہو گا۔

$$I_P + I_m = 200 + 25 = 225\ kgm^2$$

زاویائی معیار حرکت چونکہ غیر متبادل رہتا ہے اس لیے $\omega_o = 5\text{rad/sec}$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$I\omega = I_0\omega_0$$

$$225\ \omega = 300 \times 5$$

$$\omega = \frac{300 \times 5}{225} = 6.66\ rad/sec$$

گردشی میز کے مرکز سے جب شخص کا فاصلہ ایک میٹر ہو جاتا ہے تو نظام کی زاویائی رفتار 6.66rad/sec ہو جاتی ہے۔

6.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- کسی ذروں کے نظام میں کسی بھی بیرونی محصلہ ٹارک کا دخل نہ ہو تو نظام کا زاویائی معیار حرکت مستقل ہوتا ہے دونوں مقدار میں اور سمت میں جب کوئی بیرونی محصلہ ٹارک نہ ہو تو L مستقل ہوتا ہے۔ اسی کو اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کا نام دیا جاتا ہے۔
- خلاباز، آئیس اسکیٹر، چھلانگ وغیرہ اپنے کرتبوں کے مظاہرہ کے دوران اس اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کو استعمال کرتے ہیں۔

6.6 کلیدی الفاظ (Key Words)

• **جمود کا معیار اثر** (Moment of Inertia)	:	گردشی حرکت میں کسی جسم کی وہ خاصیت جو کسی سکون میں رہنے والے جسم کو یا جسم کو حرکت کرنے والے جسم کی حرکت کی ایک خاص محور میں مخالفت کرے
• **ڈگمگائی حرکت** (Wobbling Motion)	:	جسم اپنی حرکت کے دوران اگر اپنی سمتوں کو بھی بدلتا رہے تو جسم کی ایسی حرکت کو ڈگ مگاتی حرکت کہا جاتا ہے
• **گھیرا** (Periphery)	:	کسی جسم کی بیرونی سطح
• **نیوکلیر**	:	ایک تعامل جس میں جوہری مرکز بھی شامل ہو

6.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

6.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کسی محور کے گرد نقطی کمیت کے جمود کا معیار اثر I .... ہے۔

   a) m/r^2 b) mr^2 c) mr   d) m^2r

2. کسی گردشی نظام میں کوئی بیرونی محصلہ ٹارک نہ ہو تو زاویائی معیار حرکت ہمیشہ................... ہوتا ہے۔
3. اگر کسی سخت جسم کی زاویائی رفتار بدلنے سے کیا جمود کا معیار اثر بھی بدلتا ہے۔
4. تانبے کا کرہ اور لکڑی کا کرہ دونوں کا نصف قطر مساوی ہے کس کے جمود کا معیار اثر کم ہو گا؟
5. زاویائی معیار حرکت کی SI اکائی........... ہے۔
6. زاویائی معیار حرکت کا ابعادی ضابطہ......... ہے۔
7. قطبی برف کے ٹکڑے پگھلنے سے دن کے وقت دوران پر کیا اثر پڑتا ہے؟
8. ابتدا میں ایک شخص ایک گردشی میز پر ٹھہرا ہوا ہے۔ اگر شخص اس جگہ بیٹھ جائے تو کس طرح جمود کے معیار اور زاویائی معیار حرکت میں تبدیلی آئے گی؟
9. تانبے کا کرہ اور لکڑی کا کرہ دونوں ایک ہی کمیت کے ہیں۔ قطر کے لحاظ سے کس کے جمود کا معیار اثر زیادہ ہو گا۔
10. ٹارک کی تعریف کرو۔

6.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. زاویائی معیار حرکت کی بقائے اصول کو بیان اور ثابت کرو۔

2. زاویائی معیار حرکت کی بقائے اصول کے چند اطلاق لکھیے۔

3. زاویائی معیار حرکت کی بقائے اصول اطلاق نظام ہائے خردبین وکلاں بینی پر نوٹ لکھیے۔

6.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. بقائے زاویائی معیار حرکت کے اصول کو بیان کرو اور ثابت کیجیے۔ بقائے زاویائی معیار حرکت کے اصول کے اطلاق کو تفصیل سے سمجھایئے۔

6.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1۔ 100 rmp کی شرح ایک افقی پٹی انتصابی محور پر گردش لگاتی ہے۔ محور سے 5cm کے فاصلہ پر ایک موم کا ٹکڑا چپکایا جاتا ہے جس کی کمیت 20 گرام ہے اگر پٹی کے جمود کا معیار اثر $2X10^{-4}kgm^2$ تب پٹی کی گردش کی نئی تعدد دریافت کرو۔

(جواب:80 rpm)

2۔ ایک آئس اسکیٹر جس کے ابتدائی جمود کا معیار اثر $5kgm^2$ ہے خود کے گرد ایک زاویائی رفتار سے ایک چکر فی سیکنڈ سے گھوم رہا ہے۔ تھوڑے وقفے کے بعد اگر اس کے جمود کا معیار اثر گھٹ کر $1kgm^2$ ہو جائے تو اس کی زاویائی رفتار معلوم کیجیے۔

(جواب: $\omega = 10 rad/sec$)

3۔ فرض کرو کہ زمین کے ایک لخت سکڑنے سے اس کے جمود کا معیار اثر اپنی موجودہ قیمت کا ایک تہائی ہو جاتا ہے تو بتاؤ کہ موجودہ 24 گھنٹوں والا دن بڑھ کر اور کتنا لمبا ہو جائے گا؟

(جواب:8 گھنٹے)

4۔ گرد و غبار کے بادل پر مشتمل ایک ستارے کا نصف قطر $10^{25}rm$ میٹر ہے۔ اس کی زاویائی رفتار ایک چکر فی گھنٹہ ہے اس کی تکثیف پر اس کا نصف قطر اگر $5X10^3m$ میٹر ہو جائے تو اس کی زاویائی رفتار معلوم کیجیے۔

5۔ گھومنے والی میز کے مرکز پر ایک شخص اپنے ہاتھوں کو افقی وضع میں پھیلائے ہوئے کھڑا ہے اور اس کے ہر ہاتھ میں 5kg کا ایک وزن بھی ہے۔ اس کو ایک چکر فی سکنڈ کی زاویائی رفتار سے ایک انتصابی محور کے گرد گھمانا شروع کیا گیا۔ اگر یہ شخص اپنے دونوں ہاتھ نیچے کی جانب سیدھا کرلے تو اس کی زاویائی رفتار کتنی ہوگی؟ شخص کے جمود کے معیار اثر کو $20kgm^2$ مان لیجیے جو مستقل رہتا ہے۔ گردشی محور سے وزن کا ابتدائی فاصلہ ایک میٹر اور آخری فاصلہ 0.5m ہے۔

(جواب $\omega = 2.4 rad/sec$)

6۔ ایک ڈانسر انتصابی محور میں 1200pm کے ساتھ اپنے بازو باہر کی طرف کر کے گھومتا ہے بازو کو موڑنے پر جمود کا معیار اثر

40٪ کم ہوتا ہے۔ نئ گردشی کی شرح دریافت کرو۔

7۔ ایک گھماؤوی پہیہ پر 100J کا کام کرکے اس کی زاویائی رفتار 60rpm سے 180rpm کردی گئی ہے۔ پہیے کی جمود کا معیار اثر دریافت کرو۔

8۔ ایک بڑا ٹھوس استوانہ جس کی کمیت 2kg اور نصف قطر 0.5m ہے، بے رگڑ ٹیکنوں پر اپنے محور کے گرد گھومتا ہے۔ اس کی زاویائی رفتار 3rad/sec ہے۔ 0.5m کمیت کی لگدی (Putty) کے ایک چھوٹے سے ٹکڑے کو 10m/sec کی ابتدائی رفتار سے استوانہ کی طرف پھینکا گیا۔ ٹکر کے بعد یہ ٹکڑا استوانہ کے کنارے سے چپک گیا۔ مشترکہ نظام کی زاویائی رفتار کو محسوب کیجیے۔

(جواب: 10rad/sec)

6.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. College Physics by Sears.F.W.& Zemansky.M.W. Wesley Publishing Co.Inc.London
2. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta Dhanpat Rai Publications
3. Mechanics by Mathur .D.S,S.Chand Publication
4. Modern College Physics by White.H.E. East West Press Pvt.Ltd New Delhi
5. Physics Matter Energy and Univers by Hruwell G.P.&Legge.G.J.F. East West Press Pvt.Ltd.New Delhi
6. Physics Part I by Resnik.R &Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi
7. Physics the pioneer science Vol.I by Taylor .L.W. Dover Publication
8. Technical Physics by Bueche.F ,Harper &Row Publication,New York
9. Unified Physics Vol-I,Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath &Co.Meerut

اکائی 7۔ گردشی حرکت

(Rotational Motion)

اکائی کے اجزا

7.0 تمہید

7.1 مقاصد

7.2 گردشی حرکت

7.2.1 زاویائی رفتار

7.2.2 زاویائی اسراع

7.3 مستقل زاویائی اسراع کے ساتھ گردش

7.4 ٹارک

7.4.1 ٹارک اور گردشی جسم کے زاویائی اسراع میں تعلق

7.5 زاویائی معیار حرکت

7.5.1 ذرات کے نظام کا زاویائی معیار حرکت

7.6 ٹارک اور زاویائی معیار حرکت کے مابین تعلق

7.7 گردشی حرکت میں کام اور طاقت

7.8 حل شدہ مثالیں

7.9 اکتسابی نتائج

7.10 کلیدی الفاظ

7.11 نمونہ امتحانی سوالات

7.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

7.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

7.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

7.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

7.12 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

7.0 تمہید (Introduction)

میکانیات کی وہ شاخ ہے جو حرکت کو بیان کرتی ہے۔ گردشی حرکت آج کے دور میں استعمال ہونے والی مشینوں کی ایک اہم خصوصیت ہے۔ ہمیں کسی ایسی مشین سے سابقہ نہیں پڑتا، مثلاً سیدھی سادی بیل گاڑی اپنی انتقالی حرکت کے لیے پہیے کی گردشی حرکت کو استعمال کرتی ہے۔اس سے قبل کہ ہم گردش کرنے والے اجسام کی حرکیاتی مجردں کی تفصیل میں جائیں بہتر ہو گا کہ ان بنیادی اصولوں کا اعادہ کرلیں جن میں زاویائی رفتار، زوائی اسراع، زاویائی معیار حرکت، ٹارک پر بحث کی گئی ہے۔

7.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی گردش کرنے والے اجسام کے حرکت پر بحث کرتی ہے۔اس اکائی میں:

i. گردشی حرکت کی تعریف کو بیان کیا ہے۔

ii. زاویائی رفتار اور زاویائی اسراع کی تعریف کی گئی ہے۔

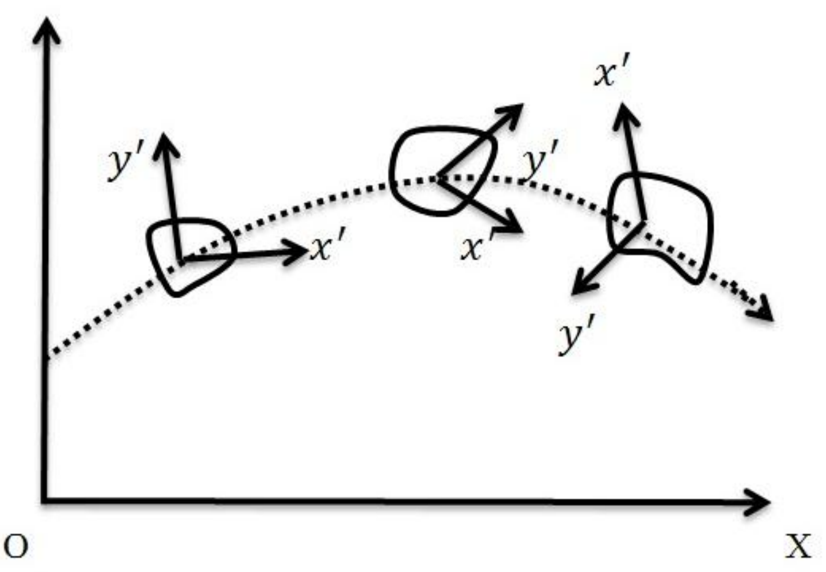
iii. ٹادک کی تعریف کو بیان کیا ہے۔

iv. ٹارک اور زاویائی معیار حرکت کے مابین تعلق کو بتایا گیا ہے۔

v. گردشی حرکت میں کام اور طاقت کی مساواتوں پر بحث کی گئی ہے۔

7.2 گردشی حرکت (Rotational Motion)

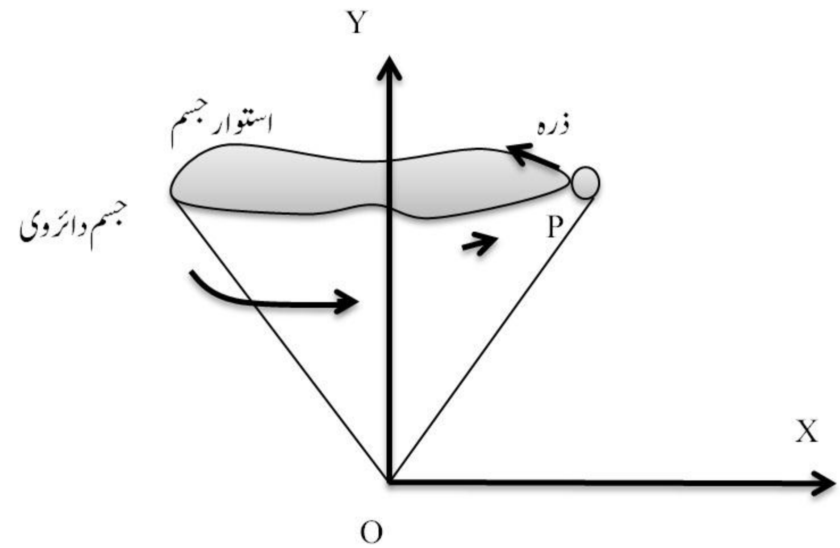
گردشی حرکت آج کے دور میں استعمال ہونے والی مشینوں کی ایک اہم خصوصیت ہے۔ ہمیں کسی ایسی مشین سے سابقہ نہیں پڑتا، مثلاً سیدھی سادی بیل گاڑی اپنی انتقالی حرکت کے لیے پہیے کی گردشی حرکت کو استعمال کرتی ہے۔ ایک انتہائی عام قسم کی حرکت جو کسی استوار جسم سے سرزد ہو سکتی ہے۔ انتقال اور گردش کا مجموعہ ہوتی ہے۔ ایک گھومتے ہوئے (Rotatory) محترک جسم کی حرکت کو بیان کرنے کے لیے ہمیں اس کے مقام اور حوالے کے فریم کے لحاظ سے اس کی سمت کی صراحت کرنی پڑتی ہے۔ استوار جسم کی حرکت پر غور کیجیے۔ جیسے شکل (7.1) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل(7.1)ایک استواری جسم کی گردشی اور انتقادی حرکت

جسم جیسے جیسے حرکت کرتا ہے۔تب حوالے کا فریم(x^1, y^1)اپنی سمت کو(XY)کے لحاظ سے بدلتا رہتا ہے۔ جسم بھی حرکت کر رہا ہے اور گھوم بھی رہا ہے۔ جسم کے مقام کو بتانے کے لیے ہمیں نقطہ 'O' کے لحاظ سے جسم کے حد کا تعین کرنا ہوگا اور جمودی(Inertial) فریم x, y کے لحاظ سے جسم کے فریم x^1, y^1 کی سمت کی بھی صراحت کرنی ہوگی۔

اجسام کسی متعینہ محور کے گرد گھومتے ہیں تو ان کی حرکت بالکل سادہ گردشی ہوتی ہے اور انتقالی حرکت مفقوم رہتی ہے جیسا کہ شکل (7.2)میں دکھایا گیا ہے۔

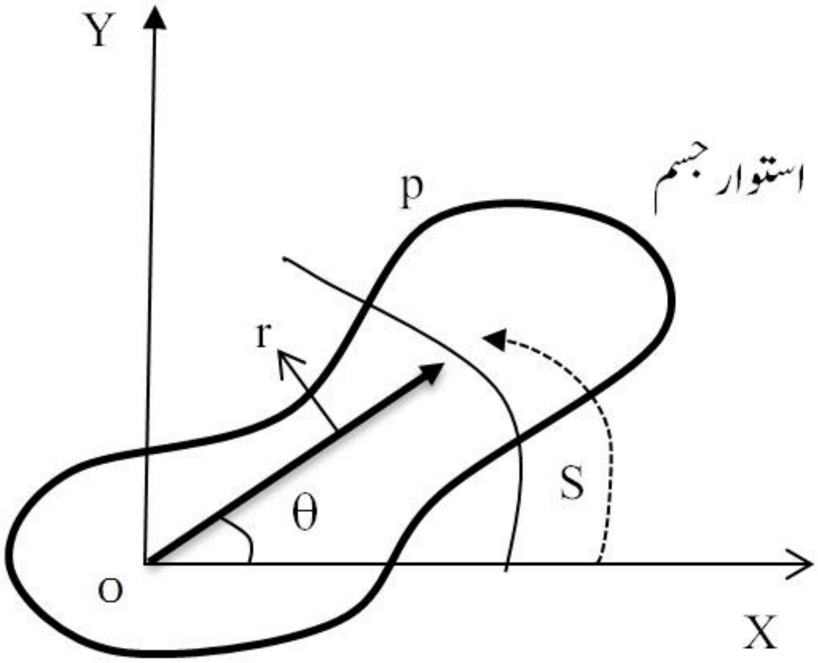


شکل7.2ایک استواری جسم y محور کی گردش

اس شکل میں جسم محور y– کے گرد گھوم رہا ہے۔ جسم کا ہر ذرہ ایک دائرے میں حرکت کر رہا ہے۔ جسم کے ذرات کے دائروی راستوں کے مراکز خط مستقم OY پر واقع ہوتے ہیں۔ یہاں OY گردش کا محور کہلاتا ہے۔ اب ہم استوار جسم کی گردش کو اس حرکت کی امتیازی خصوصیات کے حامل متغیروں کی تعریف کے ذریعے بیان کریں گے۔ گردش کی اس وصف کو گردشی حرکیات مجردہ کہتے ہیں۔

7.2.1 زاویائی رفتار (Angular Velocity)

استوار جسم کی گردشی حرکت پر ایک ذرہ محور کے جو نقطہ 'O' سے گزرتا ہو جیسا کہ شکل (7.3) میں دکھایا گیا ہے۔

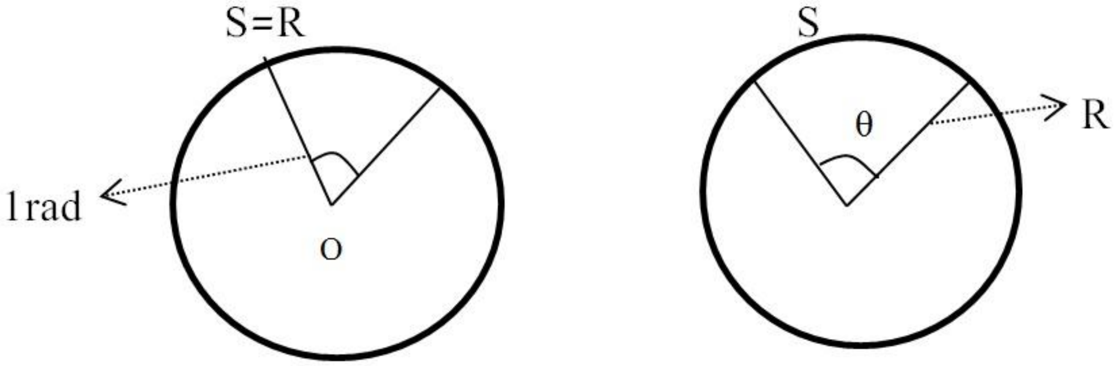


شکل (7.3)

شکل (7.3) نقطہ 'O' سے گزرنے والا ذرہ محور کے گرد استوار جسم کی گردشی کے لحاظ سے خط OP کے ساتھ گھومتا ہے۔ گردشی استوار جسم کی ذرہ خط OP فضا میں ذرہ حوالے کے خط سے زاویہ θ جسم مقام تعین OX سے بناتا ہے۔ θ کو ریڈیانس (Radians) میں تعریف کرنے سے استوار جسم کی خالص گردشی حرکت کی مساواتیں بہت آسان ہوتی ہیں۔ دائرے کی ایک قوس سے جس کا طول دائرے کے نصف قطر کے برابر ہو، دائرے کے مرکز پر بننے والا زاویہ ایک ریڈین (Radian) کہلاتا ہے۔

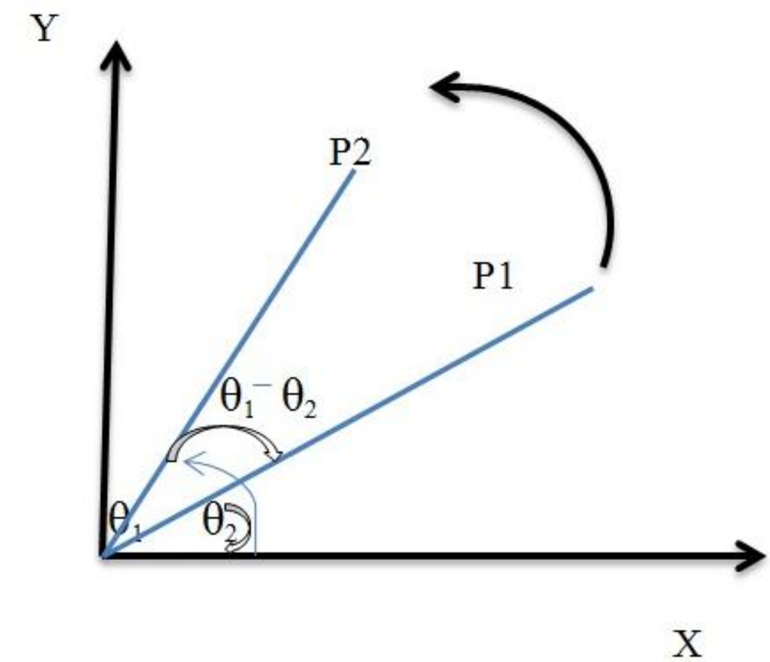
طول 'S' والی قوس سے 'R' نصف قطر والے دائرے کے مرکز پر بننے والا زاویہ اگر 'θ' ہو تو تب

$$\boxed{\theta = \frac{S}{R} radian}$$



شکل(7.4)ریڈیان کی تعریف

شکل(7.5)میں گردش کرنے والے جسم کے حوالے کا خط OP وقت t_1 پر خط OX ایک زاویہ θ_1 دکھاتا ہے اور اس کے کچھ ہی دیر بعد وقت t_2 پر OP کا بنا ہوا زاویہ θ_2 ہوتا ہے۔



شکل(7.5)گردشی استواری جسم کا زاویائی نقل مکان

اوسط زاویائی رفتار 'ω' ہوتی ہے۔

تب ω

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

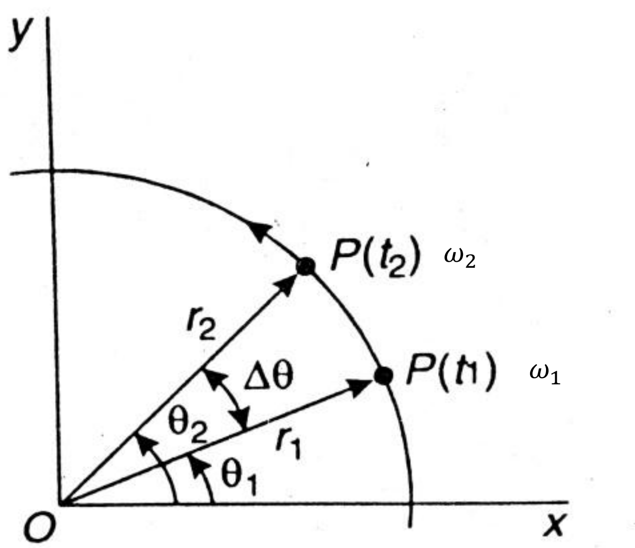
آنی زاویائی رفتار 'ω' اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$\omega = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

جسم استوار ہوتا ہے اس لیے جسم پر کسی نقطے کو مبدا سے ملانے والا ہر خط ایک دیے ہوئے وقت میں ہی ایک ہی زاویہ میں گھومے گا۔ لہٰذا پورے جسم کے لیے زاویائی رفتار جسم کی ایک خصوصیت بن جاتی ہے۔ اگر 'θ' کو ریڈینس میں ظاہر کیا جائے تو زاویائی رفتار کو Radians/sec سے ظاہر کرنا ہوگا۔

7.2.2 زاویائی اسراع (Angular Acceleration)

شکل (7.6) میں گردش کرنے والے جسم کی زاویائی رفتار وقت کے لحاظ سے بدلتی ہے تو جسم میں زاویائی اسراع (Angular Acceleration) پایا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ وقت t_1 اور t_2 پر جسم کی آنی زاویائی رفتاریں ω_1 اور ω_2 ہیں۔ تب اوسط زاویائی اسراع 'α' اس طرح ہوگا۔



شکل (7.6)

(Source: Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta.Unified Physics Vol-I,Mechanics Jai Prakash Nath &Co.Meerut)

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

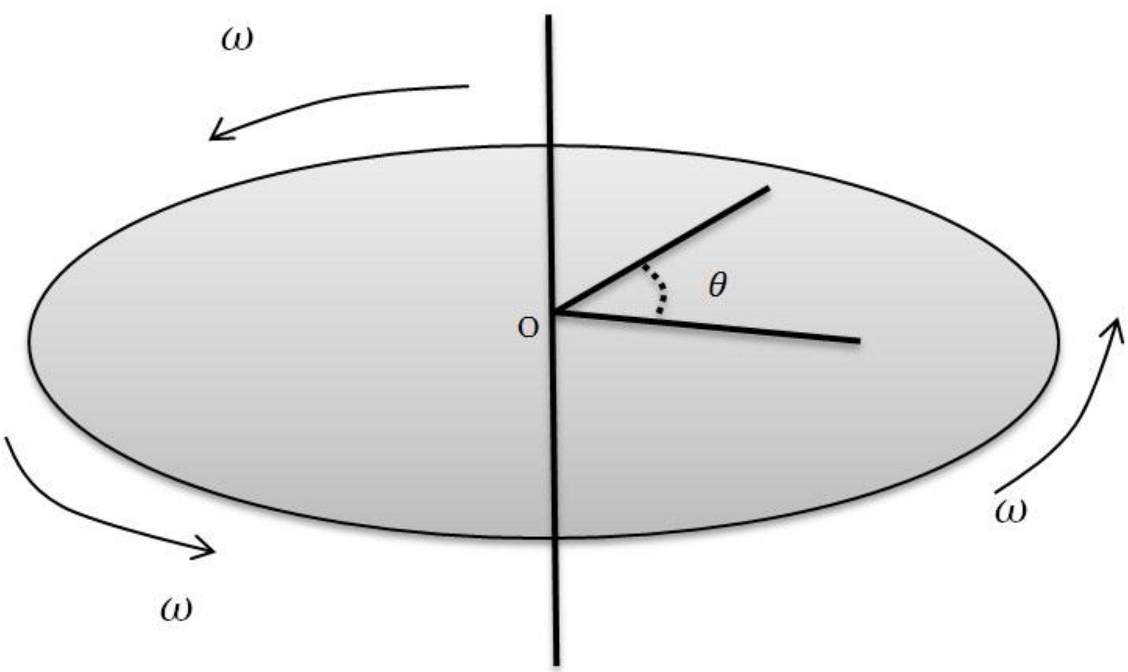
آنی زاویائی اسراع α کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے کہ

$$\alpha = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

زاویائی اسراع α کی اکائی rad/sec^2 میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

7.3 مستقل زاویائی اسراع کے ساتھ گردش (Rotation with Constant Angular Acceleration)

اگر ہم گردشی حرکت پر غور کرتے وقت اس کے ساتھ ایک مستقل زاویائی اسراع کو اس کی ایک خصوصیت کے طور پر متلک کردیں تو انتقالی حرکت اور گردشی حرکت میں مماثلت کو سمجھا جاسکتا ہے۔ جیسے شکل (7.7) میں گردش کرنے والے ایک جسم کی زاویائی رفتار کی مقدار میں وقت کے مساوی وقفوں کے ساتھ مساوی تبدیلی عمل میں آرہی ہے۔ تب جسم ایک مستقل اسراع کے ساتھ متحرک ہے۔



شکل (7.7)

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \tag{7.1}$$

$$d\omega = \alpha dt \tag{7.2}$$

دونوں جانب تکملہ لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int d\omega \; = \; \alpha \int dt \tag{7.3}$$

$$\therefore \omega \; = \; \alpha t + C_1 \tag{7.4}$$

تکملی مستقل(Integrate Constant) C_1 کی قیمت معلوم کرنے کے لیے وقت t=0 پر ω_0 = ω ہوتا ہے۔تب

$$c_1 = \omega_0$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \tag{7.5}$$

وقت کے کسی لمحے 't' پر ox کے لحاظ سے جسم کے زاویائی نقل مکان ϴ θ' کو معلوم کرنے کے لیے مساوات(7.5) کو تفرق (Differentiate) کی شکل میں دوبارہ لکھ کر اس کا تکمیلہ لیا جائے گا تب

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha t \tag{7.6}$$

$$d\theta = \omega_0 dt + \alpha t dt \tag{7.7}$$

مساوات(7.7) کا تکملہ لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int d\theta = \omega_0 \int dt + \alpha \int t \, dt \tag{7.8}$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} + c_2 \tag{7.9}$$

تکمیلی مستقل C_2 کی قیمت کو معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ وقت t=0 پر 0=θ تب $C_2 = 0$

لہٰذا

$$\theta = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \tag{7.10}$$

زاویہ اسراع کو ہم لکھ سکتے ہیں کہ

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \tag{7.11}$$

$$\omega d\omega = \alpha d\theta \tag{7.12}$$

اس مساوات کو تکملہ لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\alpha \int d\theta = \int \omega d\omega$$

$$\alpha\theta = \frac{\omega^2}{2} + C_3 \tag{7.13}$$

فرض کرو کہ t=0 پر θ=0 اور $\omega = \omega_0$ ہوتے ہیں تب

$$C_3 = -\frac{1}{2}{\omega_0}^2 \tag{7.14}$$

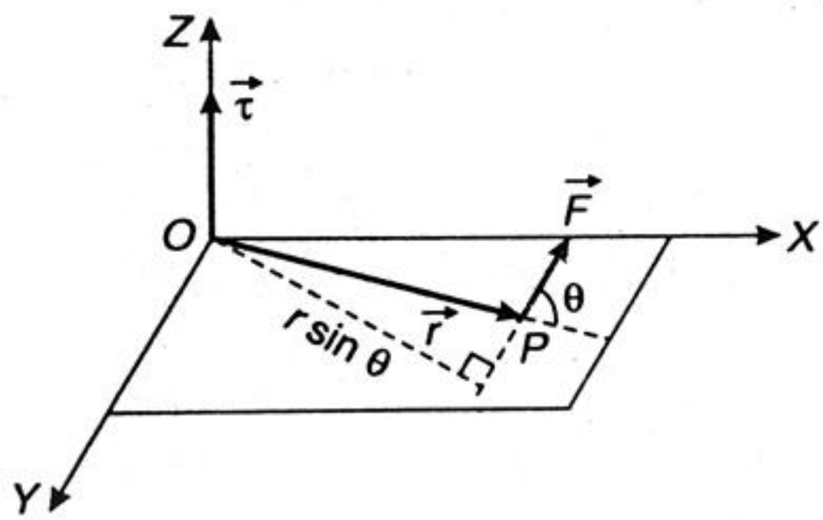
$$\theta\alpha = \frac{\omega^2}{2} - \frac{{\omega_0}^2}{2} \tag{7.15}$$

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha\theta \tag{7.16}$$

7.4 ٹارک (Torque)

فرض کرو کہ کسی جمودی حوالے فریم کا مبدا 0 ہے اس فریم کے لحاظ سے P کے محل کا سمتیہ (Position Vector) r ہے۔ اگر ذرے میں قوت کی وجہ سے گردشی حرکت ہوتی ہو تو مبدا '0' کے لحاظ سے ذرے پر عمل کرنے والے ٹارک τ کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{7.17}$$



شکل(7.8)ذرے Pپر عمل کرنے والی قوت اس کو گھماتی ہے

(Source: R.K.Gaur & S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

ٹارک ایک سمتی مقدار ہے اس کی قدر ہوتی ہے۔

$$\tau = rF\, sin\, \theta \qquad (7.18)$$

جہاں $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کے درمیان کا زاویہ θ ہے۔

ٹارک کا ابعادی ضابطہ $[M^2L^2T^{-2}]$

ٹارک کی اکائی N.m(نیوٹن میٹر) ہے۔

مساوات(7.17) سے ظاہر ہے کہ پیدا شدہ ٹارک کا انحصار نہ صرف قوت کی قدر اور سمت پر ہے بلکہ مبدا کے لحاظ سے اس کے نقطہ عمل پر یعنی سمتیہ $\vec{r}$ پر بھی ہے۔ خاص طور پر جب ذرہ P مبدا پر ہو، اور $\vec{F}$ کا خط عمل مبدا سے گزرتا ہو تو صفر ہوتا ہے اور مبدا کے گرد ٹارک بھی صفر ہو جاتا ہے۔

τ کی قدر کی مساوات(7.18) کو لکھا جا سکتا ہے۔

$$\tau = (r\, sin\, \theta)F = Fr_{\perp} \qquad (7.19)$$

یا

$$\tau = r(F\,sin\,\theta)F = rF_{\perp}$$

7.4.1 ٹارک اور گردشی جسم کے زاویائی اسراع میں تعلق

(Relation betweenTorque and Rotational body of Angular Acceleration)

کسی دیے ہوئے محور کے گرد ایک جسم کا زاویائی معیار حرکت $\vec{L}$ ہوتا ہے۔

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (7.20)$$

تفرق (Differentiate) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

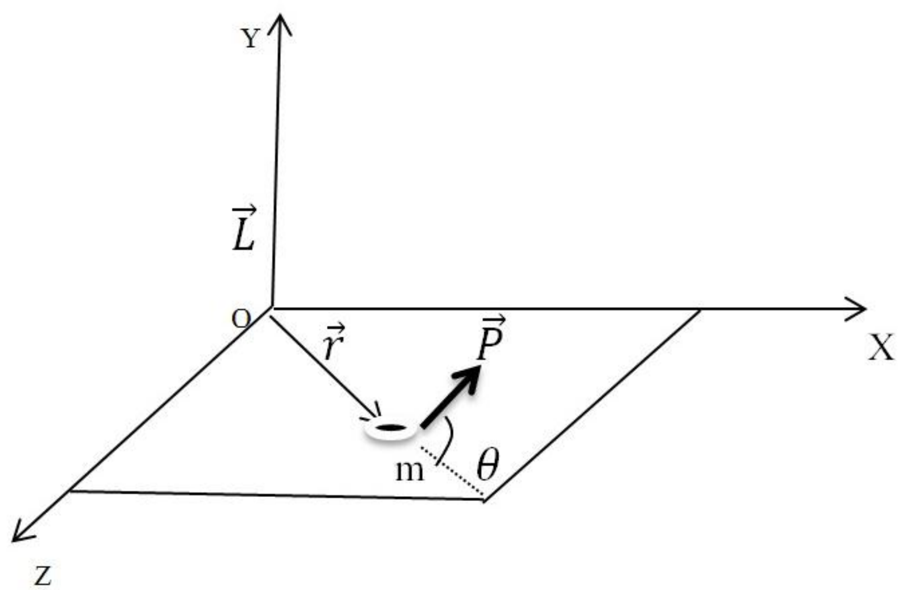
$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} \qquad (7.21)$$

لہٰذا

$$\tau = \frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} \qquad (7.22)$$

$$\tau = I\alpha \qquad (7.23)$$

7.5 زاویائی معیار حرکت (Angular Momentum)



شکل 7.9

خطی معیار حرکت کا مماثل گردشی حرکت میں زاویائی معیار حرکت ہے۔ زاویائی معیار حرکت کی تعریف کرنے کے لیے

شکل(7.9) پر غور کیجیے کہ m کمیت $\vec{P}$ خطی معیار حرکت والے ایک ذرے پر مقام ایک جمودی حوالے فریم کے مبدا '0' کے لحاظ سے $\vec{r}$ ہے۔

شکل(7.9) 'O' کے گرد گھومنے والے ذرہ 'P' پر عمل پیرا خطی معیار حرکت مبدا '0' کے ذرے کے زاویائی معیار حرکت $\vec{L}$ کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ

$$\vec{L} = \vec{r}x\vec{P} \qquad (7.24)$$

زاویائی معیار حرکت ایک سمتی مقدار ہے جس کی قدر ہوتی ہے۔

$$L = rP\sin\theta \qquad (7.25)$$

یہاں $\vec{r}$ اور $\vec{P}$ کادرمیانی زاویہ θ ہے۔ $\vec{L}$ کی سمت $\vec{r}$ اور $\vec{P}$ کی حاصل مستوئی کے اعلیٰ القوائم (Perpendicular) ہے۔

مساوات(7.24) کو تفرق کرنے پر

$$\overrightarrow{\frac{dL}{dt}} = \frac{d}{dt}(\vec{r}x\vec{P})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{dp}{dt} + \vec{v} \times m\vec{v} \qquad (7.26)$$

یہاں $\vec{P} = m\vec{v}$ اور $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

مساوات(7.26) کے دائیں جانب کی دوسری مقدار صفر ہے۔ کیوں کہ دو متوازی سمتیوں کا حاصل ضرب صفر ہی ہوتا ہے۔ لہٰذا مساوات(7.26) ہو جاتی ہے۔

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (7.27)$$

مساوات(7.22) اور (7.27) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\tau = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (7.28)$$

7.5.1 ذرات کے نظام کا زاویائی معیار حرکت (Angular Momentum of System of Particle)

ایک ایسے نظام پر غور کریں جو متعدد ذرات پر مشتمل ہو۔ کسی نقطے کے گرد ذرات کے نظام کا مجموعی معیار حرکت اسی نقطے کے گرد انفرادی ذرات کی زاویائی معیار حرکتوں کے سمتی مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔ لہٰذا

$$\vec{L} = \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2} + \overrightarrow{L_3} + ________ \overrightarrow{L_n} \tag{7.29}$$

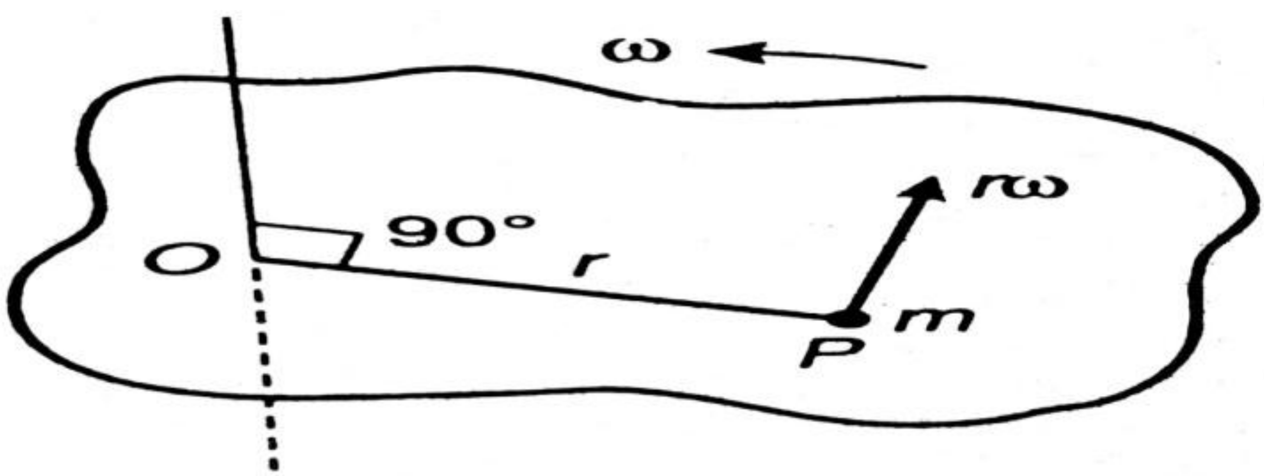
$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{L_i} \tag{7.30}$$

جیسے جیسے وقت گزرتا ہے اسی طرح گردشی نظام کا مجموعی زاویائی معیار حرکت بدل سکتا ہے۔

اس تبدیلی $\frac{dL}{dt}$ کے وقوع میں آنے کے دو ذرائع ہیں۔

i. ذرات کے مابین اندرونی قوتوں کی وجہ سے نظام کے ذرات پر عمل پیرا ٹارک۔

ii. بیرونی قوتوں کی وجہ سے نظام کے ذرات پر عمل پیرا ٹارکس نیوٹن کے تیسرے کلیے کے مطابق ہر عمل رد عمل کی قوتوں کے ایک جوڑ سے پیدا ہونے والا ٹارک صفر ہے۔ اس لیے مجموعی اندرونی ٹارک صفر بن جاتا ہے۔ (نیوٹن کے تیسرے کلیے کی حقیقت یہ ہے کہ اس میں عمل اور رد عمل کی قوتیں نہ صرف ایک دوسرے کے مساوی بلکہ مخالف بھی ہوتی ہے۔

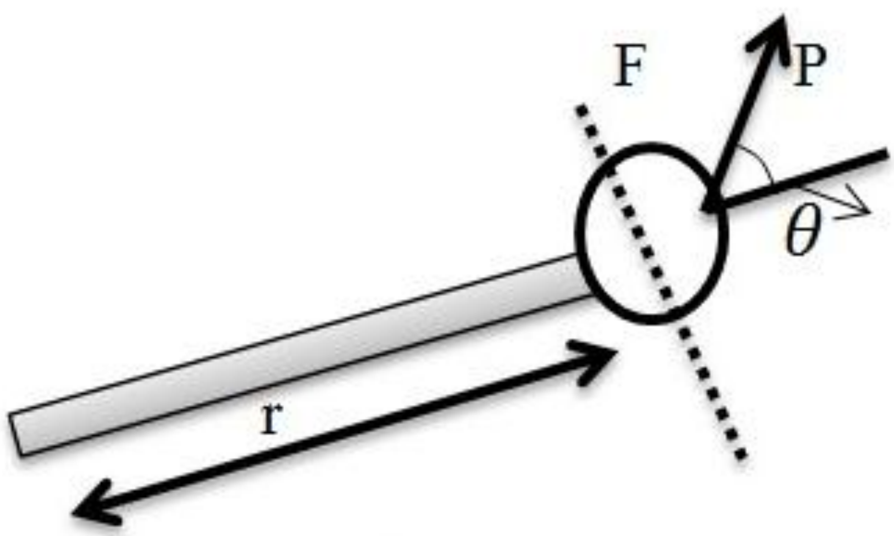


شکل (7.10)

(Source: R.K.Gaur & S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

شکل(7.10)میں ایک سادہ گردشی نظام کو بنایا گیا ہے جہاں r اور $\vec{P}$ کا درمیانی زاویائی 90^o ہے۔

ایک استوار سلاخ 'm' کمیت سلاق کا تول r معیار حرکت p ہے۔



شکل(7.11)

جسم کے زاویائی معیار حرکت کی مقدار ہوتی ہے

$$L = rp \tag{7.31}$$

یہاں $P = mv$ کو مساوات(7.31)میں لکھی جاسکتی ہے۔تب

$$L = rmv \tag{7.32}$$

ہم جانتے ہیں کہ $V = r\omega$

$$L = (mr^2)\omega \tag{7.33}$$

اس مساوات(7.33) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ایک جسم کی زاویائی معیار حرکت کی قدر زاویائی رفتار 'ω' اور ایک ایک مقدار(mr^2) کے حاصل ضرب کے برابر ہے۔ $P = mv$ مطابقت سے یہ مقدار(mr^2) جمودی کمیت 'm' کا کام کرتی ہے۔ یہ مقدار(mr) گھومنے والی کمیت کے جمود کا معیار اثر(Moment of Inertia) کہلاتی ہے۔

7.6 ٹارک اور زاویائی معیار حرکت کے مابین تعلق

(Relation between Torque and Angular Momentum)

ٹارک اور زاویائی معیار حرکت کے مابین تعلق کو حسب ذیل طریقے سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ ایک جسم پر عمل کرنے والی قوت ہوتی ہے۔

$$\vec{F} = \frac{dp}{dt} \tag{7.34}$$

مساوات (7.34) کو دونوں جانب 'r' کے ساتھ سمتی حاصل ضرب (Vector Product) لینے سے۔

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{7.35}$$

یہاں $\tau = \vec{r} \times \vec{F}$ ٹارک ہوتا ہے۔

$$\tau = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{7.36}$$

مساوات $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ کو وقت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{P}\right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} \tag{7.37}$$

چوں کہ $\frac{d\vec{r}}{dt} = v$ ، اور $P = mv$

اس لیے مساوات (7.37) لکھی جاسکتی ہے۔

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{v} \times m\vec{v} \tag{7.38}$$

مساوات(7.38)کے دائیں جانب کی دوسری مقدار صفر ہے۔کیونکہ دو متوازی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب صفر ہی ہوتا ہے۔
تب مساوات(7.38)کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{7.39}$$

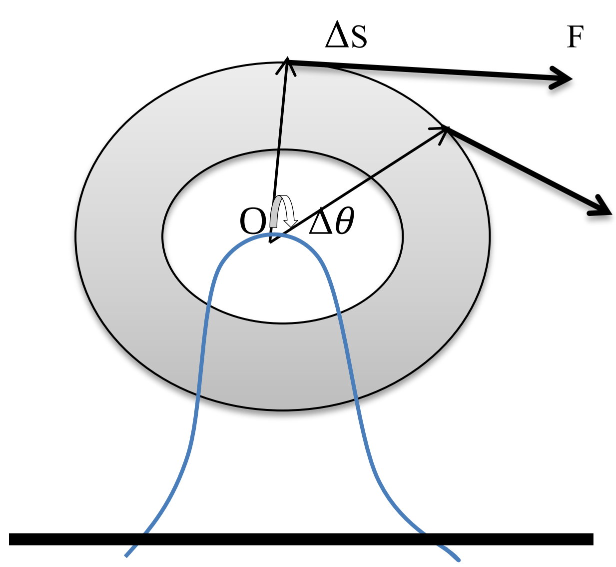
مساوات(7.36)کو مساوات(7.39)میں استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\tau = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{7.40}$$

اوپر کی مساوات(7.40)سے ظاہر ہوتا ہے کہ ذرے کے زاویائی معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح بہ لحاظ وقت اس پر عمل کرنے والے ٹارک کے مساوی ہے۔

7.7 گردشی حرکت میں کام اور طاقت (Work and Power of Rotational Motion)

نصف قطر"R"کے ایک پہیے کے کگر پر ایک قوت F عمل کر رہی ہے جیسے شکل(7.12)میں بتایا گیا ہے۔
فرض کرو کہ پہیا ایک چھوٹے سے زاویہ $\Delta\theta$ سے گھومتا ہے۔اگر $\Delta\theta$ چھوٹا ہو تو اس کا تناظر وقت کے چھوٹے وقفے Δt کے دوران اس پر عمل پیرا قوت کو مستقل مان لیا جاتا ہے۔



شکل(7.12)

تب

$$\Delta\omega = F\Delta S \tag{7.41}$$

$$\Delta S = R\Delta\theta \tag{7.42}$$

مساوات (7.41) اور (7.42) سے

$$\Delta\omega = FR\Delta\theta \tag{7.43}$$

چونکہ $\tau = \mathrm{FR}$ اس لیے مساوات (7.43) کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\Delta\omega = \tau\Delta\theta \tag{7.44}$$

$$d\omega = \tau d\theta \tag{7.45}$$

جسم پر ٹارک τ سے ہوا کل کام۔

$$\int dw = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta \tag{7.46}$$

$$\omega = \tau[\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} = \theta_2 - \theta_1 \tag{7.47}$$

$$\omega = \tau d\theta \tag{7.48}$$

جہاں θ زاویائی نقل مکان ہے۔ مساوات (7.48) کو وقت کے لحاظ سے differentiate کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{d\omega}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} \tag{7.49}$$

جہاں طاقت $P = \frac{d\omega}{dt}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ تب مساوات (7.47) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$P = \tau\omega \tag{7.50}$$

اس مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی عامل کے ذریعے عمل پیرا ٹارک سے نمو پانے والی آنی طاقت(Instantaneous Power)ٹارک اور آنی زاویائی رفتار(Instantaneous Angular Velocity)کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے۔

7.8 حل شدہ مثالیں(Solved Examples)

حل شدہ مثال1

ایک پہیہ $\frac{1}{5}$ سیکنڈ میں 3 چکر مکمل کرتا ہے۔اس کی اوسط زاویائی رفتار معلوم کیجیے۔

حل: $\frac{1}{5}$ سیکنڈ میں زاویائی نقل مکان ہوتا ہے۔

$$\theta = 3(2\pi) = 6\pi$$

اور زاویائی رفتار ہوتی ہے۔

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{6\pi}{1/5}\frac{rad}{sec}$$
$$\omega = 30\pi\ radsec^{-1}$$

حل شدہ مثال2

ایک پہیہ 1200 چکر فی منٹ سے گھوم رہا ہے۔اس کی حرکت کا مستقل زاویائی اسراع $2\ rad\ sec^{-2}$ ہے۔وقت t=2sec کے بعد زاویائی نقل مکان معلوم کیجیے۔

حل:

ہم جانتے ہیں کہ $\theta = w_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$$a = \frac{\cancel{1200}}{\cancel{60}}\frac{rad}{sec} = 20rad/sec$$

$$\omega_0 = 2\pi n = 2\pi \times 20$$

$$\omega_0 = 40\pi radsec^{-1}$$

$$\theta = 40\pi radsec^{-1} \times 2\text{sec} + \frac{1}{2}(2radsec^{-2})(2sec)^2$$

$$\theta = 80\pi + 4$$

$$\theta = 80 \times 3.14 + 4$$

$$\theta = 255.2\ rad$$

7.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- جسم پر عمل کرنے والی قوت کی وہ صلاحیت جو جسم میں مروڑ پیدا کرے ٹارک کہلاتی ہے۔
- جسم کی مستوی کے علی القوائم محور کے گرد گردش کرنے والے اس جسم کا زاویائی معیار حرکت $L = I\omega$ کے برابر ہوتا ہے۔
- زاویائی اسراع کی مدد سے کسی ذرے کی گردشی حرکت کو بیان کیا جاسکتا ہے گردش کرنے والے جسم کی زاویائی رفتار ω کو $\frac{d\theta}{dt}$ سے اور زاویائی اسراع α کو $\frac{d\omega}{dt}$ سے حاصل کیا جاتا ہے۔
- نظام کا مجموعی معیار حرکت اسی نقطے کے گرد انفرادی ذرات کے زاویائی معیار حرکتوں کے سمتی مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L_i}$$

- ٹارک اور گردشی جسم کے زاویائی اسراع میں تعلق

$$\tau = I\alpha$$

- ٹارک اور زاویائی معیار حرکت کے مابین تعلق

$$\tau = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- گردشی حرکت میں کام اور طاقت کے مابین تعلق

$$P = \tau\omega$$

7.10 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **جمود(Inertia):** کسی جسم کی وہ اندرونی خاصیت جس کی بنا پر وہ اپنی حالت میں ہونے والی تبدیلی کی مزاحمت کرتا ہے۔
- **مکافی حرکت(Parabolic Motion):** خط مکافی کے ساتھ ایک مرحمی کی حرکت۔
- **ٹارک(Torque):** جسم پر عمل کرنے والی قوت کی وہ صلاحیت جو جسم میں مروڑ پیدا کرے۔

7.11 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

7.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. زاویائی اسراع کی مساوات........................ ہے۔

2. ٹارک (Torque) سے کیا مراد ہے؟

3. زاویائی معیار حرکت $\vec{L} =$ .... ہے۔

a) $\vec{r}/\vec{P}$ b) $\vec{r}+\vec{P}$ c) $\vec{r}\times\vec{P}$ d) $\vec{P}/\vec{r}$

4. زاویائی اسراع کی تعریف کیجیے۔

5. ریڈیان سے کیا مراد ہے۔

6. زاویائی رفتار (Angular Velocity) کی مساوات .... ہے۔

7. زاویائی رفتار کی اکائی........................ ہے۔

8. ٹارک اور گردشی جسم کے زاویائی اسراع میں تعلق........................ ہے۔

9. ٹارک اور زاویائی معیار حرکت کے مابین تعلق .... ہے۔

7.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. گردشی جسم کے زاویائی معیار حرکت اور ٹارک میں تعلق قائم کرنے والا فارمولہ معلوم کیجیے۔

2. گردشی حرکت کرنے والے جسم پر کام اور طاقت کے ضابطوں کو اخذ کیجیے۔

7.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مستقل زاویائی اسراع کے ساتھ گردش کرنے والے ذرے کے زاویائی نقل مکان کے لیے ایک ضابطہ اخذ کیجیے۔

2. زاویائی معیار حرکت، ٹارک اور زاویائی اسراع کو بیان کریں۔ گردشی جسم کے زاویائی معیار حرکت اور ٹارک میں تعلق بتانے والا فارمولہ معلوم کیجیے۔

7.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک میٹر قطر والا ایک پہیہ حالت سکون سے یکساں اسراع کے ساتھ حرکت کرتے ہوئے 10sec میں $60 rad sec^{-1}$ کی زاویائی

رفتار حاصل کرتا ہے۔اس دوران اس کازاویائی اسراع اور طے کردہ زاویہ معلوم کیجیے۔

($L = 6rads^2$ $\theta = 300rad$:جواب)

2. حالت سکون سے شروع کرتے ہوئے ایک پہیے کی رفتار 10sec میں sec / 500 rad ہو جاتی ہے۔اس کازاویائی اسراع معلوم کیجیے۔ ($314radsec^{-2}$:جواب)

3. ایک پہیہ کسی ابتدائی زاویائی رفتار sec / 5 rad سے گردش کر رہا ہے۔10sec کے بعد اس کی زاویائی رفتار $15\ rad\ sec^{-1}$ ہو گی۔اوسط زاویائی اسراع معلوم کیجیے۔ ($1radsec^{-2}$:جواب)

7.12 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. College Physics by Sears.F.W.& Zemansky.M.W. Wesley Publishing Co.Inc.London
2. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta Dhanpat Rai Publications
3. Mechanics by Kittel,M.C.Graw Hill
4. Mechanics by Mathur .D.S,S.Chand Publication
5. Physics by Zafiratos.C, John wesiey &Sons. Inc. New York
6. Physics Part I by Resnik.R &Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi
7. Physics the pioneer science Vol.I by Taylor .L.W. Dover Publication
8. Technical Physics by Bueche.F ,Harper &Row Publication,New York
9. Unified Physics Vol-I,Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath &Co.Meerut

اکائی 8۔ کشش ثقل

(Gravitation)

اکائی کے اجزا

8.0 تمہید

8.1 مقاصد

8.2 میدانی مفہوم

8.3 نیوٹن کا کشش ثقل کا کلیہ

8.4 ثقلی میدانی طاقت

8.5 ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کی تبدیلی

8.5.1 "g" میں تبدیلی بلندی کے ساتھ

8.5.2 "g" میں تبدیلی گہرائی کے ساتھ

8.6 آفاقی کشش ثقلی مستقل (G) کی تخمین

8.6.1 کیونڈش کا طریقہ

8.6.2 بوائیز کا طریقہ

8.7 ثقلی میدان میں توانائی بالقوہ اور ثقلی قوت

8.8 حل شدہ مثالیں

8.9 اکتسابی نتائج

8.10 کلیدی الفاظ

8.11 نمونہ امتحانی سوالات

8.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

8.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
8.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
8.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات
8.12 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

8.0 تمہید(Introduction)

ہم سبھی کا عام تجربہ ہے کہ ایک پتھر جیسے اوپر پھینکا جاتا ہے وہ زمین پر پھر واپس آتا ہے۔ یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ کیوں پتھر پھر زمین پر لوٹتا ہے کیوں نہ یہ اوپر ہی اوپر چلا جاتا ہے۔ فلسفی ارسطو نے اس کی وجہ یہ بتائی تھی کہ پتھر کا تعلق زمین سے ہے اسی لیے یہ واپس زمین پر آتا ہے۔ بالاخر نیوٹن نامی سائنسداں نے یہ ثابت کر دیا کہ پتھر اور چاند دونوں زمین کی ثقلی قوت کی وجہ سے زمین کے مرکز کی طرف کشش کرتے ہیں۔

نیوٹن نے پہلی مرتبہ یہ اخذ کیا کہ زمین اجسام سے پتھر اور آسمانی اجسام جیسے، چاند، دونوں کے لیے ایک ہی طبعی کلیات کا اطلاق ہوتا ہے لیکن پھر کیوں چاند زمین سے نہیں ٹکراتا ہے جیسے پتھر ٹکراتا ہے۔ ہندوستانی سائنسداں آریا بھٹا(Aryabhata) نے اپنی کتابAryabhatiya میں چاند اور سیاروں کی حرکت پر بہت کچھ لکھا ہے۔ نیوٹن کے دور سے پہلے سے ہی ہندوستانی تحقیق کاروں نے اسے گروتواکرشن(गुरुत्वाकर्षण)کانام لیا۔

مغرب کے تمام سائنسداں جیسے ٹولمی(Ptolmey)اور یونانی فلسفہ دانوں کا یہ نظریہ تھا کہ تمام بڑے بڑے اجسام (Celestial Bodies)زمین کے اطراف گردش کرتے ہیں۔ اس نظریے کوGoecentric Theory کہتے ہیں۔ کوپرنکس نے 1543 میں یہ طے کیا کہ سورج تمام کائنات کا مرکز ہے اور زمین اس کے اطراف گردش کرتی ہے جسےHelio Centric Theory کہتے ہیں۔ اس کو بنیاد مان کر John Kepler نے سیاروں کی حرکت کا مطالعہ کیا۔ اس کی دریافتوں کو کیپلر کے کلیات(Kepler's Law) کہا جاتا ہے۔ نیوٹن نے ان کلیات کو استعمال کرکے نیوٹن کے ثقلی کلیات کو اخذ کیا۔ ان ثقلی کلیات کو استعمال کرتے ہوئے ہم عام طور پر کائنات کا مطالعہ کرتے ہیں۔

8.1 مقاصد(Objectives)

یہ اکائی کشش ثقل کو سمجھاتی ہے۔ اس اکائی میں:

i. میدانی مفہوم، نیوٹن ثقلی کا کلیہ ، ثقلی میدانی طاقت ، ثقلی میدان کی خصوصیات کی تعریفیں کی گئی ہے۔

ii. آفاقی ثقلی مستقلG کی قیمت کو تجربہ سے معلوم کیا گیا ہے۔

iii. بوائیز(Boys)اور کیونڈش (Cavendish) کے تجربی طریقوں سےG کی قیمت کی تخمین کی گئی ہے۔

8.2 میدانی مفہوم (Field Concept)

جب دو اجسام ایک دوسرے سے کچھ فاصلہ پر علاحدہ کیے گئے ہوں تو ان کے درمیان ثقلی میدان ضرور ہوتا ہے۔ ایک جسم کا اثر دوسرے پر ہونے کے لیے کچھ میکانزم ضروری ہوتی ہے۔ ثقلی تصادم کے لیے دو قسم کے مفہوم ہوتے ہیں:

1. کچھ فاصلہ کے مفہوم کا عمل۔
2. میدانی مفہوم۔

1. **فاصلاتی مفہوم کا عمل:** نیوٹن کے کائناتی کلیہ ثقلی کا مفروضہ یہ ہے کہ ثقلی قوت راست طور پر یکایک عمل کرتی ہے جب کہ اگر اجسام ایک دوسرے سے تماس میں ہوں یا بہت زیادہ فاصلہ سے علاحدہ کیے گئے ہوں یہ نظریہ فاصلاتی مفہوم کا عمل کہلاتا ہے۔ پھر بھی یہ نظریہ یہ نہیں سمجھاتا ہے کہ کشش قوت کی منتقلی عمل میں نہیں آتی۔

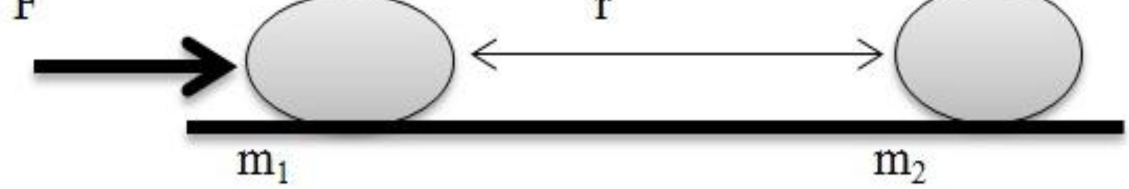
2. **میدانی مفہوم:** میدانی مفہوم کی مدد سے جو مشکلات نیوٹن کے کائناتی کشش ثقلی کلیہ میں پیش آتی ہیں حل کر سکتے ہیں۔ میدان مفہوم سے جسم کی موجودگی کا پتہ لگایا جاسکتا ہے۔ جب کوئی جسم میدان میں رکھا جاتا ہے تب یہ جواب میں کشش قوت دوسرے جسم پر عائد کرتا ہے۔ یہ کشش قوت معیار حرکت اور توانائی ظاہر کرتی ہے۔ لہٰذا میدانی مفہوم درمیانی سطح کا رول ادا کرتا ہے۔

شکل (8.2) کے باہمی ہٹاؤ سے پتہ چلتا ہے کہ زمین کی سطح پر میدان کی قوت ہے۔ مرکز سے مساوی فاصلوں کے نقاط پر میدان کی حدت (Intensity) مقدار میں مساوی ہے اور فاصلے کے بڑھنے سے میدان کی قوت میں کمی ہوتی جارہی ہے۔

ثقلی میدان ایک سمتی میدان ہے۔ وقت کے لحاظ سے اس میدان میں چونکہ تبدیلی نہیں ہوتی، اس لیے اس کو قائم میدان کہا جاتا ہے۔

8.3 نیوٹن کا کشش ثقل کا کلیہ (Newton's Law of Gravitation)

ائزک نیوٹن (Issac Newton) نامی سائنسداں نے 1666ء میں اپنے حرکت کے کلیات اور کیپلر کے سیاروں کی حرکت کے کلیات کا استعمال کرتے ہوئے کائناتی کشش ثقلی کلیہ پیش کیا۔ اس کلیہ کی تعریف یوں کی جاتی ہے۔ "کائنات کا ہر ذرہ دوسرے ذرے کو کشش کرتا ہے یہ قوت کشش دو ذرات کے کمیتوں کے حاصل ضرب کا راست تناسب ہوتی ہے اور ان کے درمیانی فاصلہ کے مربع کے بالعکس تناسب ہوتی ہے۔



شکل 8.1

اگر m_1 اور m_2 دو ذرات کی کمیت ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ 'r' ہے تب قوت کی مقدار

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$$

یہاں G ایک مستقل ہے جو کائناتی یا آفاقی ثقلی مستقل کہلاتا ہے۔

G کی اکائی S.I نظام میں Nm^2/Kg^2، C.G.S نظام میں $dyne\ Cm^2/g^2$

G کا ابعادی ضابطہ

$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

$$G = [M^{-1}L^3T^{-2}]$$

کائناتی ثقلی مستقل 'G' ذرات کے درمیان پائے جانے والے واسطے پر منحصر نہیں ہوتا۔ یہ ہر جگہ تمام کائنات میں مستقل ہوتا ہے اسی لیے یہ کائناتی ثقلی مستقل کہلاتا ہے۔

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{N\,m^2}{kg^2}$$

8.4 ثقلی میدانی طاقت (Strength of Gravitational Field)

کسی ثقلی میدان میں کسی نقطے پر ثقلی میدانی طاقت سے مراد "اس نقطے پر ثقلی قوت فی اکائی کمیت ہے"

اگر 'I' ثقلی میدان کی طاقت 'F' قوت اور 'm' کمیت تب

$$I = \frac{F}{m} \qquad (8.1)$$

ثقلی میدانی طاقت ثقلی میدان کی حدت بھی کہلاتی ہے۔

فرض کرو کہ ایک جسم کی کمیت 'm' ہے زمین سطح کے قریب رکھی گئی ہے۔

ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین 'g' ہے۔

تب اس پر لگنے والی طاقت F=mg

ثقلی میدان طاقت $\frac{F}{m} = \frac{mg}{m}$

ثقلی میدانی طاقت $I = g$

لہٰذا زمین سطح کے قریب ثقلی میدان کی طاقت ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کے مساوی ہوتی ہے۔

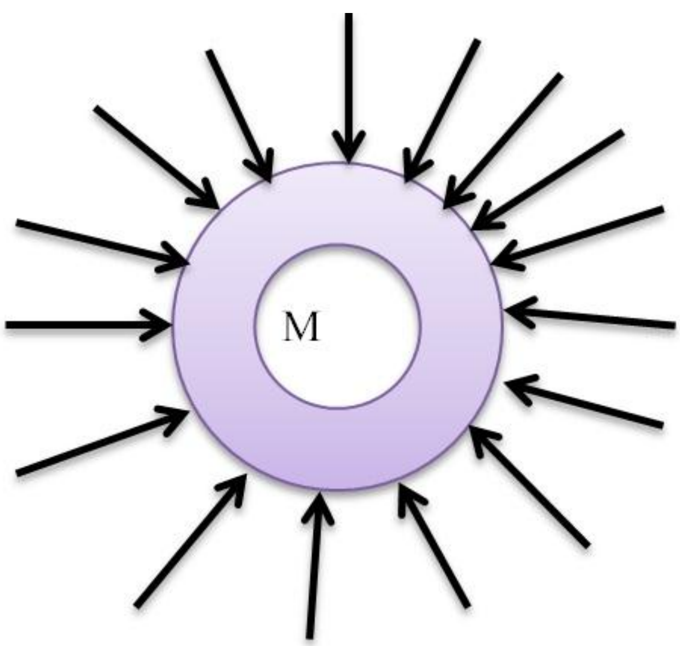
نیوٹن کے آفاقی کلیہ کشش ثقل کی رو سے

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (8.2)$$

(8.2) سے حاصل کردہ F کی قیمت کو (8.1) میں رکھنے سے

$$I = \frac{F}{m} = \frac{GM}{r^2} \quad (8.3)$$

شکل (8.2) میں زمین کے اطراف کے ثقلی میدان کو دکھایا گیا ہے۔ تیر کے نشان میدان کی سمت کو ظاہر کرتے ہیں جو ہر جگہ نصف قطر کے ساتھ اندر کی جانب رکھے ہوئے ہیں۔



شکل (8.2) کروی مادہ M کے گرد ثقلی میدان

کائناتی کشش ثقلی مستقل(G)اور ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین 'g' میں رشتہ سطح ارض پر واقع کسی کمیت 'm' کو زمین اپنی طرف جس قوت سے کشش کرتی ہے وہ نیوٹن کے کلیہ کشش ثقلی کے مطابق ہوتی ہے۔

$$F = G\frac{Mm}{R^2} \tag{8.4}$$

اس قوت کی وجہ سے کمیت M میں پیدا ہونے والا اسراع ہو گا۔

$$a = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} \tag{8.5}$$

اس اسراع کو عموماً 'g' تعبیر کیا جاتا ہے اور اسی کو ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کہتے ہیں۔

$$g = \frac{GM}{R^2} \tag{8.6}$$

مذکورہ بالا فارمولے سے ظاہر ہوتا ہے کہ کسی ایک مقام پر ہر جسم کے لیے 'g' کی قیمت وہی رہتی ہے لیکن 'g' کی قیمت عرض بلند کے ساتھ بدلتی ہے۔ کسی مقام کے عرض بلند Ø پر 'g' کے انحصار کو بتلانے والا حسب ذیل فارمولا ہر برٹ(Herbert) نے محض تجربی مشاہدات کی اساس پر تجویز کیا۔

$$g_{\emptyset} = g_e(1 + 0.005310Sin^2\lambda)$$

جہاں g_e ایک سمتیہ(Vector) ہے۔

ثقلی میدان کی خصوصیات(Importance of Gravitational Field)

کسی نقطے پر جس کے ثقلی میدان کی دو طریقوں سے پیمائش کی جاسکتی ہے۔ مقامی سمتی تفاعل کو ثقلی حدت(Gravitational Intensity)کہتے ہیں۔ مقامی غیر سمتی تفاعل کو ثقلی بالقوہ(Gravitational Potential)کہتے ہیں۔

کشش ثقلی میدانی سمتی مقدار ہے اور اسی لیے یہ سمتی مقداروں کی جمع کے اصول کی پابندی کرتا ہے کسی نقطے پر ثقلی میدان کی سمت کا تعین خط قوت کے مماس سے کیا جاتا ہے۔

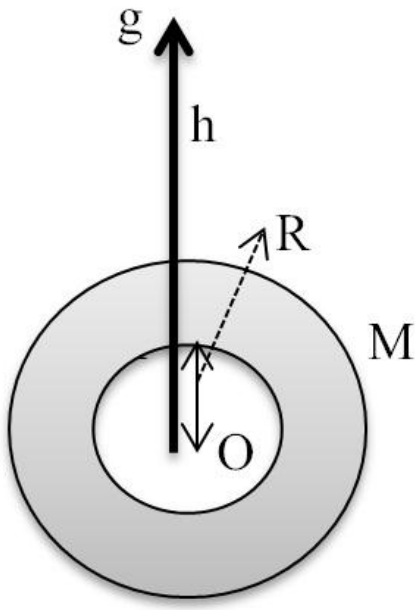
جب اجسام خلا کے وقف میں ہوتے ہیں تب کشش میدان کی تبدیلی جیومیٹری(Geomatry)کی خصوصیات میں تبدیل ہوتی ہے۔ کشش میدان کے مبدا سے مراد مادے کی کمیت یا توانائی ہے کشش میدان کی اشاعت روشنی کی رفتار کے برابر ہوتی ہے۔

8.5 ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کی تبدیلی(Variation of Acceleration Due to Gravity)

'g' میں تبدیلی، بلندی کے ساتھ گہرائی اور درمیانی فاصلہ اور زمین کی شکل کے ساتھ کس طرح بدلتی ہے۔ ہم جانتے ہیں $g = \frac{F}{m}$ زمین کے جسم پر عائد کردہ قوت کا اثر عناصر جیسے بلندی، گہرائی، عرض البلد (Latitudes) پر منحصر ہوتا ہے۔اسی لیے 'g' کی قیمت ان عناصر پر منحصر ہوتی ہے۔

8.5.1 'g' میں تبدیلی بلندی کے ساتھ (Variation of 'g' With Altitude)

کسی دیے ہوئے مقام پر 'g' کی قیمت کا انحصار اونچائی پر بھی ہوتا ہے اور اس کا اظہار 'g' کے لیے حاصل کیے ہوئے ضابطے سے ہوتا ہے جو زمین کی کمیت اور اس کے نصف قطر کے رقوم میں ہے اور جس کو نیوٹن کے افاقی کلیہ کشش ثقلی سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔



شکل(8.3)

$$g = \frac{GM}{R^2} \qquad (8.7)$$

لیکن زمین کی ثقلی قوت جسم پر مساوی ہوتی ہے mg_h کے یہاں g_h اس بلندی پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین ہے۔

$$mg_h = \frac{GMm}{(R+h)^2}$$

$$g_h = \frac{GM}{(R+h)^2} \tag{8.8}$$

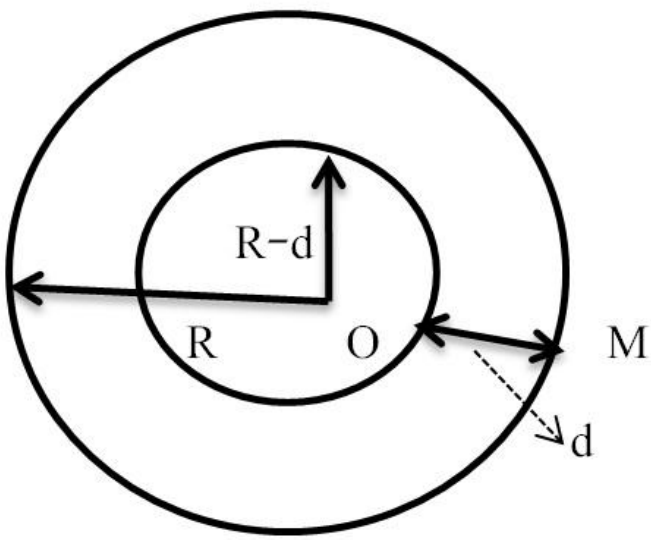
مساوات (8.7)اور(8.8)سے

$$\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \Rightarrow \frac{gh}{g} = \frac{R^2}{R^2\left[1+\frac{h}{R}\right]^2} \tag{8.9}$$

$$g_h = g\left[1 - \frac{2h}{R}\right] \tag{8.10}$$

8.5.2 'g' میں تبدیلی گہرائی کے ساتھ(Variation of 'g' With Depth)

فرض کرو کہ زمین ایک ہموار کردہ ہے جس کی کمیت 'm' اور کثافت 'p' نصف قطر 'R' ہے۔ تب 'g' سطح زمین پر ثقلی اسراع بوجہ جاذب زمین ہے جب جسم سطح زمین پر ہو گا اس کی پوری کمیت اس کے مرکز پر مرکوز ہو گی۔



شکل(8.4)

ہم جانتے ہیں:

$$g = \frac{GM}{R^2} \tag{8.11}$$

لیکن زمین کی کمیت $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$$g = \frac{G\,{}^4/_3\,\pi R^3 \rho}{R^2} = G\frac{4}{3}\pi G R \rho \tag{8.12}$$

سطح زمین سے کسی گہرائی 'd' پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین ہوگا۔

$$g_h = \frac{4}{3}\pi G(R-d)\rho \tag{8.13}$$

مساوات (8.12) اور (8.13) سے

$$\frac{g_d}{g} = \frac{R-d}{R} \tag{8.14}$$

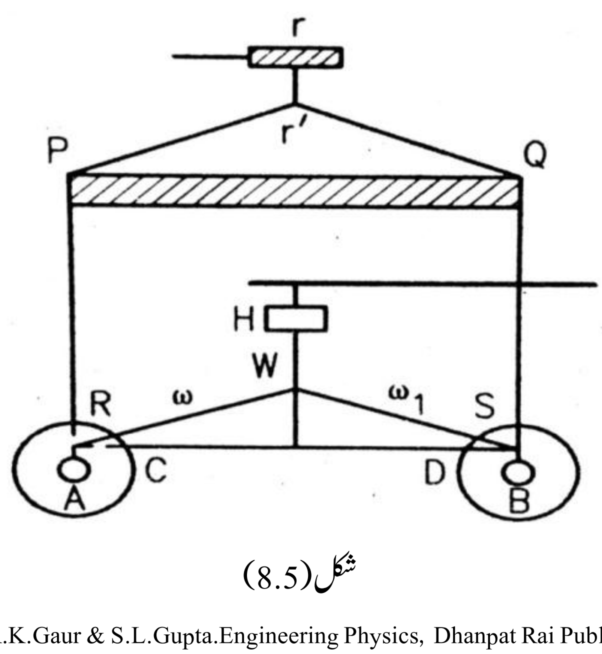
$$g_d = g\left(1 - \frac{d}{R}\right) \tag{8.15}$$

اوپر کی مساوات سے معلوم ہو رہا ہے کہ جیسے جیسے ہم زمین کے مرکز کی طرف جائیں 'g' کی قیمت میں کمی ہوتی جائے گی۔

8.6 آفاقی ثقلی مستقل (G) کی تخمین [Determination of Universal Gravitational Constant (G)]

8.6.1 کیونڈش کا طریقہ (Cavendish Method)

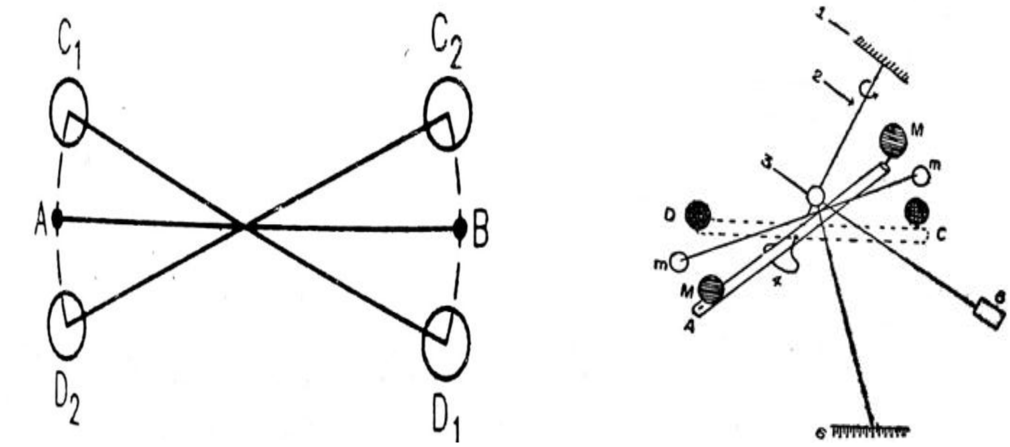
1978 میں لارڈ کیونڈس (Lord Cavendish) نے G کو معلوم کرنے کے لیے سب سے پہلا تجربہ کیا۔ نیوٹن کے کلیہ ثقلی کی تصدیق کے لیے کیونڈش کی استعمال کردہ ترازو کو شکل (8.5) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (8.5)

(Source: R.K.Gaur & S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

ایک ہی کمیت 'm' کی دو چھوٹی گیندوں A,B کو ایک ہلکی سلاخ کے سروں سے جوڑ دیا گیا۔ اس ڈمبل نظام(Dumbell System) کو کوارٹز(Quartz) کے ایک مین ریشہ سے اس طرح لٹکایا گیا کہ یہ ڈمبل ہمیشہ افقی وضع میں رہے۔ دو بڑی گیندوں C اور D کو جن میں سے ہر ایک کی کمیت M ہے، ڈمبل کے سروں کے قریب مخالف رخوں پر رکھ دیا گیا ہے۔ اگر بڑی گینڈوں کا مقام C اور D ہو تو یہ کشش ثقلی کلیہ کے بموجب چھوتی گیندوں A اور B کو اپنی طرف کشش کریں گے جس کی وجہ سے ڈمبل پر ایک ٹارک (Torque) عمل کرے گا اور اس کی وجہ سے ڈمبل گھڑی کی مخالف سمت میں گھوم جائے گا۔ جب بڑی کمیتیں مقام C اور D پر ہوں گی تو ڈمبل کا گھماؤ گھڑی کی سمت میں ہو گا۔ ریشہ اپنے مروڑ کی وجہ سے ان دونوں ٹارکس کی مخالفت کرے گا۔ گینڈوں کو مقام A B سے مقام C D میں لے جانے کی وجہ سے ریشہ ایک زاویہ θ میں مڑ جاتا ہے۔ اس مروڑی زاویہ θ کو اسکیل کے ذریعے سے معلوم کر لیا جاتا ہے۔



شکل (8.6)

(Source: Dr.S.L.Gupta & Sanjeev Gupta.Unified Physics Vol-I,Mechanics Jai Prakash Nath & Co.Meerut)

دو گیندوں کے درمیان عمل کرنے والی کشش ثقلی قوت ہو گی۔

$$F = \frac{GMm}{d^2} \quad (8.16)$$

انصرافی جفت ہو گا۔

$$\tau = F \text{ x Momentarm}$$

$$\tau = 2\left[\frac{MmG}{d^2}\right] {}^{l}/_{2} \quad (8.17)$$

جہاں l سلاخ (PQ) کا طول ہے جس سے گیندوں m, m کو جوڑا گیا ہے۔ یہ انصرافی جفت موڑ کی رقوم میں

$$\tau = C\theta = F \times 2l = \frac{GMm2l}{d^2} \quad (8.18)$$

جہاں C کو مروڑ کا منتقل کہتے ہیں۔ جس کا تعلق ڈمبل کے وقت کے دوران بموجب مساوات ذیل رہتا ہے۔ یعنی

$$T = 2\pi \sqrt{I/_{C}} \quad (8.19)$$

(8.17) اور (8.18) کو ایک دوسرے کے مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{GMm2l}{d^2} \times T^2 = C\theta 4\pi^3 \frac{I}{C} \quad (8.20)$$

$$G = \frac{2\pi^2 I d^2}{MmlT^2} \times \theta \quad (8.21)$$

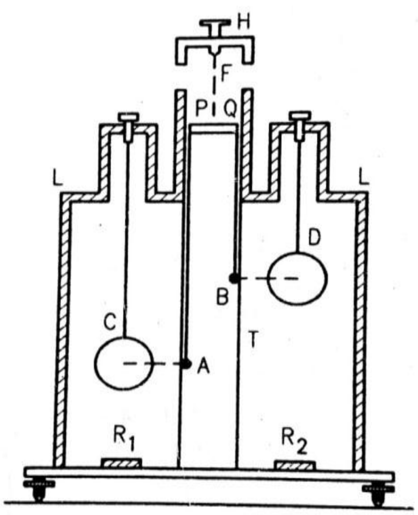
اس مساوات سے ہم G کی قیمت محسوب کر سکتے ہیں۔ 'C' کی پیمائش کے لیے ڈمبل نظام کے وقت دوران T علاحدہ تجزیہ سے تخمین کی جاتی ہے اور پھر مساواتوں (8.19) سے C کی قیمت محسوب کی جاتی ہے۔ اس طرح کیونڈش G کی قیمت معلوم کرنے کے بعد زمین کی کمیت بھی محسوس کرنے کے قابل تھا۔

کیونڈش کو G کی قیمت $6.745 \times 10^{-11} NmKg^{-2}$ اور $6.562 \times 10^{-8} g^{-1} cm^3 s^{-2}$ حاصل ہوئی۔

8.6.2 بوائیز (کا طریقہ) (Method of Boys)

بوائیز (Boys) نے کیونڈش کے تجربہ میں کچھ ترمیمات کر کے G کی پیمائش کی شکل (8.7) میں اس تجربی آلے کو دکھایا گیا جیسے بوائز نے تشکیل دیے۔

یہ آلہ دو ہم محور شیشے کی نلیوں پر مشتمل ہے۔ اندرونی نلی جس کا قطر 2-3cm ہے، معین اور ساکن ہوتی ہے۔ بیرونی نلی دونوں نلیوں کے مشترکہ محور کے گرد گھومتی رہتی ہے۔ اس پورے نظام کو ایک مسطح پلیٹ فارم پر لیولنگ اسکروز کی مدد سے نصب کر دیا جاتا ہے۔ 0.5cm قطر والی دو سونے کی گندوں A اور B میں ہر ایک کی کمیت 2gr ہے۔ ڈنڈی PQ کو کوارٹز کے باریک ریشہ F کے ذریعے مروڑی اینچ (H) سے کس دیا جاتا ہے۔



شکل (8.7)

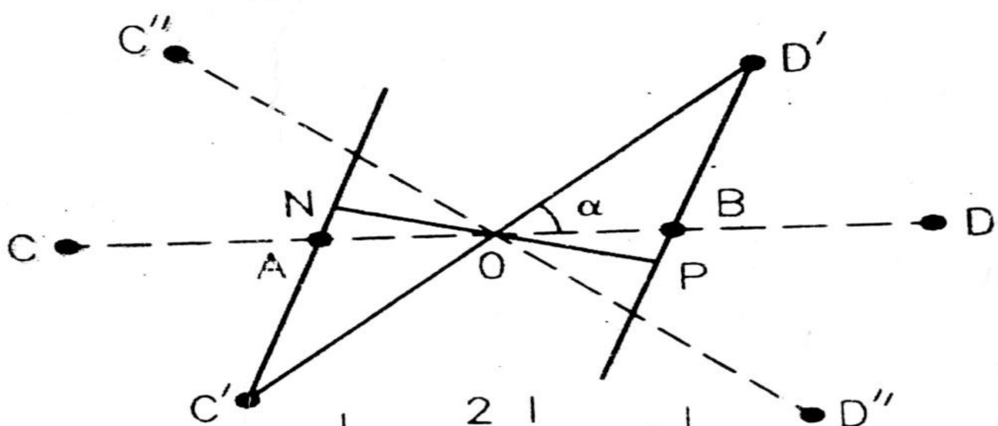
(Source:R.K.Gaur&S.L.Gupta.EngineeringPhysics

ایک مستوی آئینے M کو ڈنڈی PQ سے مضبوطی کے ساتھ پیوست کر دیا جاتا ہے۔ مستوی آئینے کے انتصابی کناروں پر نالیاں (Screw) بنی ہوتی ہیں جن میں سے سونے کی گیندوں سے بندھے ہوئے تار پھسل سکتے ہیں۔

بیرونی نلی میں 11cm قطر والے دو شیشے کے کروں C اور D کو تانبے کے تاروں کے ذریعے لٹکایا جاتا ہے، A اور C کے مرکز ایک ہی افقی سطح پر ہوتے ہیں اور اسی طرح گیندوں B اور D کے مرکز بھی ایک ہی افقی سطح پر ہوتے ہیں۔ گیندوں کی جوڑیوں (A.D) اور (B, D) کو ایک دوسرے سے دور تقریباً 15cm کے فاصلے پر رکھا جاتا ہے تاکہ 'C' کا اثر B اور یا D کا اثر A پر نہ پڑنے پائے۔ لیمپ اور اسکیل کے نظام سے مروڑی ریشہ (آئینہ PQ) کے زاویائی انصراف کو نہایت ہی صحت کے ساتھ ناپا جاتا ہے۔ بیرونی نلی کو یہاں تک گھمایا جاتا ہے کہ شیشے کے کرے C اور D سونے کی گیندوں A اور B سے مخالف سمتوں میں آجائیں۔ ایسی صورت میں تعلیمی نظام پر عمل کرنے والا ٹارک اعظم ہو گا۔ اور اس وقت آئینے کا انصراف R_1 کو نوٹ کر لیا جاتا ہے۔ بیرونی نلی کو پھر اس طرح گھمایا جاتا ہے کہ شیشے کے کرے سونے کی گیندوں کے دوسرے طرف سے مخالف سمت میں بالکل اسی طرح آجائیں جیسے کہ اس سے قبل تھے۔ اس صورت میں بھی تعلیمی نظام پر اعظم ترین ٹارک عمل کرے گا۔ اس صورت میں بھی آئینے کے انصراف R_2 کو نوٹ کر لیا جاتا ہے ان دونوں مشاہدات کے اوسط سے زاویہ انصراف α حاصل ہوتا ہے۔

$$\alpha = \frac{R_1 - R_2}{2L}$$

جہاں پر 'N' ائینہ P اور اسکیل اک درمیانی فاصلہ ہے۔



شکل (8.8)

(Source : R.K.Gaur & S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

فرض کرو کہ ڈنڈی PQ کا سطحی نقطہ O ہے اور ON=OP=l

فرض کرو $d = OC^1 = OD^1$ اور $\alpha = POD^1$ زاویہ $= NOC^1$ زاویہ اگر شیشے کے ہر کرّے اور سونے کی ہر گیند کی کمیت بالترتیب M اور m ہو تو ان کے ہر جوڑ کے درمیان عمل کرنے والی کشش ثقلی قوت ہو گی۔

$$F = \frac{GMm}{d^2} \tag{8.22}$$

یہ قوتیں ایک دوسرے کی مستوازی، مساوی اور سمت میں مخالف ہیں اس لیے ان سے مرتب ہونے والا جفت تعلیقی نظام پر عمل کرکے اس میں ٹارک τ پیدا کرے گا جو ہو گا۔

$$\tau = \frac{GMm}{d^2} \times PN = \frac{2GmM}{d^2} \times OP \tag{8.23}$$

$$\therefore OP = ON = \frac{PN}{2}$$

اگر تعلیقی ریشے کا مروڑی جفت فی اکائی زاویہ مروڑ C ہو تو بحالی جفت (Restoring couple) کا معیار τ ہو گا۔

$$\tau = C\theta$$

چوں کہ یہ دونوں جفت ایک دوسرے کو متوازن کرتے ہیں اس لیے نظام کی تعدلی حالت میں یہ ایک دوسرے کے مساوی ہوں گے۔ یعنی

$$C\theta = \frac{2GMm}{d^2} \times OP \quad \text{یا} \quad G = \frac{cd^2\theta}{2mMOP} \tag{8.24}$$

$$= \frac{1}{2} OP \times BD^1 = \frac{1}{2} OBSin\alpha \times OD^1$$ مثلث OBD^1 سے

$$\therefore OP = \frac{OBsin\alpha \times OD''}{BD} = \frac{lsin\alpha \times G}{d} \tag{8.25}$$

$$G = \frac{C\theta d^3}{2mMa \int sin\alpha} \tag{8.26}$$

$$[\therefore d^2 = a^2 + l^2 - 2alcos\alpha]$$

$$G = \frac{c\theta(a^2 + l^2 - 2al\, Cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}{2malMsin\alpha} \tag{8.27}$$

تمام متعلقہ وزنوں کی موجودگی میں تعلیقی ریشے کا وقت دوران T معلوم کر کے C یعنی جفت فی اکائی مروڑ کی قیمت ذیل کے ضابطے سے حاصل کی جانی چاہیے۔

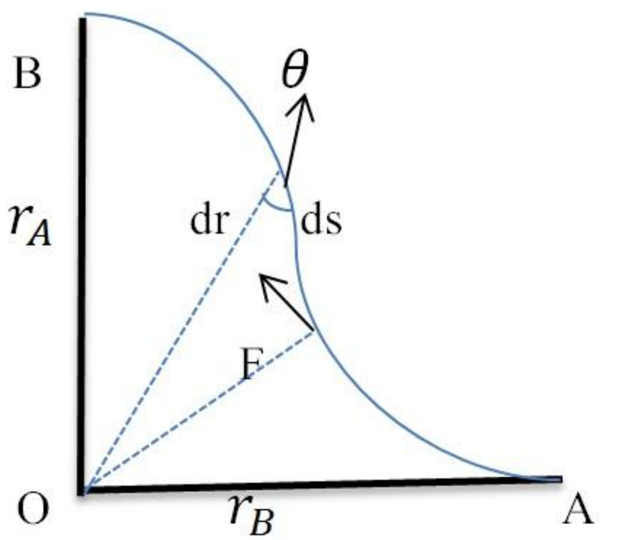
$$T = 2\pi \sqrt{I/c} \qquad (8.28)$$

اوپر کی مساوات میں I نظام کے جمود کا معیار اثر ہے جس کو ذیل کے ضابطے سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$I = 2ml^2 \qquad (8.29)$$

مساوات (8.27) سے G کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے جو بوائیز کو $6.657 \times 10^{-11} Nm^2 Kg^{-2}$ حاصل ہوئی تھی۔

8.7 ثقلی میدان میں توانائی بالقوہ (Potential Energy in Gravitational Field)



شکل (8.9)

شکل (8.9) میں بتایا گیا ہے کہ نقطہ 'O' پر رکھی ہوئی کمیت 'M' کا کششی میدان اس میں کسی نقطہ A پر رکھی ہوئی کمیت m پر عمل کر رہا ہے۔ کمیت 'M' کے کششی میدان کا مرکز نقطہ O پر واقع ہے۔ نظام کی کم ہونے والی توانائی مستقل ہے کمیت m جب مرکز سے فاصلے r_A پر ہوتی ہے تو اس کو توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ دونوں حاصل رہتے ہیں۔ ذرے کی توانائی بالقوہ کے اظہار کے لیے ہمیں ذرے کو 'A' سے 'B' تک لانے میں درکار کام کو معلوم کرنا ہوگا۔

کمیت 'm' کو AB کے اوپر ایک فاصلے ds تک لے جانے کے لیے درکار کام ہو گا۔

$$\vec{F}.\vec{S} = FS\cos\theta \qquad (8.30)$$

$$(\because \theta = 0) \qquad dw = FS \qquad (8.31)$$

کمیت 'm' کو A سے B تک لے جانے کے لیے درکار مجموعی کام ہو گا۔

$$W = \int_{ra}^{rb} Fdr \qquad (8.32)$$

ذرے کو A سے B تک لے جانے کے لیے درکار کام دراصل ذرے کی توانائی بالقوہ کی تبدیلی ہے اگر نقاط A اور B پر نظام کی توانائی بالقوہ علی الترتیب V_a اور V_b ہو تو

$$-W = U_B - U_A = -\int_{r_A}^{r_B} Fdr \qquad (8.33)$$

کشش قوت F لکھ سکتے ہیں کہ

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \qquad (8.34)$$

$$-W = U_B - U_A = -\int_{r_A}^{r_B} \left(-G\frac{Mm}{r^2}\right) dr \qquad (8.35)$$

$$-W = GMm\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

$$-W = GMm\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

$$-W = GMm\left[-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right]$$

$$W = GMm\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \qquad (8.36)$$

ثقلی میدان کے کسی نقطہ توانائی بالقوہ وہ کام ہے جو کسی ذرے کو حوالے کے نقطے سے دیے ہوئے نقطے تک لانے میں کیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ حوالے کا نقطہ 'A' لامتناہی فاصلے (r) پر ہے۔یعنی $r_A = \infty$ اور $r_B = r$

لہٰذا مساوات کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$U_r - U_\infty = U_r - 0 = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) \tag{8.37}$$

$$U_r = -\frac{GMm}{r} \tag{8.38}$$

(−) علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ کسی محدور فاصلے کے لیے توانائی بالقوہ منفی ہوتی ہے اور لامتناہی فاصلے کے لیے توانائی بالقوہ صفر ہوتی ہے اور یہ گھٹتی جاتی ہے جیسے جیسے درمیانی فاصلہ بڑھتا ہے۔

" ثقلی میدان میں اکائی کمیت کی توانائی بالقوہ کو ثقلی قوں کہا جاتا ہے۔ثقلی قوں 'v' سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$V = \frac{U}{m} = -\frac{Gm}{r} \tag{8.39}$$

ثقلی بالقوہ بھی ثقلی میدان کو بیان کرتا ہے۔ مگر ان دونوں مقادیر میں ایک بہت ہی بارک فرق ہے وہ یہہ کہ ثقلی میدان کی حدت ایک سمتی مقدار ہے جب کہ تجاذبی قوں ایک میزانی (Scalar) ہے۔

8.8 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

سطح زمین پر 'g' کی قیمت $9.8m/sec^2$,6,400km کی بلندی پر 'g' کی قیمت دریافت کرو۔

حل:

بلندی h پر g_h

$$g_h = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$\text{R} = 6400\text{km} = 6400 \times 10^3 m$$

$$h = 6400km = 6400 \times 10^3 m$$

$$g = 9.8m/sec^2$$

$$g_h = \frac{9.8}{\left(1+\frac{6400}{6400}\right)^2} = \frac{9.8}{(1+1)^2} = \frac{9.8}{4}$$

$$g_h = 2.45m/sec^2$$

حل شدہ مثال2

اگر سطح زمین پر 'g' کی قیمت $9.8m/sec^2$ ہو تب زمین کی مرکز سے 3200km پر 'g' کی قیمت کیا ہو گی۔

حل:

$$g_d = g\left(1 - \frac{d}{R}\right)$$

$$R = 6400km = 6400 \times 10^3 m$$

$$d = 3200km = 3200 \times 10^3 m$$

$$g = 9.8m/sec^2$$

$$g_d = g\left(1 - \frac{d}{R}\right) = 9.8\left(1 - \frac{3200}{6400}\right)$$

$$g_d = \frac{9.8}{2} = 4.9$$

$$g_d = 4.9\ m\ /sec^2$$

حل شدہ مثال3

کسی بلندی پر ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کی قیمت 50٪ ہو گی۔ اس بلندی کی قیمت معلوم کرو۔ زمین کا نصف قطر=6400km۔

حل:

کچھ بلند پر 'g'

$$g_h = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

لہٰذا
$$g_h = \frac{50}{100} g = 0.5g$$

$$0.5g = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 = \frac{g}{0.5g} = 2$$

$$1 + \frac{h}{R} = \sqrt{2}$$

$$\frac{h}{R} = \sqrt{2} - 1 = 1.414 \times 6400$$

$$h = 9049.6\ km$$

حل شدہ مثال4

دو ایک جیسے اجسام کا درمیانی فاصلہ 1m ہے اور ان میں ثقلی قوت 0.0667mgwt ہے۔ اجسام کی کمیت دریافت کرو۔

حل:

$$r = 1m, m_1 = m_2 = 1m$$

$$F = 0.0667mgwt = 0.0667 \times 10^{-6} \times 10N$$

$$F = 6.67 \times 10^{-7} N$$

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

$$6.67 \times 10^{-7} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times m \times m}{(1)^2}$$

$$10^4 = m^2$$

$$m = 10^2 = 100kg$$

$$m = 100kg$$

حل شدہ مثال5

زمین پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین $9.81 m/sec^2$ اور زمین کا نصف قطر 6370km ہے۔ تب زمین کی کمیت دریافت کرو۔

حل:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}, R = 63700km = 6.370 \times 10^6 m$$

$$g = 9.81 m/sec^2$$

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow M = \frac{gR^2}{G}$$

$$M = \frac{9.81\left(6.37\times10^6\right)^2}{6.67\times10^{-11}} = 5.97 \times 10^{24} kg$$

8.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- نیوٹن کے کائناتی کلیہ کشش ثقلی کی تعریف "کائنات کا ہر ذرہ دوسرے ذرے کو اپنی طرف کشش کرتا ہے۔ یہ کششی قوت راست تناسب ہوتی ہے کمیتیوں کے حاصل ضرب کے اور بالعکس تناسب ہوتی ہے درمیان فاصلہ مربعوں کے"

  اگر m_2, m_1 دوذروں کی کمیت اور درمیانی فاصلہ 'd' تب قوتوں کی مقدار

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{d^2}$$

  'g' اور G میں رشتہ $g = \frac{GM}{R^2}$

- ثقلی میدان کی طاقت سے مراد ثقلی فی اکائی کمیت ہے اگر I ثقلی میدان کی طاقت اور F قوت تب

$$I = \frac{F}{m}$$

- ثقلی میدان میں توانائی بالقوہ $u_r = -\frac{GMm}{r}$
- زمین کی سطح سے کسی بلندی 'h' پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین g کی قیمت

$$g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

- زمین کی سطح سے کسی اندر گہرائی 'd' پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین g کی قیمت

$$g_d = g\left(1 - \frac{d}{R}\right)$$

- ثقلی میدان میں اکائی کمیت کی توانائی بالقوہ کی ثقلی قوں کہا جاتا ہے۔ ثقلی بالقوہ 'v' سے ظہر کرتے ہیں۔

$$V = \frac{U}{m} = -\frac{Gm}{r}$$

- G قیمت کی تخمین کے لیے دو طریقے ہیں (a) کیونڈش کا طریقہ (b) بوائز طریقہ

- G کی قیمت بوائیز کو $6.657 \times 10^{-11} Nm^2Kg^{-2}$ حاصل ہوئی تھی۔
- کیونڈش نے اس مساوات سے G کی قیمت محسوب کی ہے۔

$$G = \frac{2\pi^2 I d^2}{MmlT^2} \times \theta$$

کیونڈش کو G کی قیمت $6.745 \times 10^{-11} NmKg^{-2}$ اور $6.562 \times 10^{-8} g^{-1}cm^3s^{-2}$ حاصل ہوئی تھی۔

8.10 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **مرکزجو اسراع** : گردشی جسم کا اسراع جس کی سمت اس کے مدار کے مرکز کی طرف ہوتی ہے۔
- **نصف قطری سمتیہ** : دائروی حرکت میں جسم کو دائروی مدار کے مرکز سے ملانے والا خط
- **توانائی بالحرکت** : حرکت کی بنا پر موجود توانائی
- **ثقلی بالقوہ** : ثقلی میدان میں اکائی کمیت کی توانائی بالقوہ
- **قائم میدان** : وقت کے لحاظ سے اس میدان میں چونکہ تبدیلی نہیں ہوتی
- **دائروی حرکت** : کسی دائرے پر ذرے کی حرکت

8.11 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

8.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کمیت نہیں بدل کر اگر مرکز سکڑ جاتا ہے تب کیا 'g' بدلتا ہے؟
2. زمین کی ثقلی کشش کی وجہ سے چاند زمین پر کیوں نہیں گرتا؟
3. کائناتی ثقلی مستقل کی اکائی کیا ہے؟
4. سطح زمین سے گہرائی 'd' پر g کی مساوات =.................. ہے۔
5. تمام بنیادی قوتوں میں سے کون سی قوت کمزور ہوتی ہے؟
6. کائناتی ثقلی مستقل 'G' قیمت =.................. ہے۔
7. زمین کے مرکز کی طرف 'g' کی قیمت میں.................. ہوتی جائے گی۔
8. ثقلی میدان میں توانائی بالقوہ کی ضابطہ =.................. ہے۔

9. g اورG میں رشتہ = ... ہے۔

10. زمین کی سطح سے کسی بلندی 'h' پر ثقلی اسراع زمین g کی مساوات ہوتی ہیں۔

8.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. g اورG میں رشتہ اخذ کرو۔
2. گہرائی 'd' پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین کی عبارت اخذ کرو۔
3. بلندی پر 'g' میں کس طرح تغیرات آتے ہیں۔اس کی عبارت اخذ کرو۔
4. ثقلی میدان میں توانائی بالقوہ کی عبارت اخذ کرو۔

8.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. کیونڈش طریقے سے آفاقی کشش ثقلی مستقلG کی قیمت کو تخمین کیجیے ۔
2. بوائز(Boys) طریقے سے آفاقی کشش ثقلی مستقلG کی قیمت کو تخمین کیجیے۔
3. ثقلی سراع بوجہ جاذب زمین(g)اور کائنات ثقلی مستقل کیاہیں ان دونوں کے درمیان رشتے کی عبارت اخذ کرو۔

8.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات(Solved Answer Type Questions)

1. سطح زمین سے کچھ بلندی پر ثقلی کشش اس کی حقیقی قیمت سے 4% ہے۔بلندی دریافت کرو۔
2. دو گیند اور مساوی کمیت اجسام کے درمیان عمل پر ثقلی کشش قوت 0.5N ہے۔اگر ان کا درمیانی فاصلہ 1m ہو تو اجسام کی کمیت معلوم کیجیے۔

(جواب: $8.65x10^4$kg)

3. زمین سے کتنی بلندی پر ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کی قیمت $5m/s^2$ ہو گی۔زمین کا نصف قطر $6.4x10^6$m ہے۔

(جواب: $1.568x10^6$m)

4. سطح زمین سے ایک خاص بلندی پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین کی قیمت میں تغیر سطح زمین کی قیمت کا 0.2٪ ہے۔اگر زمین کا نصف قطر $6.4x10^6$m ہو تو بلندی کو معلوم کیجیے۔

(جواب: $6.4x10^3$m)

5. ایک مرد اور ایک عورت کا وزن بالترتیب 50kg اور 30kg ہیں۔ان کا درمیانی فاصلہ 5m ہے یہ تصور کرتے ہوئے کہ وہ نقطوی کمیت ہیں۔ان کے درمیان عمل کرنے والی ثقلی کشش قوت معلوم کیجیے۔

8.12 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1.College Physics by Sears.F.W.& Zemansky.M.W. Wesley Publishing Co.Inc.London

2.Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta Dhanpat Rai Publications

3.Mechanics by Kittel,M.C.Graw Hill

4.Mechanics by Mathur .D.S,S.Chand Publication

5.Modern College Physics by White.H.E. East West Press Pvt.Ltd New Delhi

6.Physics Part I by Resnik.R &Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi

7.Physics the pioneer science Vol.I by Taylor .L.W. Dover Publication

8.Technical Physics by Bueche.F ,Harper &Row Publication,New York

9.Unified Physics Vol-I,Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath &Co.Meerut

اکائی 9۔ سیاروں اور سیٹلائٹس کی حرکت

(Motion of Planets and Satellites)

اکائی کے اجزا

9.0 تمہید

9.1 مقاصد

9.2 کیپلر کے کلیات

9.2.1 کیپلر کا پہلا کلیہ

9.2.2 کیپلر کا دوسرا کلیہ

9.2.3 کیپلر کا تیسرا کلیہ

9.3 سیٹلائٹس کی حرکت

9.3.1 مداری رفتار

9.3.2 فراری رفتار

9.3.3 سیاروں اور سیٹیلائیٹ کی حرکت اور توانائی

9.4 جیوسنکرونس مدار

9.5 سیاروں میں بے وزنی کیفیت

9.6 عالمی مقامیاتی نظام (گلوبل پوزیشن سسٹم [جی پی ایس])

9.7 حل شدہ مثالیں

9.8 اکتسابی نتائج

9.9 کلیدی الفاظ

9.10 نمونہ امتحانی سوالات

9.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

9.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
9.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
9.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات
9.11 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

9.0 تمہید (Introduction)

یہ وسیع نیلا آسمان ہم سب کو مسحور کرتا ہے اور ہمارے تصورات کو روشن کرتا ہے۔ یہ چاند، ستارے اور دوسرے اجسام جو آسمان پر موجود ہیں، یہ سب شاعر کو اپنی شاعری میں اور سائنسدانوں کو سائنس کی ترقی میں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔ جب سے قدیم تہذیب کا وجود عمل میں آیا تھا۔ انسان بڑے بڑے اجسام اور ان کی حرکت کو نوٹ کر رہا ہے۔ ان سب چیزوں سے ہی ہم یہ سمجھ سکتے ہیں کہ کس طرح دن، رات، موسم قدرت میں وقوع پذیر ہوسکتے ہیں۔

فلکیات کے مشاہداتی اعداد و شمار جمع کے لیے ان میں سے سب سے اہم اور کار آمد اعداد و شمار ٹائیکو براہے (Tychobrahe) نے جمع کیے تھے۔ یہ آخری ماہر فلکیات تھا جس نے بغیر دوربین استعمال کیے فلکی اعداد و شمار جمع کیے۔ ٹائیکو نے بیس (20) سال کے طویل عرصے کے دوران سیاروں کا مشاہدہ کیا اور ان کے محل وقوع سے متعلق اعداد و شمار جمع کیے جو ایک درجے کے 60 ویں حصے تک درست ہیں۔ ان اعداد یعنی $\frac{1}{60}$ و شمار کی ٹائیکو اس دنیا سے رخصت ہو گیا۔ ان مشاہدات کی تدوین اور پھر ان کی اشاعت کی ذمہ داری اس کے شاگرد جوہانس کیپلر (Keplar) کے کاندھوں پر آ گئی۔

9.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم:

i. کیپلر کے کلیات کی اساس پر سیاروں اور سیٹلائٹس کی حرکت کو بیان کریں گے۔
ii. زمین کے سٹیلائیٹ کی مداری اور فراری رفتاروں کو محسوب کریں گے۔
iii. سیاروں اور سٹیلائیٹ کی حرکت اور توانائی کو محسوب کریں گے۔
iv. جیو سینکرونس مدار کی تعریف کریں گے۔
v. عالمی مقامیاتی نظام (گلوبل پوزیشن سسٹم) کی تعریف اور مثالیں پیش کریں گے۔

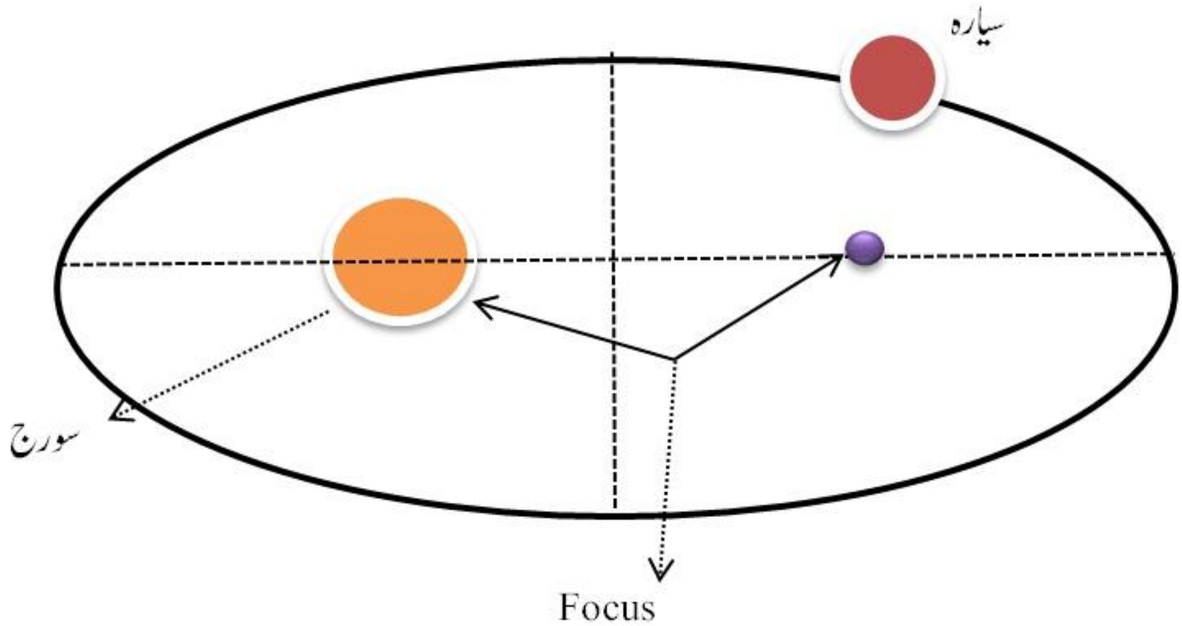
9.2 کیپلر کا کلیات (Kepler's law)

کیپلر نے سورج کے اطراف گھومنے والے سیاروں کی حرکت کے متعلق تین کلیات کا اعلان کیا۔

9.2.1 کیپلر کا پہلا کلیہ (Kepler's First Law)

کیپلر نے سورج کے اطراف گھومنے والے سیاروں کی حرکت کے متعلق تین کلیات کا اعلان کیا۔

کیپلر کا پہلا کلیہ: "سیاروں، خاص کر زہرہ زمین اور نیپٹون (Neptune) کے مدار کسی قدر کم دائرہ نما ہوتے ہیں"۔

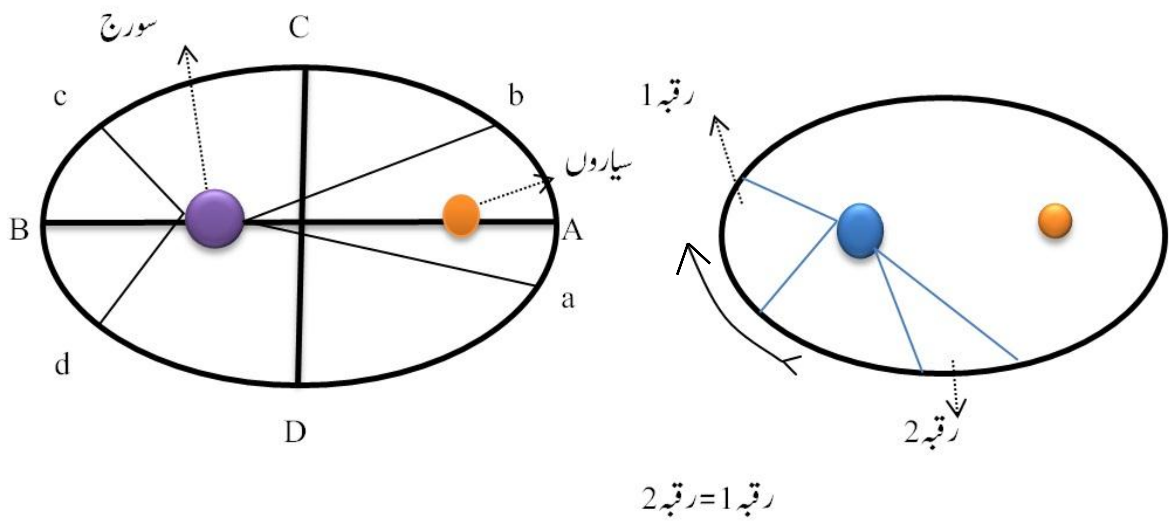


شکل 9.1

شکل (9.1) میں دکھایا گیا ہے سیارے کا مدار ایک ناقص ہے جس کے کسی ایک سرے پر سورج ہے۔ اس قانون کے بعد کوپرنیکس کا دائروی مداروں کا تصور رد کر دیا گیا۔

9.2.2 کیپلر کا دوسرا کلیہ (Kepler's Second Law)

"سیاروں کی رفتار مستقل نہیں رہتی ان کی رفتار اعظم ترین ہوتی ہے جب کہ وہ سورج سے بہت قریب ہوتے ہیں اور اقل ترین ہے جب کہ وہ سورج سے بہت دور ہوتے ہیں"۔



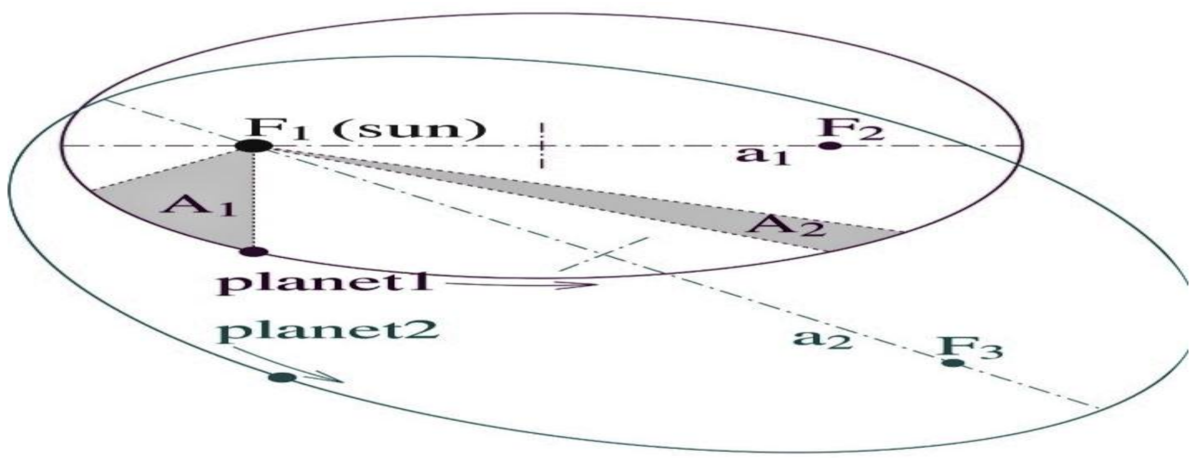
شکل(9.2)

جیسا کہ شکل (9.2) میں بتلایا گیا ہے کہ ایک خط مستقیم جو سیارے کو سورج سے ملاتا ہے، وقت کے مساوی وقفوں میں مساوی رقبوں کو طے کرتا ہے۔

9.2.3 کیپلر کا تیسرا کلیہ (Kepler's third Law)

"سیارے کے وقت دوران کے مربع کو سورج سے اس کے اوسط فاصلے کے مکعب سے تقسیم کرنے پر حاصل تقسیم تمام سیاروں کے لیے ایک ہی ہوتی ہے"۔

یعنی $\frac{T^2}{a^3} =$ مستقل $(Constant)$

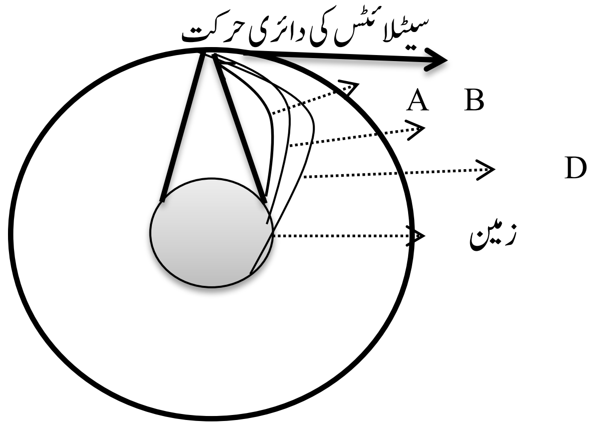


شکل(9.3)

(Source:Kepler's law of planetary motion,Wikipedia.org)

9.3 سیٹلائٹس کی حرکت (Motion of Satellites)

ہم خلائی دور میں جی رہے ہیں۔ سیٹلائٹس پر قائم مواصلاتی نظام، سیاروں کے مابین خلائی سفر اور خلائی اسٹیشن کے قیام وغیرہ سے ہم سب واقف ہیں۔ خلائی گاڑی کو زمین کا سٹیلائیٹ بنانے کے لیے ابتدا سطح زمین سے انتصاباًاوپر کی جانب داغا جاتا ہے۔ جب راکٹ ایک مطلوبہ بلندی تک پہنچ جاتا ہے تو اس کو قابو میں رکھنے والے بازوں (Control Fins) کو کھول دیا جاتا ہے جو بتدریج اسے افقی راستے میں لے آتے ہیں۔ خلائی گاڑی کو ایک خاص رفتار سے داغا جاتا ہے تاکہ یہ زمین کے گرد گھومنے کے قابل ہو جائے۔



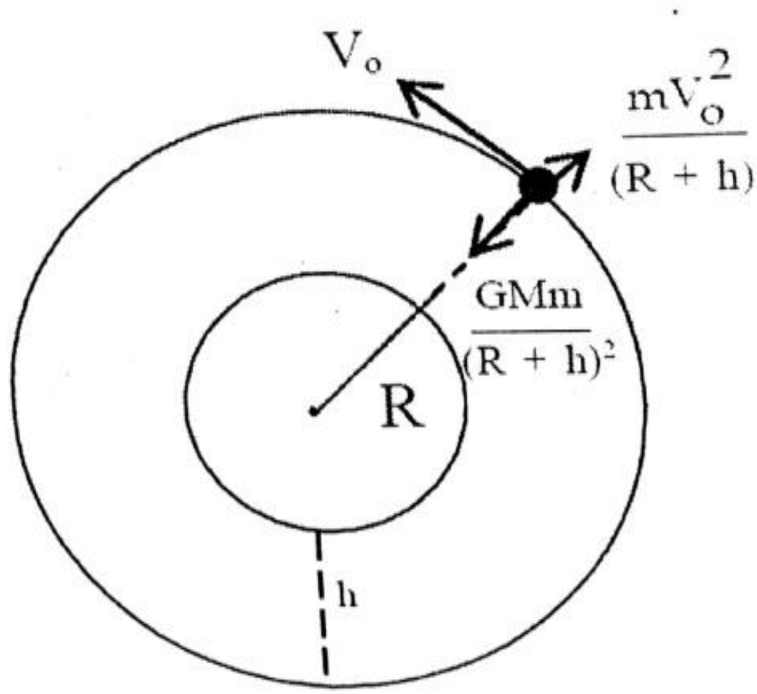
شکل(9.4)

فرض کرو کہ ایک مرمی (Projectile) کو کئی کلو میٹر اونچے مینار کی چوٹی سے افقی سمت میں داغا گیا ہے۔ اگر مرمی کی ابتدائی رفتار زیادہ نہ ہو تو اس کا راستہ شکل میں دکھائی ہوئی مکافی A کے مانند ہو گا۔ رفتار زیادہ ہو تو راستہ B کی طرح ہو گا۔ اسی طرح اگر رفتار کو بڑھاتے جائیں تو ایک خاص رفتار پر مرمی جو ابھی تک زمین پر گر رہا تھا اب زمین کے اطراف 'r' نصف قطر کے دائرے میں حرکت کرتا ہے۔ ابتدائی رفتار اس حد سے بھی زیادہ ہو جائے تو مرمی کا راستہ 'D' ناقص کی شکل کا ہو گا یا پھر مرمی زمین کے تجاذبی میدان سے فرار ہو جائے گا۔

اجسام کی وہ رفتار جو سیارہ کے اطراف مداری گردشی میں حرکت کرتی ہے مداری رفتار (Orbital Velocity) کہلاتی ہے اور اجسام کی وہ رفتار جس پر تجاذبی قوت کا اثر ختم ہو جاتا ہے فراری رفتار کہلاتی ہے۔

9.3.1 مداری رفتار (Orbital Velocity)

جسم کی وہ افقی رفتار جس سے وہ سیارے کے اطراف دائروی مدار میں گردش کرتا ہے مداری رفتار کہلاتی ہے۔ اسے Vo سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک جسم جس کی کمیت 'm' ہے سیارہ کے اطراف گردش کر رہا ہے جس کی کمیت M اور نصف قطر r ہے۔ سٹیلائیٹ کو دائروی مدار پر متحرک رکھنے کے لیے درکار مرکز جو قوت ثقلی قوت سے فراہم ہوتی ہے۔



شکل(9.5)

(Source:teluguacadamy.net)

لہٰذا مرکز جو قوت Fe = ثقلی قوت Fg

$$F_e = \frac{mV_o^2}{r} \quad , F_g = \frac{G\,M_e m}{r^2} \tag{9.1}$$

$$\frac{mV_o^2}{r} = \frac{G\,M_e m}{r^2} \tag{9.2}$$

$${V_0}^2 = \frac{G\,Me}{r} \tag{9.3}$$

مساوات (9.3) سے سٹیلائٹ کی مداری رفتار حاصل ہوتی ہے۔ اگر سٹیلائٹ زمین کی سطح سے قریب حرکت کر رہا ہو تو 'r' کے بجائے زمین کا نصف قطر 'R' استعمال کرنا ہو گا۔ ایسی صورت میں مرکز جو قوت صرف جسم کے وزن 'mg' کے برابر ہو گی جہاں 'g' اسراع بوجہ جاذبہ زمین ہے۔ لہٰذا

$$mg = \frac{G\ M_e m}{R^2} \tag{9.4}$$

$$GM_e = gR^2 \tag{9.5}$$

مساوات(9.5)کو مساوات(9.3)میں استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$${V_0}^2 = \frac{gR^2}{r} \tag{9.6}$$

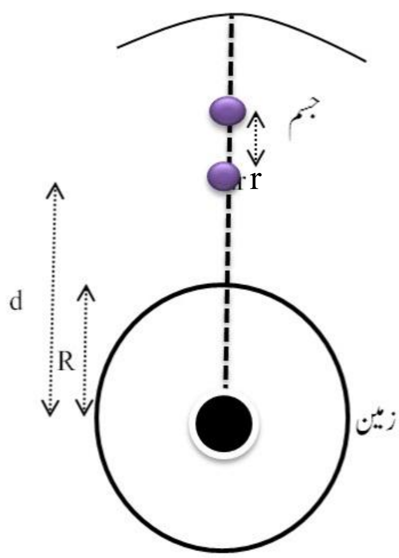
$$V_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{r}} \tag{9.7}$$

اگر r=R ہو تو مساوات (9.7) سے

$$V_0 = \sqrt{gR} \tag{9.8}$$

اوپر کی مساوات زمین کے گرد گھومنے والے سٹیلائیٹ کی مداری رفتار ہے۔

9.3.2 فراری رفتار (Escape Velocity)



شکل(9.6)

اجسام کی وہ اقل ترین انتصابی رفتار جس پر ثقلی قوت کا اثر ختم ہو جاتا ہے اور یہ واپس سیاروں پر نہیں آسکتا ہو تو اس رفتار کو فراری رفتار کہتے ہیں۔ اس کو علامت Ve سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک جسم کی کمیت 'm' ہے کسی سیارہ کی سطح پر حالت سکون میں ہے اور سیارہ کی کمیت 'M' اور نصف قطر 'R' ہے۔

سیارہ کی سطح پر تجاذبی قوں $= \frac{-G\ M}{R}$

اگر جسم کو لامتناہی مقام سے سیارہ کی سطح پر لانے کے لیے انجام شدہ کام

نظام کی تجاذبی توانائی بالقوہ = تجاذبی قوں × جسم کی کمیت

$$= \frac{-GMm}{R}$$

منفی(-)علامت یہ ظاہر کرتی ہے جسم سیارہ کی طرف کشش کرتا ہے۔

رفتار Ve پر توانائی بالحرکت جسم کی توانائی بالقوہ کے مساوی اور مخالف ہوتی ہے۔

$$\frac{1}{2} m{V_e}^2 = -\left(\frac{-GMm}{R}\right) \tag{9.9}$$

$$\frac{1}{2}mV_e^{\,2} = \left(\frac{GMm}{R}\right) \qquad (9.10)$$

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (9.11)$$

g کے رقم میں Ve کی عبارت

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (9.12)$$

$$V_e = \sqrt{\frac{2gR^2}{R}} \quad (\because\ GM_e = gR^2)$$

$$V_e = \sqrt{2gR} \qquad (9.13)$$

فراری رفتار جسم کی کمیت پر منحصر نہیں ہوتی۔اسی لیے چھوٹے ذرے سے لے کر بڑے سے بڑے راکٹ کی بھی ایک ہی فراری رفتار ہوتی ہے اور پھینکنے کے زاویے پر بھی منحصر نہیں ہوتی لیکن یہ سیارہ کی کمیت اور نصف قطر پر منحصر ہوتی ہے۔یہ ماحول کی تپش اور فطرت پر منحصر ہوتی ہے۔

سیارہ زمین پر جسم کی فراری رفتار

$$V_e = \sqrt{2gR}$$

زمین کے لیے نصف قطر R= $6.4\text{X}10^6$m

اسراع بوجہ جاذب زمین $9.8 m/sec^2$

فراری رفتار Ve=؟

$$V_e = \sqrt{2gR}$$

$$V_e = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6\ m/sec}$$

$$V_e = 11.2 \times 10^3 m/sec$$

$$V_e = 11.2 \times km/sec$$

ایک سیارچہ جو زمین کے بہت قریب ہے اس کی مداری رفتار

زمین کا نصف قطر $R = 6.4 \times 10^6 m = 64OOkm$

اسراع بوجہ جاذبہ زمین $= 9.8 \frac{m}{sec^2}$

سیارچہ کی مداری رفتار Vo = ؟

$$V_0 = \sqrt{gR}$$

$$V_0 = \sqrt{9.8X6.4X10^6}\ m/sec$$

$$V_0 = 7.92 \times 10^3 m/sec$$

$$V_0 = 7.92 km/sec$$

فراری رفتار اور مداری رفتار میں رشتہ

$$V_e = \sqrt{2} \times V_0$$

فراری رفتار = مداری رفتار $\times \sqrt{2}$

9.3.3 سیاروں اور سیٹیلائیٹ کی حرکت اور توانائی (Motion of Planet and Satellites and Energy)

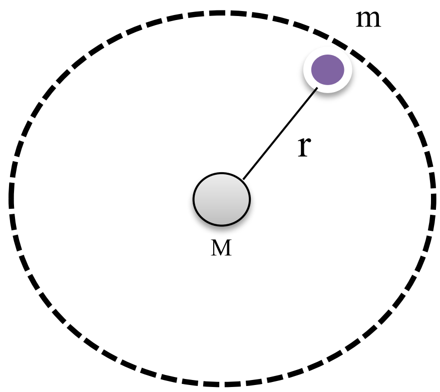
M کمیت والا جسم سورج کے گرد 'm' کمیت والا ایک جسم جیسے کوئی سیارے یا سیارے کے گرد اس کا سیٹیلائیٹ گردش کر رہا ہے۔ جمودی حوالے کے ذریعے کمیت 'M' حالت سکون میں ہے شکل (9.7) کے بموجب فرض کرو کہ x, m نصف قطر والے مدور مدار پر 'M' کے گرد حرکت کر رہی ہے۔

نظام کی توانائی بالقوہ ہو گی۔

$$U_r = \frac{-GMm}{x} \qquad (9.14)$$

M چوں کہ ساکن ہے اس لیے نظام کی توانائی بالحرکت ہو گی۔

$$K = \left(\frac{1}{2}\right) m\omega^2 x^2 \qquad (9.15)$$



شکل(9.7)

لیکن ہمیں یہ معلوم ہے کہ

$$\frac{GM}{x} = \omega^2 x^2 \qquad (9.16)$$

مساوات(9.15)کو(9.14)میں درج کیا جائے۔

$$K = \frac{1}{2} m \frac{GM}{x} \qquad (9.17)$$

نظام کی مجموعی توانائی ہوگی

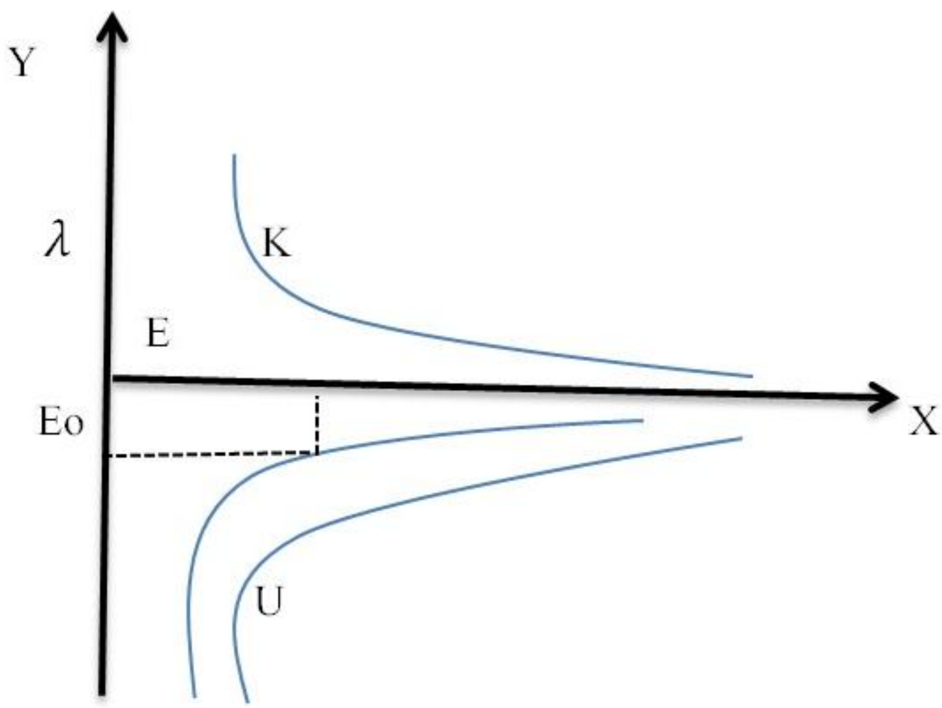
$$E = K + U_r \qquad (9.18)$$

مساوات(9.14) اور(9.15)کو(9.18)میں درج کیا جائے۔تب نظام کی مجموعی توانائی ہوگی

$$E = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{x} - G \frac{Mm}{x}$$

$$E = \frac{-GMm}{x} \qquad (9.19)$$

مساوات(9.19)سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ مجموعی توانائی مستقل بھی ہے اور منفی بھی۔توانائی بالحرکت کبھی بھی منفی نہیں ہوتی۔ زیادہ سے زیادہ یہ صفر ہوسکتی ہے۔توانائی بالقوہ ہمیشہ منفی ہوتی ہے اور صرف ان کے درمیان کی علاحدگی کے لامتناہی ہونے کی صورت میں یہ صفر ہوسکتی ہے۔اس کو شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل(9.8)توانائی E,U, K کے تمام پہلوؤں کی شکل

9.4 جیوسنکرونس مدار (Geosynchronous Orbit)

سیارچہ (Satellite)

سیارچہ ایسی شے ہوتی ہے جو بڑی شے کے گرد گردش کرتا ہے۔ زمین بھی سورج کے اطراف گردش کرتی ہے۔ چاند بھی سیارچہ ہے جو زمین کے گرد گردش کرتا ہے لیکن زمین اور چاند قدرتی سیٹلائٹس کہلاتے ہیں۔ مصنوعی سیارچہ مصنوعہ سیارچہ ایسے مشین کے لیے استعمال ہوتا ہے جسے خلاء میں چھوڑا جاتا ہے اور جو زمین کے اطراف یا خلا میں کسی جسم کے اطراف گردش کرتا ہے۔

سیارچوں کے درجہ بندی (Classification of Satelites)

I. زیریں زمینی مدار Low Earth Orbit (LEO)
II. وسطی زمینی مدار Medium Earth Orbit (MEO)
III. جیوسنکرونس زمینی مدار Geosynchronous Earth Orbit (GEO)

جیوسنکرونس زمینی مدار (جی ای او) (Geosynchronous Earth Orbit (GEO))

جیوسنکرونس زمینی مدار (جی ای او) زمین کے اطراف خلا میں 35786 کلومیٹر (22236 میل) کا ایک دائروی مدار ہے جو زمین کی

گردش کی سمت پر عمل کرتا ہے۔ جیو سنکرونس زمینی مدار (جی ای او) اگر خط استوا پر گردش کرتا ہے تب اسے جیو اسٹیشنری مدار کہتے ہیں کیوں کہ اس مدار پر حرکت کرنے والے جسم کا دور زمین کی محوری گردش کے برابر یعنی ایک دن کے برابر ہوتا ہے اس وجہ سے زمین سے مدار پر دیکھنے پر مدار پر موجود شے ساکن نظر آتی ہے اس لیے اسے جیو اسٹیشنری مدار کہتے ہیں۔

جی ای او کے خوبیاں (Advantage of GEO)

i. جی ای او کا سیارچہ زمین سے بہت زیادہ فاصلے کا احاطہ کرتا ہے یعنی تقریباً زمین کی سطح کا چار گناہ ہوتا ہے۔

ii. جی ای او سیارچہ چوبیس گھنٹے کسی خاص جگہ بصری معائنہ کر سکتا ہے۔

iii. ڈاپلر تبدیلی کا اثر قابل نظر انداز ہوتا ہے۔

iv. تین سیارچے تمام زمین کا احاطہ کر سکتے ہیں۔

v. زمینی ٹراکنگ اسٹیشن کی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔

vi. تعدد کی تبدیلی سے کچھ مسئلہ نہیں ہوتا۔

جی ای او کی خامیاں (Disadvantage of GEO)

i. جی ای او سیارچوں میں فاصلے کی وجہ سے کمزور سگنل میں تاخیر ہو سکتی ہے۔ جو نقطہ یا نقطہ ترسیل کے لیے بہتر نہیں ہوتا۔

ii. بہت زیادہ ترسیلی طاقت درکار ہوتی ہے۔

iii. 3500 کلومیٹر سفر کرنے کے بعد سگنل کمزور ہوتے ہیں۔

جی ای او کا اطلاق (Application of GEO)

i. ٹیلی فون، ٹی۔ وی اور ڈیجیٹل ترسیل کے لیے عالمگیر عملیاتی مواصلاتی نظام میں۔

ii. راکٹ لانچوں کے لیے نظام الارم ڈیٹکشن۔

iii. جیو اسٹیشنری سیارچوں کو بھی عام پر موسم کے مشاہدہ اور ترسیل و ابلاغ کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

9.5 سیاروں میں بے وزنی کیفیت (Weightlessness in Satellite)

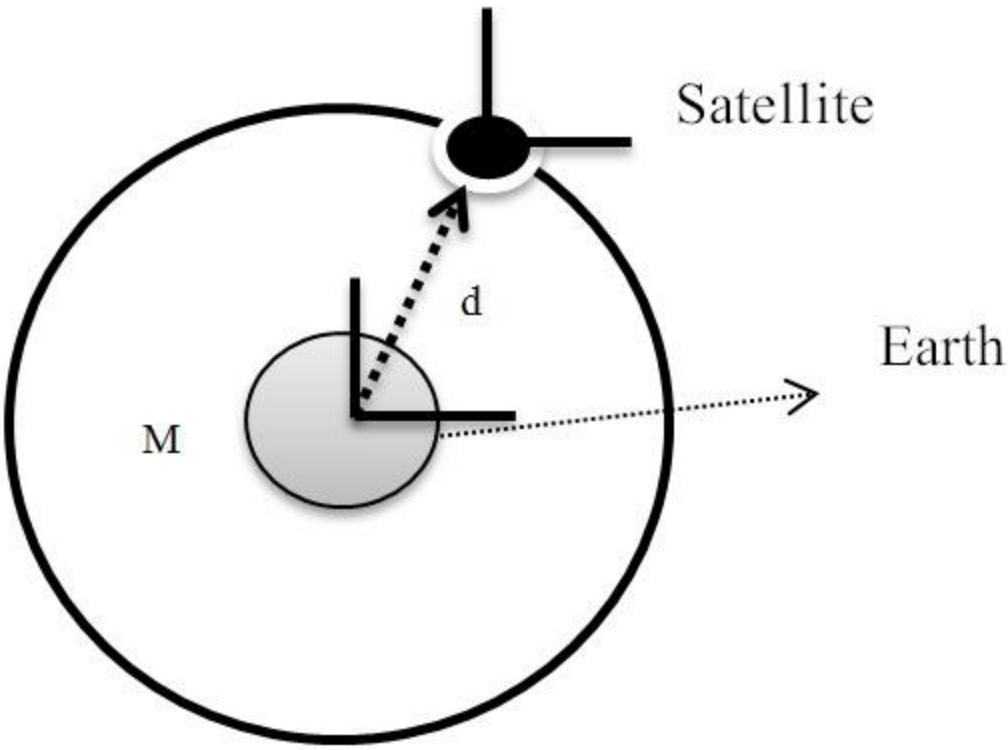
---

m اور M سیارہ اور زمین کی کمیتیں ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ 'd' ہے

ثقلی قوت

$$F_g = \frac{GMm}{d^2}$$

یہ ثقلی قوت نی چھے کی طرف زمین کے مرکز پر عائد کردہ ہوتی ہے۔ سیارہ کمیت 'm' فریم اسراع حقیقی قوت سے وجوہ پاتا ہے۔ یہ قوت ہی خیالی قوت (Ficticious) کہلاتی ہے۔ یہی قوت غیر جمودی حوالہ فریم سے آئی جو نظر نہیں آتی اس قوت خیالی قوت (Ficticious Force) یاکاذب قوت (Psedo Force) کہتے ہیں۔ مرکز گریز قوت خیالی قوت ہے۔



شکل(9.9)

$$F_p = -ma_0 \, , a_0 = \frac{GM}{d^2} \tag{9.20}$$

a_0 سیارہ اسراع تجاذبی زمین کے مرکز کی طرف عائد کردہ ہوتی ہے۔

لہٰذا F_p بھی مرکزی زمین پر عائد کردہ قوت ہے۔

سیارہ حوالہ فریم میں کل عائد کردہ قوت

$$F = F_g + F_p = \frac{GMm}{d^2} - ma_0 \tag{9.21}$$

مساوات(9.20)اور(9.21) سے سیارہ حوالہ فریم میں کل عائد کردہ قوت

$$F = F_g + F_p = \frac{GMm}{d^2} - \frac{GMm}{d^2} = 0 \qquad (9.22)$$

سیارہ کی کمیت حوالہ فریم میں کل عائد کردہ قوت صفر ہوتی ہے۔

عائد کردہ قوت سیاروں پر صفر ہوتی ہے وہ قوت ہی سیاروں پر بے وزنی(Weight lessness) کہلاتی ہے۔

9.6 عالمی مقامیاتی نظام(گلوبل پوزیشن سسٹم[جی پی ایس]) (Global Positioning System[GPS])

تعارف (Introduction)

جی پی ایس(GPS)وقت پر مبنی ہوتا ہے۔ مصنوعی سیارچے انتہائی مستحکم جوہری گھڑیاں رکھتے ہیں جو ایک دوسرے سے اور زمینی گھڑیوں سے ہم آہنگ ہوتے ہیں۔ اگر ان میں کچھ تبدیلیاں ہوں تب زمینی حقیقی وقت کے مطابق انہیں ہر روز ٹھیک کیا جاتا ہے۔ اسی طرح مصنوعی سیارچوں کے مقامات کی بھی نگرانی کی جاتی ہے۔ اسی طرح جی پی ایس وصول کنندگان(Recievers) بھی گھڑیاں رکھتے ہیں لیکن وہ اتنے مستحکم اور حقیقی وقت (Real Time) سے ہم آہنگ نہیں ہوتے۔ جی پی ایس کے سیارچے مسلسل اپنے وقت اور مقام کو ارسال کرتے رہتے ہیں جسے وصول کنندہ حاصل کرتا ہے۔ یہ کئی سیارچوں کی نگرانی کرتا ہے اور مساواتوں کو حل کرتے ہوئے ان کے حقیقی وقت سے ہونے والے فرق اور حقیقی مقام کا تعین کرتا ہے۔

مطالعے کی ضرورت(Need for Study)

جی پی ایس ایک جدید ٹیکنالوجی ہے۔ روزمرہ زندگی میں جی پی ایس کی اہمیت کا انکار ممکن نہیں ہے۔ کیوں کہ آج کی متحرک دنیا میں جی پی ایس کا استعمال تیزی سے بڑھ رہا ہے۔ اس کا کام مسائل کو حل کرنا ہے۔ صحت، جرائم، حمل و نقل اور ابلاغ میں اس کے استعمال میں اضافہ ہو رہا ہے اور یہ ان میں بہت اہم کردار ادا کر رہا ہے۔

جی پی ایس کا بنیادی تصور(Basic Concept of GPS)

عالمی مقامیاتی نظام(G.P.S)ایک خلائی جہازرانی(Navigation)نظام ہے جو مقام اور وقت کی معلومات کو زمین پر یا زمین کے اطراف پر موسم میں پہنچاتا ہے۔

جی پی ایس خلائی سیارچہ جہازرانی نظام ہے جو آپ کے بالکل درست مقام کو زمین پر یا زمین کے قریب دکھاتا ہے اگرچہ کہ آپ کسی بھی مقام پر، کسی بھی وقت اور کسی بھی موسم میں ہوں۔ جی پی ایس نظام زمین کے اطراف، فوجی، شہری اور تجارتی صارفین کو مبصرانہ صلاحیت فراہم کرتا ہے۔

جی پی ایس کا ارتقا(Development of GPS)

ریاست ہائے متحدہ امریکہ (USA) کی حکومت نے دوسرے ہائی ٹیک ترقیوں کی طرح جی پی ایس کو بھی سنبھالے رکھا جس تک کوئی بھی جی پی ایس وصول کنندہ کی مدد سے پہنچ سکا ہے۔ 1973ء میں فوج کے لیے سیارچی جہاز رانی نظام کو ترقی دینے کا فیصلہ کیا گیا۔ 1974-79 امریکی فضائیہ اور بحریہ نے منظم تجربات کا اہتمام کیا۔ 1977 میں پہلے سگنل حاصل ہونے والے تجربے کو بغیر سیارچے کے مدار میں رکھا کیا گیا اور اشارات (Signals) سیوڈو سیارچہ (Pseudo) سے حاصل ہوئے۔ یہ تصور 60 کی دہائی میں شرا و ہوا پر پہلا مصنوعی سیارچہ 1978 میں خلا میں چھوڑا گیا۔ 1960 کے انجینئرس کے ڈیزائن کا مطالعہ کرتے ہوئے پچھلے جہاز رانی نظام کی خامیوں کو دور کرتے ہوئے متعدد پیشروؤں کے نظریات کو یکجا کرتے ہوئے 1973 میں جی پی ایس کا منصوبہ تیار کیا گیا۔ موجودہ نظام 26 جنوری 1993 کو اس وقت قابل عمل ہوا جب 24 ویں مصنوعی سیارچہ کو خلا میں چھوڑا گیا۔ ڈاکٹر بریڈ فورڈ پارکنسون (Dr. Bradford Parkinson)، روجر ایل ایسٹون (Roger L. Easton)، آئیون اے (Ivan A.) کو جی پی ایس کے ایجاد کرنے کا سہرا ملا۔

جی پی ایس کے استعمالات(Uses of GPS)

ریاست ہائے متحدہ امریکہ کی حکومت نے نہ صرف اسے بنایا بلکہ اسے برقرار رکھا اور اسے جی پی ایس وصول کنندہ رکھنے والے ہر شخص کے لیے آزادانہ طور پر قابل رسائی بنا دیا۔ عالمی مقامیاتی نظام (جی پی ایس) دنیا بھر کے فوجی، شہری اور تجارتی صارفین کو اہم مبصرانہ صلاحیتوں کو فراہم کرتا ہے۔ چند حسب ذیل ہیں۔

1. **سڑک پر ٹریفک کی بھیڑ بھاڑ(Road Traffic Congestion):** موٹر وے کے ایک حصے پر نیوی گیشن ڈیوائس (Navigation Device) ہوتا ہے جس میں جی پی آر ایس ریسیور ہوتا ہے جو حقیقی وقت کی معلومات کو حاصل کرتا ہے جیسے موٹر وے پر رفتار سست ہے یا اوسط ہے یا تیز ہے جو ٹریفک کا انجماد یا بھیڑ کو دکھایا گیا ہے۔ اور بھیڑ بھاڑ والے علاقے میں بھیڑ سے بچنے کے لیے آلہ (ڈیوائس) دوسرے راستے کا حساب لگاتا ہے جس میں موجودہ بھیڑ بھاڑ والے راستے کی رفتار سے زیادہ دوسری سڑکوں پر رفتار ہوتی ہے۔
2. **ٹیکسٹونکس(Tectonics):** ماہرین جغرافیہ زمینی حرکت اور مقام کی درست پیائش کے لیے جی پی ایس کا استعمال کرتے ہیں۔ جی پی ایس زلزلہ کے دوران زمینی سطح کے ڈھنس جانے کی پیائش کے قابل ہوتا ہے۔ اور جی پی ایس زلزلے کے خطرہ کا امکانی نقشہ بنانے میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔
3. **جی پی ایس اور دہشت گردی(GPS and Terrorism):** دہشت گرد حملہ آوروں کے مقام کو معلوم کرنے کے لیے جی پی ایس بہت اہم ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر بھارتی خفیہ ایجنسیوں (Indian Intelligence Agencies) نے معلوم کیا تھا کہ دہشت گردوں کی جانب سے 21 جولائی 2015 کو یعنی حملہ سے 6 دن پہلے جی پی ایس سیٹس کو استعمال کیا گیا تھا۔
4. **جہاز رانی(Navigation):** جہاز راں جی پی ایس کی مدد سے درست رفتار اور سمت کا تعین کرتے ہیں اور راستے پر بھیڑ بھاڑ

اور منزل کے لیے متبادل راستے اور منزل کے لیے مناسب راستوں کا انتخاب کرتے ہیں اور حسبِ ضرورت غذا، بنک، ہوٹل، ایندھن، طیرانگاہ وغیرہ والے راستہ کا انتخاب کرتے ہیں، دو مقامات کے درمیان راستہ۔ اسی طرح قومی شاہراہ یا دوسری سڑک کے انتخاب وغیرہ میں جی پی ایس معاون کردار ادا کرتا ہے۔

5. **ریڈیو سونڈس اور ڈراپ سونڈس(Radio Sondes and Drop Sondes):** زمین کی سطح سے 27 کیلو میٹر تک فضائی دباؤ، ہوا کی رفتار، اور سمت کی پیمائش اور شمار کے لیے جی پی ایس ریڈیو سونڈ (ریڈیائی فضائی پیماء) اور ڈراپسونڈ استعمال کرتے ہیں۔

6. **فلیٹ ٹریکنگ(Fleet Tracking):** جی پی ایس ٹکنالوجی کو استعمال کرتے ہوئے گاڑیوں کی شناخت مقام اور ایک سے زائد گاڑیوں کے ساتھ حقیقی وقت میں رابطہ رکھ سکتے ہیں۔

7. **سیلولر ٹیلیفون(Cellular Telephone):** جی پی ایس میں گھڑیوں میں مطابقت ہوتی ہے جس وجہ سے یہ نظام وقت کے کوڈس کے منتقل ہونے کے قابل رہتا ہے اور منتقل ہونے والے کوڈس دوسرے بیس اسٹیشنس(Base Stations) کے ساتھ ہم آہنگ ہوتے ہیں۔ اس طرح یہ نظام سیلولر کے مقام کا اظہار کرسکتا ہے۔

8. **روبوٹیکس(Robotics):** عرض البلد طول البلد، وقت اور رفتار کو معلوم کرنے کے لیے خودکار جہاز رانی (Automated Navigation) میں خود مختار روبوٹس جی پی ایس سینسر کا استعمال کرتے ہیں۔

9. **کھیل(Sport):** فٹ بال اور رگبی میں نگرانی اور تجزیہ کے لیے اس کا استعمال ہوتا ہے۔

10. **خودکار گاڑی(Automated Vehicle):** کار اور ٹرک جی پی ایس سے راستہ اور مقام کی مدد سے بغیر انسانی ڈرائیور کے کام کرسکتے ہیں۔

11. **زراعت(Agriculture):** جی پی ایس پر مبنی اپلی کیشن کا استعمال کرتے ہوئے کاشت کی منصوبہ بندی کی جاسکتی ہے اور کھیت کی نقشہ سازی، مٹی کی نمونہ بندی، ٹریکٹر کی رہنمائی، فصل کی خبر گیری، مختلف قیمت کے لیے درخواست اور منافع کا تجزیہ کیا جاسکتا ہے۔ جی پی ایس کی مدد سے کسان کو جس وقت ٹھیک نظر نہیں آتا اس وقت بھی کام کرسکتا ہے۔ جیسے کہ بارش، تاریکی، دھول، کہر وغبار وغیرہ میں بھی کام کرسکتا ہے۔

12. **تیل کا رساؤ اور جی پی ایس(Oil Leak and GPS):** سمندر میں تیل کے رساؤ کے لیے بھی جی پی ایس ٹکنالوجی مددگار ثابت ہورہی ہے۔ جہاں ہوا اور موجوں کے اثرات اور ہوا کی رفتار کی پیمائش کرتے ہوئے معلوم کرنے کی کوشش کی جارہی ہے کہ تیل سمندر سے ساحل تک کس طرح پھیلتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ معلومات کو جمع کرنے کے لیے کئی آلات کو استعمال کیا جارہا ہے جب کافی معلومات حاصل ہوگئی ہوں تب محققین سہ ابعادی تصاویر کو استعمال کرتے ہوئے تیل کے حمل و نقل کا مطالعہ کرتے ہوئے تیل کے بکھیڑنے سے متعلق مزید معلومات فراہم کرنے کا منصوبہ رکھتے ہیں اس طرح ممکن ہی ہے کہ

تیل کے رساؤ سے ہونے والے نقصان کو کم کیا جا سکے اور ماحول کو محفوظ رکھ سکیں۔

13. **علم فلکیات (Astronomy):** نجوم پیمائی اور فلکی میکانیات میں مقام اور وقت سے ہم آہنگ دونوں معلومات استعمال ہوتی ہے اور ان کو شوقیہ فلکیات کے مشاہدات میں بھی ان کو استعمال کرتے ہیں جیسے کہ نظام شمسی کے علاوہ سیاروں کی تلاش و مشاہدات میں بھی استعمال ہوتا ہے۔

14. **جی پی ایس اور جنگلات کاری (GPS and Forestation):** جی پی ایس ٹکنالوجی شجرکاری کے عمل کو مزید موثر بناتی ہے۔ جدید دور کا ایک بڑا مسئلہ جنگلات کی کٹائی اور جنگلی جانوروں کے مسکن اوجھل ہونا ہے۔ درختوں کو تیزی سے کاٹا جارہا ہے۔ اگر دوبارہ درخت لگائیں گے تب بھی ان کو بڑے ہونے کے لیے کافی وقت درکار ہوگا۔ جی پی ایس ٹکنالوجی کو استعمال کرتے ہوئے جنگلات کو پھر سے آباد کرنے کے لیے مؤثر طریقے تیار کیے جا رہے ہیں۔

9.7 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

دو سیاروں کی فراری رفتاروں کی نسبت دریافت کرو اگر 'g' دو سیاروں $9.8\ m/sec^2$ اور $3.3\ m/sec^2$ اور نصف قطر 6400 km اور 3400km ترتیب وار ہو۔

حل:

G اور R کی رقم میں فراری رفتار

فراری رفتار کی نسبت $= \frac{V_{e_1}}{V_{e_2}}$

$$\frac{V_{e_1}}{V_{e_2}} = \sqrt{\frac{g_1 R_1}{g_2 R_2}}$$

g_1= پہلے سیارہ پر $9.8\ m/sec^2$

g_2= دوسرے سیارہ پر $3.3\ m/sec^2$

R_1= پہلے سیارہ پر نصف قطر $6400km = 6400 \times 10^3 m$

R_2= دوسرے سیارہ پہ نصف قطر $3400km = 3400 \times 10^3 m$

$$\frac{V_{e_1}}{V_{e_2}} = \sqrt{\left(\frac{9.8}{3.3}\right)\left(\frac{6400 \times 10^3}{3400 \times 10^3}\right)}$$

$$\frac{V_{e_1}}{V_{e_2}} = \frac{2.364}{1}$$
$$V_{e_1} : V_{e_2} = 2.364 : 1$$

حل شدہ مثال2

زمین کے دو سیارچوں کی مداری چال کی نسبت دریافت کرو۔ اگر سیارچوں کی بلندی 6400 km اور 19200km زمین کا نصف قطر= 6400 km

حل: سیارچوں کی مداری چال V_0

$$V_0 = \sqrt{\frac{Gm}{R+h}}$$

زمین کے اطراف دو سیارچوں کی مداری چال کی نسبت ہو گی

$$\frac{V_{O_1}}{V_{O_2}} = \sqrt{\frac{R + h_2}{R + h_1}}$$
$$h_1 = 6400\ km = 6400 \times 10^3 m$$
$$h_2 = 1900km = 1900 \times 10^3 m$$
$$R = 6400km = 6400 \times 10^3 m$$

$$\frac{V_{O_1}}{V_{O_2}} = \sqrt{\frac{6400 + 19200}{6400 + 6400}} = \sqrt{\frac{25600}{12800}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$
$$V_{O_1} : V_{O_2} = \sqrt{2} : 1$$

حل شدہ مثال3

دو سیارچوں کی مداری چال کی نسبت دریافت کرو جب کہ ایک سیارچہ زمین کے اطراف گردش کرتا ہے اور دوسرا مریخ کے اطراف۔ زمین کی کمیت $6.4 \times 10^{24} kg$ مریخ کی کمیت $6.4 \times 10^{23} kg$ زمین کا نصف قطر=6400km مریخ کا نصف قطر 3400km۔

حل: سیارچوں کی مداری چال V_0

$$V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

مداری چال کی نسبت $\frac{V_{O_1}}{V_{O_2}} = \sqrt{\left(\frac{M_1}{M_2}\right)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

زمین کی کمیت $m_1 = 6.4 \times 10^{24} kg$

مریخ کی کمیت $m_2 = 6.4 \times 10^{23} kg$

زمین کا نصف قطر $R_1 = 6400km = 6400 \times 10^3 m$

مریخ کی کمیت $R_2 = 3400km = 3400 \times 10^3 m$

$$\frac{V_{O_1}}{V_{O_2}} = \sqrt{\frac{6.4 \times 10^{24} \times 3400 \times 10^3}{6.4 \times 10^{23} \times 6400 \times 10^3}} = \sqrt{\frac{64 \times 34}{6.4 \times 64}} = \frac{2.232}{1}$$

$$V_{O_1} : V_{O_2} = 2.232 : 1$$

حل شدہ مثال4

ایک سیٹلائٹ سطح زمین سے 1000km کی بلندی پر حرکت کر رہا ہے۔ اگر زمین کا نصف قطر $6.37 \times 10^6 m$ اس کی کمیت $5.98 \times 10^{23}\ kg$ اور تجاذبی مستقل کی قیمت $6.37 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$ ہو تو سٹیلائیٹ کی مداری رفتار معلوم کیجیے۔

حل:

$$h = 1000\ km = 1000 \times 10^3 m$$
$$R = 6.37 \times 10^6 m$$
$$G = 6.37 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$$
$$M = 5.98 \times 10^{23}\ kg$$

$$V = \sqrt{\left(\frac{GM_e}{r}\right)} = \sqrt{\left(\frac{GM_e}{R+h}\right)}$$

$$= \sqrt{(\frac{6.673X10^{-11}\ X5.98X10^{24}}{6.37X10^{6}+1X10^{6}})}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{6.673\times10^{13}}{7.37\times10^{6}}\right\}} = \sqrt{\left(\frac{6.673X10^{7}}{7.37}\right)}$$

$$V = 9.05 \times 10^{3}\ m/sec$$

حل شدہ مثال5

زمین سے 7×10^{6} m بلندی پر ایک سٹیلائٹ کو زمین کے گرد چکر لگانے کے لیے 90 منٹ درکار ہوتے ہیں اگر زمین پر کھڑا ہوا ایک مشاہد اس سٹیلائٹ کو قائم حالت میں دیکھنا چاہے تو زمین کے مرکز سے سٹیلائٹ کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل:

کیپلر کے تیسرے کلیے کی رو سے

$$\frac{{T_1}^2}{{T_2}^2} = \frac{{a_1}^3}{{a_2}^3}$$

$$a_1 = 7 \times 10^{6}\ m \qquad T_1 = 90 \times 60\ sec$$
$$a_2 = \ \dots \qquad T_2 = 24 \times 60 \times 60\ sec$$
$${a_2}^3 = {a_1}^3\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$$
$${a_2}^3 = (7 \times 10^{6})^3\left(\frac{24 \times 60 \times 60}{90 \times 60}\right)^2$$
$$a_2 = 1.76 \times 10^{7} m$$

9.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- کیپلر نے سورج کے اطراف گھومنے والے سیاروں کی حرکت کے متعلق تین کلیات کا اعلان کیا۔
- کیپلر کا پہلا کلیہ: سیاروں، خاص کر زہرہ زمین اور نیپٹون (Neptune) کے مدار کسی قدر کم دائرہ نما ہوتے ہیں۔
- کیپلر کا دوسرا کلیہ: سیاروں کی رفتار مستقل نہیں رہتی ان کی رفتار اعظم ترین ہوتی ہے جب کہ وہ سورج سے بہت قریب ہوتے ہیں اور اقل ترین ہے جب کہ وہ سورج سے بہت دور ہوتے ہیں۔

- کیپلر کا تیسرا کلیہ: سیارے کے وقت دوران کے مربع کو سورج سے اس کے اوسط فاصلے کے مکعب سے تقسیم کرنے پر حاصل تقسیم تمام سیاروں کے لیے ایک ہی ہوتا ہے۔
یعنی $\frac{T^2}{a^3} = Constant$
- سیارہ کے اطراف دائروی مدار میں اجسام کی وہ افقی رفتار جس سے وہ گردش کرتے ہیں مداری رفتار کہلائی ہے۔
$V_0 = \sqrt{gR}$
- ثقلی قوت کی کشش سے بچنے کے لیے سیارے کی اقل ترین انتصابی رفتار فراری رفتار کہلاتی ہے۔Ve= $\sqrt{2gR}$
- جیو سنکرونس مدار کا گردشی وقت دوران زمین کے گردشی وقت دوران مساوی ہوتا ہے۔
- سیاروں پر عائدہ ہونے والی قوت صفر ہو وہ سیاروں کی بے وزنی سیاروں (Weightlessness Satellites) کہلاتی ہے۔
- جی پی ایس ایک جدید ٹیکنالوجی ہے۔ روز مرہ زندگی میں جی پی ایس کی اہمیت کا انکار ممکن نہیں ہے۔ کیوں کہ آج کی متحرک دنیا میں جی پی ایس کا استعمال تیزی سے بڑھ رہا ہے۔ اس کا کام مسائل کو حل کرنا ہے۔ صحت، جرائم، حمل و نقل اور ابلاغ میں اس کے استعمال میں اضافہ ہو رہا ہے اور یہ ان میں بہت اہم کردار ادا کر رہا ہے۔

9.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

دو محدودی محور (Coordinate Axis)	:	عرض اور بلندی سے خطوط کھینچے تب حاصل ہونے والی شکل
حوالہ فریم (Frame of Reference)	:	ذرے کی حرکت یا مقام کا مطالعہ کیا جاتا ہے
خیالی قوت (Ficticious Force)	:	وہ قوت غیر جمودی حوالہ فریم سے آئی جو نظر نہیں آتی
عرض البلد (Latitude)	:	گلوب کے خط استوا کے شمال سے زاویائی فاصلہ
بلندی (Altitude)	:	سطح زمین سے بلند

9.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

9.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. مندرجہ ذیل حالات میں کون سی بنیادی قوت کا دخل ہے بیان کرو۔
a) زمین کا سورج کے اطراف گھومنا۔
b) الکٹران کا مرکز کے گرد گھومنا۔
c) نیوٹرن کا پروٹان میں بدلنا "الکٹران" اور antinuetrino کو خارج کرنا۔

d) مرکز میں دو پروٹان کے درمیان قوت کشش۔

e) مرکز کے باہر دو پروٹانوں کے درمیان قوت دفع۔

2. ایک بس حالت سکون سے شروع ہورہی ہے اس میں کون سے قسم کا حوالہ فرہم ہو گا۔

3. سیاہ چھید میں فراری رفتار کیا ہو گی؟

4. ایک جسم مداری رفتار سے پھینکا گیا ہے یہ کس طرح حرکت کرے گا؟

5. سیارچہ میں موجود جسم کا ظاہری وزن کتنا ہوتا ہے؟

6. ایک جسم مداری رفتار سے زیادہ لیکن فراری رفتار سے کم رفتار سے پھینکا گیا ہے۔ یہ کس طرح حرکت کرے گا؟

7. ایک جسم کا مداری رفتار Vo = ...ہے۔

a) $\sqrt{2gR}$ b) $\sqrt{gR}$ c) $\sqrt{g/R}$ d) $\sqrt{R/g}$

8. ایک جسم کی فراری رفتار V_e=....................ہے۔

9. مداری رفتار کن اجزا پر منحصر ہوتی ہے؟

9.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. کیپلر کے کلیات کو بیان کرو۔

2. مداری رفتار کسے کہتے ہیں؟ اس کی عبارت اخذ کرو۔

3. فراری رفتار کسے کہتے ہیں؟ اس کی عبارت اخذ کرو۔

4. جیو سینکرونس مدار پر ایک نوٹ لکھیے۔

5. GPS پر ایک نوٹ لکھیے۔

9.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. فراری اور مداری رفتاریں کسے کہتے ہیں؟ اس کی عبارتیں اخذ کرو۔

2. سٹیلائیٹ سے کیا مراد ہے؟ ثابت کیجیے کہ زمین سے قریب رہنے والے سیٹلائٹس کی مداری رفتار ہو گی۔ $V = \left(\frac{gR}{r}\right)^{1/2}$

3. جی پی ایس کے بنیادی تصورات اور اس کے استعمالات کو تفصل سے بیان کیجیے۔

9.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. سطح زمین سے فراری رفتار دریافت کرو اگر زمین لکڑی کی بنی ہوتی تب اس کی کمیت موجودہ کمیت کی 10٪ ہو گی۔ ایسی صورت میں فراری رفتار کتنی ہو گی؟
2. سطح زمین سے 3200km کی بلندی پر ایک سیارچہ دائروی مدار میں گھوم رہا ہے۔ اگر اس بلندی پر اسراع بوجہ جاذب زمین $4.378 m/sec^2$ ہے۔ تب سیارچہ کی مداری رفتار کو دریافت کرو۔
3. دو سیارچوں کی بلندی 1000km، 2000km ہے۔ ان کی زرویئائی مداری چال دریافت کرو۔
4. ایک سٹیلائیٹ کو چاند کے گرد اس کی سطح سے 100km کی بلندی پر مداری حرکت میں قائم کیا گیا۔ سٹیلائیٹ کی مداری رفتار اور اس کے وقت دوران کو معلوم کیجیے۔ دیا گیا ہے کہ چاند کی کمیت $7.355 \times 10^{27}\ kg$ اور اس کا نصف قطر $1.18 \times 10^6 m$
(جواب: 1.634×10^{-3} m/sce: 1.964hrs)

9.11 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1.College Physics by Sears.F.W.& Zemansky.M.W. Wesley Publishing Co.Inc.London

2.Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta Dhanpat Rai Publications

3.Mechanics by Kittel,M.C.Graw Hill

4.Mechanics by Mathur .D.S,S.Chand Publication

5.Modern College Physics by White.H.E. East West Press Pvt.Ltd New Delhi

6.Physics by Zafiratos.C, John wesiey &Sons. Inc. New York

7.Physics Part I by Resnik.R &Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi

8.Technical Physics by Bueche.F ,Harper &Row Publication,New York

اکائی 10۔ اہتزازات

(Oscillations)

اکائی کے اجزا

10.0 تمہید

10.1 مقاصد

10.2 سادہ موسیقی حرکت

10.3 سادہ موسیقی حرکت کی تفرقی مساوات

10.4 حل شدہ مثالیں

10.5 اکتسابی نتائج

10.6 کلیدی الفاظ

10.7 نمونہ امتحانی سوالات

10.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

10.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

10.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

10.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

10.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

10.0 تمہید (Introduction)

ہر وہ مادی حرکت جو ایک معینہ وقفے کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے دوری حرکت(Periodic Motion) یا موسیقی حرکت (Harmonic Motion) کہلاتی ہے۔ سورج کے گرد سیاروں کی گردش زمین کے گرد چاند کی گردش' گھڑی میں سیکنڈ کے کانٹے کی حرکت' دیواری گھڑی (Wall Clock) میں رقاص(Pendulum) کی حرکت اور بجتی ہوئی گھنٹی میں جواہرات و سالمات کے ارتعاشات (Vibrations) موسیقی حرکت کی چند مثالیں ہیں۔ اگر موسیقی حرکت کرنے والا جسم یا ذرّہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا اوپر نیچے حرکت کر رہا ہو تو اس کی یہ حرکت اہتزازی حرکت(Oscillatory Motion) کہلاتی ہے۔ روزمرہ زندگی میں ہمارا سابقہ بے شمار اہتزازی حرکت سے پڑتا ہے۔ سادہ رقاص(Simple Pendulum) کے کرے(Bob) کی حرکت ہو یا انتصابی(Vertical) سمت میں لٹکائے گئے ایک اسپرنگ کے آزاد سرے پر بندھے ایک جسم قدر کھینچ کر چھوڑ دینے پر اس میں پیدا ہونے والی حرکت ہو یا پھر ساکن پانی کی سطح پر کسی بھی طرح کے خلل سے پیدا ہونے والی موجوں میں پانی کے سالمات کی اوپر نیچے ہونے والی حرکت اہتزازی حرکت کی مثالیں ہیں۔ ان اہتزازی حرکت کو میکانی اہتزازات بھی کہتے ہیں۔ کیوں کہ نور کی شعاعیں (Light Radiations) جب ہوا یا کسی واسطے (Medium) میں سفر کرتی ہیں تو اس میں مقناطیسی توانائی (Magnetic Energy) اور برقی توانائی (Electric Energy)کے سمتیے (Vectors)ایک دوسرے سے عموددار اہتزاز کرتے ہیں جنہیں برقی مقناطیسی اہتزازات (Electro-magnetic Oscillations) کہا جاتا ہے۔

10.1 مقاصد (Objectives)

اہتزازی حرکت (Oscillatory Motion) کے لیے چند اصطلاحوں کو بیان بھی کیا جاتا ہے۔ ان میں وقت دوراں ' (Periodic Time)تعدد (Frequency) نقل مکان (Displacement) 'حیطہ (Amplitude) ہیئت '(Phase) 'بحالی قوت (Restoring Force) سادہ موسیقی حرکت((Simple Harmonic Motions (SHM) 'اور سادہ موسیقی اہتزازیہ ((Simple Harmonic Oscillator (SHO) قابل ذکر ہیں۔ اس اہتزازیہ (Oscillator) کی ایک مساوات کو حسابی طریقے سے اخذ کیا جائے گا جو SHM کی تفرقی مساوات(Differential Equation) کہلاتی ہے۔ اس مساوات کے حل کے ذریعے تجزیہ (Analysis) بھی کیا جائے گا۔

10.2 سادہ موسیقی حرکت(Simple Harmonic Motion)

سادہ موسیقی حرکت کسی اہتزازیہ (Oscillator) کی ایک مخصوص قسم کی حرکت ہوتی ہے جس میں وہ بار بار اپنی حرکت کے دوران توازنی مقام سے گزرتا رہتا ہے۔ اس کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ ایک ایسی موسیقی حرکت جس میں اہتزازیہ (Oscillator)

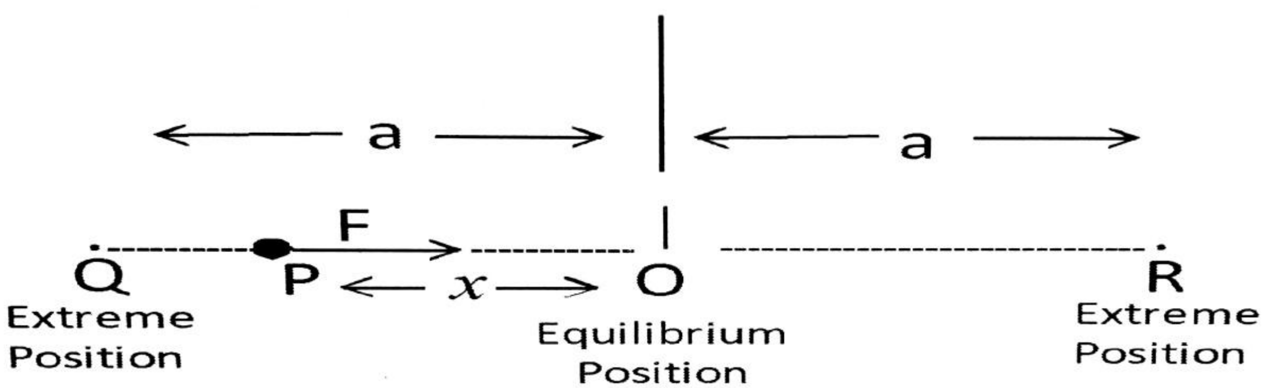
پر عمل کرنے والی بحالی قوت نقل مکان (Restoring Force Displacement) سے مخالف سمت میں راست متناسب ہوتی ہے۔ اس تمام بحث سے جو نتائج اخذ کیے جاتے ہیں انہیں سادہ موسیقی اہتزازیہ (Simple Harmonic Motion) کی خصوصیات سے تعبیر کیا جاتا ہے جو کچھ اس طرح ہیں:

یہ ایک دورئی حرکت(Periodic Motion) ہے۔ یہ حرکت توازنی مقام کی سمت میں ہوتی ہے۔ اس حرکت کا راستہ ایک خط مستقیم میں ہوتا ہے۔ حرکت کرنے والا جسم یاذرے کا اسراع (Acceleration) اس کے نقل مکان(Displacement) راست متناسب ہوتا ہے۔ یہ اسراع ہمیشہ اوسط مقام (Mean Position) یا توازنی مقام(Equilibrium Position) کے مقام کی سمت میں ہوتا ہے۔

کسی اہتزازی حرکت کا دوری حرکت (Periodic Time) وہ وقت ہوتا ہے جو ایک مکمل اہتزاز کے لیے درکار ہو۔ جب کہ ایک سیکنڈ میں کسی اہتزازیہ (Oscillator) کے ذریعے عمل پذیر اہتزازات کی تعداد اس کی تعدد(Frequency) کہلاتی ہے۔ اگر وقت دوران T اور تعدد n ہو تو ان کے درمیان پایاجانے والا رشتہ $n=1/T$ یا $T=1/n$ ہو تا ہے۔ نقل مکان(Displacement) وہ فاصلہ ہے جو ایک اہتزازیہ (Oscillator) اپنے مقام توازن سے کسی بھی سمت میں طے کرتا ہے۔ حیطہ(Amplitude) کسی اہتزازیہ (Oscillator) کا اپنے توازنی مقام سے طے کردہ اعظم ترین فاصلہ ہوتا ہے۔ کسی اہتزازیہ کے توازنی مقام سے ہٹالیے جانے کے بعد واپس اس مقام تک پہنچنے کے لیے عمل پذیر ہونے والی قوت بحالی قوت کہلاتی ہے۔ ہیئت(Phase) کے ذریعے عمل میں آنے والی موسیقی حرکت کی حالت کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔ وہ حرکتیں ایک ہی فریکوئینسی(Frequency) اور ایک ہی حیطہ کی ہو سکتی ہیں لیکن ان کے ہیئت میں فرق ہوتا ہے۔

10.3 سادہ موسیقی حرکت کی تفرقی مساوات

(Differential Equation of Simple Harmonic Motion)



شکل(10.1)

مان لیں m کمیت (mass) رکھنے والا ایک ذرّہ P' O توازنی مقام کے ساتھ x نقل مکان (Displacement) کی وجہ سے X-axis پر سادہ موسیقی اہتزازیہ (Simple Harmonic Oscillations) کر رہا ہے۔ اس حرکت میں Q اور R اہتزاز کے اعظم ترین مقام (Extreme Positions) ہیں اور a حیطہ اہتزاز (Amplitude of Oscillations) اور F پیدا ہونے والی بحالی قوت بموجب شکل (10.1) ہے۔

سادہ موسیقی حرکت کی تعریف کی رو سے

$$F \propto -x \tag{10.1}$$

$$F = -Kx$$

جہاں k تناسبی مستقل (Proportionality Constant) ہے جو قوت فی اکائی نقل مکان کو ظاہر کرتا ہے۔ اس مساوات میں منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ قوت F کی سمت نقل مکان x کی سمت کے مخالف ہوتی ہے۔ نیوٹن کے دوسرے کلیہ حرکت (2nd Law of Motion) کی رو سے 'کمیت m پر عمل کرنے والی بحالی قوت F اور اس کے ذریعے پیدا ہونے والے اسراع کی قیمت $\frac{d^2x}{dt^2}$ میں رشتہ ہوگا۔

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{10.2}$$

مساوات (10.1) اور (10.2) کو ملانے پر حاصل ہوگا۔

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{10.3}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{10.4}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

اگر $\frac{k}{m}$ کی قیمت کو ω^2 مان لیں تب

:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{10.5}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (10.6)$$

یہ مساوات سادہ موسیقی حرکت کی تفرقی مساوات (Differential Equation) کہلاتی ہے۔

10.3.1 سادہ موسیقی حرکت کی مساوات کا حل (Solution of Equation of SHM)

سادہ موسیقی اہتزازیہ کی رفتار $v = \frac{dx}{dt}$ اور $\frac{d^2x}{dt^2}$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) \qquad (10.7)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

dx سے ضرب اور تقسیم کرنے کے بعد مساوات ہو گی۔

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \qquad (10.8)$$

چونکہ $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ ہے۔اس کو داخل کرنے کے بعد مساوات ہو جائے گی۔

$$v\frac{dv}{dx} = -\omega^2 x \qquad (10.9)$$

$$vdv = -\omega^2 x dx \qquad (10.10)$$

مساوات (10.10) کو تکمیل (Integrate) کرنے کے بعد

$$\frac{v^2}{2} = -\omega^2\frac{x^2}{2} + k_1 \qquad (10.11)$$

جہاں تکمیل k_1 کا مستقل ہے۔ k_1 کی قیمت کو حاصل کرنے کے لیے x=a جس میں a حیطہ اہتزاز (Amplitude Oscilliation) کے لیے لیا گیا ہے جہاں اہتزازیہ کی رفتار v=0 ہو گی۔

$$0 = -\omega^2\frac{x^2}{2} + k_1 \qquad (10.12)$$

$$k_1 = \omega^2 \frac{a^2}{2}$$

k_1کی یہ قیمت مساوات(10.11)میں درج کرنے پر

$$\frac{v^2}{2} = -\omega^2 \frac{x^2}{2} + \frac{\omega^2 a^2}{2}$$

$$v^2 = \omega^2(a^2 - x^2) \qquad (10.13)$$

تب رفتار v کی قیمت ہوگی۔

$$v = \omega\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (10.14)$$

مساوات(10.14)میں $v = \frac{dx}{dt}$ درج کرنے پر

$$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (10.15)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \omega dt \qquad (10.16)$$

مساوات(10.16)میں $x = a \sin\theta$ اور $dx = a\cos\theta d\theta$ کو درج کرنے پر

$$\frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2 sin^2\theta}} = \omega t$$

$$\frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{a^2(1 - sin^2\theta)}} = \omega t \qquad (10.17)$$

$$\frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{a^2(1 - sin^2\theta)}} = \omega t$$

$$\frac{a\cos\theta}{a\cos\theta} d\theta = \omega t \qquad \because \; 1 - sin^2\theta = cos^2\theta$$

$$\therefore\ d\theta = \omega dt + \delta \qquad (10.18)$$

مساوات(10.18)کو تکمیل کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

$$\theta = (\omega t + \delta)$$

جہاں δ ایک مستقل ہے۔

تب نقل مکان (Displacement) کی قیمت ہوگی

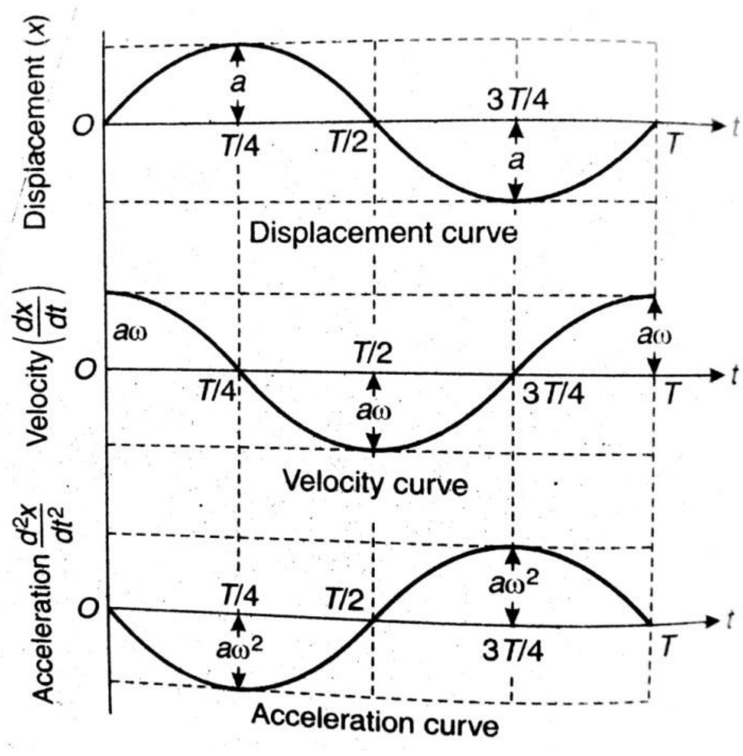
$$x = asin(\omega t + \delta) \qquad (10.19)$$

مساوات(10.19)میں دیے گئے نقل مکان کی قیمت x اس وقت ہوگی جب O اہتزازیہ X-axis میں اہتزاز کررہا ہو۔ اگر وہ Y-axis میں اہتزاز کررہا ہو تو یہ مساوات ہوگی۔

$$y = asin(\omega t + \delta) \qquad (10.20)$$

گراف(Graph)

x۔ محور پر وقت اور y۔ محور پر نقل مکان,رفتار،اسراع لے کر ترسیم کو کھینچا گیا ہیں۔ اس ترسیم کے ذریعے نقل مکان,رفتار،اسراع وقت کے ساتھ تبدیلی کو دکھایا گیا ہیں۔



شکل(10.2)

(Source: Dr.S.L.Gupta & Sanjeev Gupta.Unified Physics Vol-I,Mechanics Jai Prakash Nath & Co.Meerut)

10.4 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت کررہاہے۔ جس کو مساوات $y = 0.02\, sin\left(3.14t + \frac{\pi}{2}\right)$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تب اس کا (i) حیطہ ارتعاش (ii) وقت دوراں (iii) تعدد (iv) ابتدائی ہیئت (v) اعظم ترین رفتار (vi) اعظم ترین اسراع معلوم کرو۔

حل: ایک ذرے کی سادہ موسیقی حرکت کی مساوات

$$y = 0.02\, sin\left(3.14t + \frac{\pi}{2}\right)$$

(i) حیطہ ارتعاش

$$A = 0.02m$$

(ii) وقت دوراں

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad or\ T = \frac{2\pi}{3.14} = 2\ sec$$

(iii) تعدد

$$\upsilon = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}HZ = 0.5\ HZ$$

(iv) ابتدائی ہیئت

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{3.14}{2} = 1.57\ rad$$

(v) اعظم ترین رفتار

$$V_{max} = A\omega = 0.02 \times 3.14 = 0.68msec^{-1}$$

(vi) اعظم ترین اسراع

$$a_{max} = -A\omega^2 = -0.02 \times 3.14^2 = -0.1972\ msec^{-2}$$

حل شدہ مثال 2

سادہ موسیقی حرکت کرنے والے ذرے کی مساوات $x = 5\, cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ ہے۔ اس کا (i) نقل مقام (ii) رفتار (iii) اسراع وقت t=0 پر معلوم کرو۔

حل: سادہ موسیقی حرکت کرنے والے ذرے کی مساوات $x = 5\, cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

$$x = A\, cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = 2\pi \quad A = 5m$$

$$x = 5\,cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

(i) نقل مقام

$$t = 0 \ \ , \text{پر}\ x = x_0 = 5\,cos\frac{\pi}{4} = 5 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3.54\,m$$

(ii) رفتار

$$V = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$x = \omega \quad t = 0\ \text{جہاں}$$

$$V = V_0 = \omega\sqrt{A^2 - \omega^2}$$

$$= 2\pi\sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2\pi\sqrt{25 - \frac{25}{2}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{25}{2}} = 22.2\,msec^{-1}$$

(iii) اسراع وقت t=0 پر

$$t = 0 \quad a = -\omega^2 x$$

$$a = a_0 = -\omega^2 x_0 = -(2\pi)^2 3.54 = -4\pi^2 \times 3.54$$

$$a_0 = -139.42\,msec^{-2}$$

حل شدہ مثال 3

ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت کرتا ہے جس کا وقت دوران 22sec ہے اور حیطہ ارتعاش 10cm ہے تب یہ 3.5 سیکنڈ میں کتنا فاصلہ صفر نقل مقام سے طے کرے گی۔

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$A = 10cm = 0.10m$$

$$T = 22sec$$
$$\emptyset = 0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 22}{7 \times 22} = \frac{2}{7}$$

$$X = A\, sin(\omega t + \varphi) = 0.10\, sin\left(\frac{2t}{7}\right)$$

3.5 سیکنڈ میں فاصلہ صفر نقل مقام سے

$$t = 3.5\ sec = \frac{7}{2} sec$$

$$x = 0.10\, sin\left(\frac{2 \times 7}{7 \times 2}\right) = 0.10\, sin\, 1$$

$$x = 0.10\, sin(57^0.\, 17') \qquad \because\ 1\, rad = 57^0.\, 17'$$

$$x = 0.10 \times 0.8414 = 0.08414m$$

حل شدہ مثال4

ایک جسم سادہ موسیقی ارتعاش کر رہا ہے۔ اس کا حیطہ ارتعاش 0.15m ہے اور تعدد 4Hz ہے (a) اس کی رفتار اور اسراع کی اعظیم ترین قیمتیں معلوم کرو۔ (b) 0.09m نقل مکان کے لیے اس کی رفتار اور اسراع کو معلوم کیجیے۔

حل:

$$x = A\, cos(\omega t + \delta)$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 4$$

$$\omega = 8\pi \, rad/sec$$

$$A = 0.15 \, m$$

$$x = 0.15 \, cos(8\pi t + \delta)$$

(a)اس کی رفتار اور اسراع کی اعظیم ترین

$$V_{max} = A\omega = 3.77 \, m/sec$$

$$a_{max} = A\omega^2 = 0.15(8\pi)^2 = 94.7 \, \frac{m}{sec^2}$$

(b) 0.09m نقل مکان کے لیے اس کی رفتار اور اسراع

$$x = 0.15 \, cos(8\pi t + \delta)$$

$$x = 0.09 \, m$$

$$0.09 = 0.15 \, cos(\omega t + \delta)$$

$$cos(\omega t + \delta) = 0.6$$

$$sin(\omega t + \delta) = 0.8$$

$$V = \omega A \, sin(\omega t + \delta)$$

$$V = 3.77 \times 0.8$$

$$V = 3.01 \, m/sec$$

$$a = \omega^2 A \, cos(\omega t + \delta)$$

$$a = 94.7 \times 0.6$$

$$a = 56.80\ \frac{m}{sec^2}$$

10.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

ہر وہ مادی حرکت جو ایک معینہ وقفے کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے دوری حرکت(Periodic Motion) یا موسیقی حرکت (Harmonic Motion) کہلاتی ہے۔ سورج کے گرد سیاروں کی گردش زمین کے گرد چاند کی گردش' گھڑی میں سیکنڈ کے کانٹے کی حرکت' دیواری گھڑی (Wall Clock) میں رقاص(Pendulum) کی حرکت اور بجتی ہوئی گھنٹی میں جواہرات و سالمات کے ارتعاشات (Vibrations)موسیقی حرکت کی چند مثالیں ہیں۔ اگر موسیقی حرکت کرنے والا جسم یاذرّہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا اوپر نیچے حرکت کررہاہو تو اس کی یہ حرکت اہتزازی حرکت(Oscillatory Motion) کہلاتی ہے۔ روزمرہ زندگی میں ہمارا سابقہ بے شمار اہتزازی حرکت سے پڑتا ہے۔ سادہ رقاص(Simple Pendulum) کے کرے(Bob) کی حرکت ہو یا انتصابی(Vertical) سمت میں لٹکائے گئے ایک اسپرنگ کے آزاد سرے پر بندھے ایک جسم قدر کھینچ کر چھوڑ دینے پر اس میں پیدا ہونے والی حرکت ہو یا پھر ساکن پانی کی سطح پر کسی بھی طرح کے خلل سے پیدا ہونے والی موجوں میں پانی کے سالمات کی اوپر نیچے ہونے والی حرکت اہتزازی حرکت کی مثالیں ہیں۔ ان اہتزازی حرکت کو میکانی اہتزازات بھی کہتے ہیں۔ کیوں کہ نور کی شعاعیں (Light Radiations) جب ہوا یا کسی واسطے (Medium) میں سفر کرتی ہیں تو اس میں مقناطیسی توانائی (Magnetic Energy) اور برقی توانائی (Electric Energy)کے سمتیے (Vectors)ایک دوسرے سے عموددار اہتزاز کرتے ہیں جنھیں برقی مقناطیسی اہتزازات (Electro-magnetic Oscillations)کہا جاتا ہے۔

- ایک مکمل اہتزازی حرکت کے لیے درکار وقت(T) (Time Period) کہلاتا ہے۔
- ایک سکنڈ میں مکمل کرنے والے اہتزازوں کی تعداد(n) (Frequence) کہلاتی ہے۔
- T اور n میں پایا جانے والا رشتہ $n = \frac{1}{T}$ یا $T = \frac{1}{n}$ ہوتا ہے۔
- اہتزاز کرنے والا جسم یا ذرے کا اوسط مقام سے اعظم ترین مقام تک کا طے کرنے والا فاصلہ حیطہ کہلاتا ہے۔
- ہئیت(Phase) کے ذریعے عمل پذیر موسیقی حرکت کی حالت کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔
- کسی اہتزاز کی اوسط مقام تک نقل مکان کے لیے عمل پیرا قوت Restoring Force کہلاتی ہے۔
- سادہ موسیقی حرکت وہ اہتزازی حرکت ہوتی ہے جس کا اسراع نقل مکان (Displacement) سے مخالف سمت میں راست متناسب ہوتا ہے۔
- مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ سادہ موسیقی حرکت SHM کی تفرقی مساوات(Differential Equation) کہلاتی ہے۔
- سادہ موسیقی حرکت کی رفتار(Velocity) کی قیمت $v = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$ ہوگی۔

- X-axis میں نقل مکان (Displacement) (x) اور Y-axis میں (y) کی قیمتیں ہوں گی۔

$$y = asin(\omega t + \delta) \text{ اور } x = asin(\omega t + \delta)$$

10.6 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **اہتزاز (Oscillation) (آ+سی+لے+شن):** کسی جسم یا ذرے کی وہ حرکت ہے جو ایک مخصوص فاصلے کے درمیان اوپر نیچے یا آگے پیچھے عمل میں آتی رہتی ہے۔ دیواری گھڑی (Wall Clock) کے پینڈولم کی دائیں بائیں حرکت یا ساکن پانی کی سطح پر خلل کے پیدا کیے جانے پر پانی کے سالمات کی اوپر نیچے حرکت اس کی اچھی مثالیں ہیں۔
- **اہتزازی حرکت (Oscillatory Motion) (آ+سی+لے+ٹری+مو+شن):** ایک موسیقی حرکت (Hamonic Motion) کرنے والا جسم یا ذرّہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا اوپر نیچے حرکت کرتا ہے تو اس حرکت کو اہتزازی حرکت (Oscillatory Motion) کہتے ہیں۔
- **وقت دوراں (Periodic Motion) (پی+ریا+ڈِک+ٹائم) :** ایک مکمل اہتزاز (Oscillation) کے لیے درکار وقت اہتزازیہ (Oscillator) کا وقت دوراں (Period Time) کہلاتا ہے۔ اسی طرح دائری حرکت میں ایک دائرہ مکمل کرنے کا وقت 'ارتعاشی حرکت (Vibrational Motion) میں ایک ارتعاش کی تکمیل کے لیے درکار وقت اور موجی حرکت (Wave Motion) میں ایک طول موج (Wave Length) کے کسی مقام سے گزرنے کا وقت اس کا وقت دوراں (Periodic Time) کہلاتا ہے۔
- **تعدد (Frequency) (فی+ری+کو+ین+سی):** ایک سکنڈ میں مکمل اہتزازوں کی تعداد فریکوئینسی تعدد کہلاتی ہے۔ اہتزازی حرکت کے علاوہ فریکوئینسی ایک دائری حرکت (Circular Motion) ارتعاشی حرکت اور موجی حرکت (Wave Motion) کے لیے بھی بیان کی جاتی ہے۔ دائری حرکت میں ایک سکنڈ میں طے کرنے والے دائروں کی تعداد ' ارتعاشی حرکت میں ایک سکنڈ میں مکمل کرنے والے ارتعاشات کی تعداد اور موجی حرکت میں ایک سکنڈ میں جملہ موجی طول کی گزرنے والی تعداد' ان کی فریکوئینسی کہلاتی ہے۔
- **نقل مکان (Displacement) (ڈِس+پلے+س+منٹ):** کسی اہتزازیہ کا توازنی مقام (Equalibrium Position) سے طے کردہ فاصلہ نقل مکان (Displacement) کہلاتا ہے۔
- **حیطہٗ اہتزاز (Amplitude of Oscillation) (ایم+پلی+ٹی+یوڈ):** کسی جسم یا ذرے کے اہتزاز میں زیادہ سے زیادہ طے کیا جانے والا نقل مکان (Displacement) اس کا حیطہٗ اہتزاز کہلاتا ہے۔
- **ہئیت (Phase) :** ہئیت کے ذریعے عمل میں آنے والی موسیقی حرکت کی حالت کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔ دو موسیقی حرکتیں ایک

ہی فریکوئینسی اور ایک ہی ایمپلی ٹیوڈ کی ہو سکتی ہیں لیکن ان کی ہئیت (Phase) میں فرق ہو سکتا ہے۔

10.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

10.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اہتزازی حرکت (Oscillatory Motion) کسے کہتے ہیں؟

a) دائری حرکت b) منحنی میں حرکت

c) دوری حرکت d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

2. تعدد 'n' اور 'T' (Periodic Time) دوری وقت میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے؟

a) $n = \frac{1}{T}$ b) $T = \frac{1}{n}$

c) $n \times T = 0$ d) تمام جوابات صحیح

3. بحالی قوت (Restoring Force) کا تعلق کس سے ہوتا ہے؟

4. سادہ موسیقی اہتزازیہ میں اسراع کس مقدار کے ساتھ راست تناسب میں ہوتا ہے۔

a) نقل مکان b) وقت دوراں

c) تعدد d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

5. سادہ موسیقی اہتزازیہ کے کسی بھی 't' پر نقل مکان 'x' کو کس مساوات کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے؟

a) $x = asin(\omega t - \delta)$ b) $x = 2asin(\omega t - \delta)$

c) $x = 2asin(\omega t + \delta)$ d) $x = asin(\omega t + \delta)$

6. سادہ موسیقی اہتزازیہ کی مساوات ہے۔

a) $\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x = 0$ b) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

c) $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\omega^2}{x} = 0$ d) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega^2}{x} = 0$

7. اہتزازات (Oscillations) کی کوئی دو مثالیں بیان کیجیے۔

8. موسیقی حرکت کی کوئی دو مثالیں بیان کیجیے۔

9. سادہ موسیقی حرکت (SHM) کے لیے نقل مکان (Displacement) کی مساوات لکھیے۔

10. SHM کو بیان کرنے کے لیے کون سی مقداروں کا سہارا لیا جاتا ہے؟

11. سادہ موسیقی حرکت SHM میں اسراع اور نقل مکان میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے؟

12. وقت دوران (Time Period) اور فریکوئینسی میں کیا نسبت پائی جاتی ہے؟ دونوں کا حاصل ضرب کیا ہوتا ہے؟

13. فریکوئینسی کسے کہتے ہیں؟

14. SHM کی تفرقی مساوات (Differential Equation) لکھیے۔

15. سادہ موسیقی حرکت SHM کے لیے نقل مکان کی مساواتیں X اور Y سمتوں میں لکھیے۔

10.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. موسیقی حرکت (Harmonic Motion) او سادہ موسیقی حرکت (SHM) میں فرق بیان کیجیے۔
2. سادہ موسیقی حرکت کی تعریف کیجیے اور اس کی کوئی تین مثالیں دیجیے۔
3. سادہ موسیقی حرکت کیا ہوتی ہے؟ اس کی طبیعی خصوصیات بیان کیجیے۔
4. سادہ موسیقی حرکت کی مساوات برائے نقل مکان لکھیے۔ اس مساوات کے اجزا کو بیان کیجیے۔
5. SHM میں نقل مکان کی مساوات $x = aCos(\omega t + \delta)$ کے اجزا ω ' a اور δ کی طبیعی اہمیت کو سمجھائیے۔
6. سادہ موسیقی حرکت کی تعریف کیجیے۔ ایک سادہ موسیقی اہتزازیہ (Simple Harmonic Oscillator) کی اصطلاح Phase کو سمجھائیے۔
7. سادہ موسیقی اہتزازیہ (Simple Harmonic Oscillator) کی مساوات لکھیے اور اس کو حل کیجیے۔

10.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. سادہ موسیقی حرکت SHM کی تفرقی مساوات (Differential Equation) کو اخذ کرکے اس کو حل کیجیے۔
2. سادہ موسیقی حرکت SHM کی صورت میں نقل مکان ' رفتار ' اسراع ' میں قوت کے لحاظ سے کس طرح تبدیلی واقع ہوتی ہے بیان کیجیے۔
3. سادہ موسیقی حرکت کی تعریف کیجیے اور اس کی کوئی تین مثالیں دیجیے۔ اس کی طبیعی خصوصیات بیان کیجیے۔ سادہ موسیقی حرکت کی مساوات برائے نقل مکان لکھیے۔ اس مساوات کے اجزا کو بیان کیجیے۔

10.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. اہتزاز کرنے والے ذرے کا نقل مقام وقت t میں مساوات $x = 2\ cos(0.5\pi t)$ سے تغیر ہے تب اس کا (i) حیطہ ارتعاش (ii) وقت دوراں (iii) اعظم ترین رفتار (iv) اعظم ترین اسراع معلوم کرو۔

2. سادہ موسیقی حرکت کرنے والے ذرے کی نقل مقام کی مساوات $y = 5\ sin\ 2\pi$ ہے۔(i) تعدیلی نقطے سے 3cm کے فاصلے پر اس کی رفتار کیا ہوگی۔(ii) اسراع تعدیلی نقطے سے 0.5sec بعد کیا ہوگی؟

3. ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت میں ہے۔ جس کی تعدد 5Hz اور حیطہ ارتعاش 2cm ہے۔ ابتداً یہ مثبت انتہائی نقاط پر ہے۔ اس کے نقل مقام کی مساوات لکھو۔

4. ایک 20gr کا ذرہ سادہ موسیقی حرکت کرنے والے جسم کا تعدد 3 اہتزاز فی ثانیہ ہے اور حیطہ ارتعاش 5cm ہے۔ یہ ایک مکمل اہتزاز کے دوران کتنا فاصلہ طے کرے گا۔ اس کی اوسط رفتار کیا ہے؟

10.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. College Physics by Sears.F.W.& Zemansky.M.W. Wesley Publishing Co.Inc.London
2. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta Dhanpat Rai Publications
3. Mechanics by Mathur .D.S,S.Chand Publication
4. Mechanics Berkely Physics Cource,Vol-I,Charless Kittel,Tata MC Graw Hill
5. Physics by Zafiratos.C, John wesiey &Sons. Inc. New York
6. Physics Part I by Resnik.R &Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi
7. Technical Physics by Bueche.F ,Harper &Row Publication,New York
8. Unified Physics Vol-I,Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath &Co.Meerut
9. University Physics, F W Sears, MW Zemansky and H D Young 13/e, 1986. Addison Wesley
10. University Physics, Ronald Lane Reese, 2003, Thomson, Brooks/Cole

اکائی 11۔ سادہ موسیقی حرکت کی توانائی

(Energy of Simple Harmonic Motion)

اکائی کے اجزا

11.0 تمہید

11.1 مقاصد

11.2 توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ

11.2.1 توانائی بالحرکت

11.2.2 توانائی بالقوہ

11.2.3 جملہ توانائی

11.2.4 توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کی ترسیم

11.3 حل شدہ مثالیں

11.4 اکتسابی نتائج

11.5 کلیدی الفاظ

11.6 نمونہ امتحانی سوالات

11.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

11.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

11.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

11.6.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

11.7 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

11.0 تمہید(Introduction)

ہر وہ مادی حرکت جو ایک معینہ وقفے کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے دوری حرکت(Periodic Motion)یا موسیقی حرکت (Harmonic Motion) کہلاتی ہے۔ سورج کے گرد سیاروں کی گردش زمین کے گرد چاند کی گردش' گھڑی میں سیکنڈ کے کانٹے کی حرکت' دیواری گھڑی (Wall Clock) میں رقاص(Pendulum) کی حرکت اور بجتی ہوئی گھنٹی میں جواہرات و سالمات کے ارتعاشات (Vibrations)موسیقی حرکت کی چند مثالیں ہیں۔اگر موسیقی حرکت کرنے والا جسم یاذرّہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا اوپر نیچے حرکت کررہاہو تواس کی یہ حرکت اہتزازی حرکت(Oscillatory Motion)کہلاتی ہے۔روزمرہ زندگی میں ہماراسابقہ بے شمار اہتزازی حرکت سے پڑتا ہے۔ سادہ رقاص(Simple Pendulum) کے کرے(Bob)کی حرکت ہو یا انتصابی(Vertical) سمت میں لٹکائے گئے ایک اسپرنگ کے آزاد سرے پر بندھے ایک جسم قدر کھینچ کر چھوڑ دینے پر اس میں پیدا ہونے والی حرکت ہو یا پھر ساکن پانی کی سطح پر کسی بھی طرح کے خلل سے پیدا ہونے والی موجوں میں پانی کے سالمات کی اوپر نیچے ہونے والی حرکت اہتزازی حرکت کی مثالیں ہیں۔ان اہتزازی حرکت کو میکانی اہتزازات بھی کہتے ہیں۔کیوں کہ نور کی شعاعیں (Light Radiations) جب ہوا یا کسی واسطے (Medium) میں سفر کرتی ہیں تو اس میں مقناطیسی توانائی (Magnetic Energy) اوربرقی توانائی (Electric Energy)کے سمتیے (Vectors)ایک دوسرے سے عمودوار اہتزاز کرتے ہیں جنہیں برقی مقناطیسی اہتزازات-Electro) magnetic Oscillations)کہاجاتاہے۔

سادہ موسیقی حرکت کسی اہتزازیہ (Oscillator) کی ایک مخصوص قسم کی حرکت ہوتی ہے جس میں وہ بار بار اپنی حرکت کے دوران توازنی مقام سے گزرتا رہتاہے۔اس کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ ایک ایسی موسیقی حرکت جس میں اہتزازیہ (Oscillator) پر عمل کرنے والی بحالی قوت نقل مکان (Restoring Force Displacement) سے مخالف سمت میں راست متناسب ہوتی ہے۔ اس تمام بحث سے جو نتائج اخذ کیے جاتے ہیں انہیں سادہ موسیقی اہتزازیہ (Simple Harmonic Motion)کی خصوصیات سے تعبیر کیاجاتاہے جو کچھ اس طرح ہیں:

یہ ایک دورئی حرکت(Periodic Motion) ہے۔یہ حرکت توازنی مقام کی سمت میں ہوتی ہے۔اس حرکت کاراستہ ایک خط مستقیم میں ہوتاہے۔ حرکت کرنے والا جسم یاذرے کا اسراع (Acceleration) اس کے نقل مکان(Displacement) راست متناسب ہوتاہے۔یہ اسراع ہمیشہ اوسط مقام (Mean Position)یا توازنی مقام(Equilibrium Position) کے مقام کی سمت میں ہوتاہے۔

کسی اہتزازی حرکت کا دوری حرکت (Periodic Time) وہ وقت ہوتاہے جو ایک مکمل اہتزاز کے لیے درکار ہو۔جب کہ ایک سیکنڈ میں کسی اہتزازیہ (Oscillator) کے ذریعے عمل پذیر اہتزازات کی تعداد اس کی تعدد(Frequency) کہلاتی ہے۔اگر وقت دوران T اور تعدد n ہو توان کے درمیان پایاجانے والارشتہ $n=1/T$ یا $T=1/n$ ہوتاہے۔ نقل مکان(Displacement)وہ

فاصلہ ہے جو ایک اہتزازیہ (Oscillator) اپنے مقام توازن سے کسی بھی سمت میں طے کرتا ہے۔ حیطہ(Amplitude) کسی اہتزازیہ (Oscillator) کا اپنے توازنی مقام سے طے کردہ اعظم ترین فاصلہ ہوتا ہے۔ کسی اہتزازیہ کے توازنی مقام سے ہٹا لیے جانے کے بعد واپس اس مقام تک پہنچنے کے لیے عمل پذیر ہونے والی قوت بحالی قوت کہلاتی ہے۔ ہیئت(Phase) کے ذریعے عمل میں آنے والی موسیقی حرکت کی حالت کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔ وہ حرکتیں ایک ہی فریکوئینسی(Frequency)اور ایک ہی حیطہ کی ہوسکتی ہیں لیکن ان کے ہیئت میں فرق ہوتا ہے۔

11.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی موسیقی حرکت کے توانائی کو سمجھایا گیاہیں ۔اس اکائی میں ہم

i. موسیقی حرکت کرنے والے جسم یاذرے کی توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کو محسوب کیا گیاہے۔

ii. جملہ توانائی کو(Total Energy) محسوب کیا گیاہے۔

iii. توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کی ترسیم(Graph of Kinetic Energy & Potential Energy) کو سمجھایا گیاہے۔

11.2 توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ (Kinetic Energy and Potential Energy)

سادہ موسیقی حرکت کرنے والے ایک اہتزازیہ (Oscillator) کے پاس دو قسم کی توانائی پائی جاتی ہے۔ان کو توانائی، توانائی بالقوہ((Potential Energy(P.E) اور توانائی بالحرکت((Kinetic Energy (K.E) کہا جاتا ہے۔ عام طور پر توانائی بالقوہ (Potential Energy)کو U سے ' توانائی بالحرکت کو K سے، اور جملہ توانائی(Total Energy) کو E سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ دوران حرکت کسی اہتزازیہ (Oscillator) کے تین مقامات اعظم ترین مقام (Extreme Position)توازنی مقام (Equilibrium Position) اور ان دونوں مقامات کے درمیان کوئی بھی مقام ہوسکتا ہے جہاں پر اس کی توانائی سے بحث کی جاسکتی ہے۔اعظم ترین مقام پر اہتزازیہ ایک لمحہ کے لیے حالت سکون میں آجاتا ہے۔اس لیے اس مقام پر توانائی بالحرکت نہیں ہوتی۔ چونکہ اہتزازیہ (Oscillator) اپنے توازنی مقام سے اعظم ترین نقل مکان (Maximum Displacement) کی سمت حرکت کرنے لگتا ہے جب وہ توانائی بالقوہ ہوتی ہے۔ اسی P.E کی وجہ سے وہ توازنی مقام کی سمت حرکت کرنے لگتا ہے۔ جب وہ توازنی مقام پر پہنچ جاتا ہے تب دوران حرکت رفتار حاصل کرلیتا ہے اس لیے اس پر صرف K.E پائی جاتی ہے جب کہ P.E صفر ہوتی ہے۔ P.E صفر اس لیے ہوتی ہے کہ وہ اپنی اصلی حالت پر لوٹ چکا ہوتا ہے۔ اسیK.E کی وجہ سے وہ توازنی مقام کی دوسری جانب اپنی حرکت کو جاری رکھتا ہے۔ ان دونوں مقامات کے علاوہ جب وہ ان کے درمیان کسی مقام پر سے گزرتا ہے تو وہاں دونوں ہی توانائیاں P.E اور K.E پائی جاتی ہیں۔ کیوں

کہ وہ اپنے مقام سے ہٹاہوا ہے اس لیے اس میں P.E ہوتی ہے۔وہ حالت حرکت میں رہتا ہے اس لیے اس میں K.E بھی ہوتی ہے۔ ان دونوں توانائیوں کی وجہ سے وہ توازنی مقام کی طرف حرکت کرتا ہے۔

اہتزازیہ (Oscillator) پر اگر کوئی بیرونی قوت جیسے ہوا سے رگڑ عمل نہ کر رہی ہو تو ہر مقام پر اہتزازیہ پر موجود رہنے والی K.Eاور P.E کی مقدار یعنی P.E+K.E مستقل ہوتی ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ سادہ موسیقی اہتزازیہ (Simple HarmonicOscillator میں پائی جانے والی توانائی بقائے توانائی کے کلیہ(Law of Conservation of Energy) کی پابندی کرتی ہے۔اس کلیہ کی روشنی میں اہتزازیہ کی جملہ توانائی کو ایک مساوات کی شکل یوں پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$E = P.E + K.E$$

یعنی

$$E = U + K$$

جیسا کہ آپ جان چکے ہیں کہ ایک(SHO) سادہ موسیقی اہتزازیہP.E اور K.E دونوں قسم کی توانائیاں رکھتا ہے۔ K.E اس کی حرکت کی وجہ سے رکھتا ہے اور P.E اس کی توازنی مقام سے نقل مکان (Displacement) کی بنا پر رکھتا ہے۔ اہتزازات (Oscillations) کے دوران دونوں قسم کی توانائیوں کی مقدار میں تبدیلی واقع ہوتی رہتی ہے۔ایک قسم کی توانائی گھٹتی جاتی ہے تو دوسری قسم کی توانائی میں اضافہ ہوتا جاتا ہے۔توانائیوں کا گھٹنا اور بڑھنا اس طرح عمل میں آتا ہے کہ دونوں توانائیوں کا مجموعہ مستقل رہے۔کیوں کہ اہتزازیہ کی جملہ توانائی بقائے توانائی (Conservation of Energy)کی پابندی کرتی ہے۔بشرطیہ کہ اس پر رگڑ جیسی غیر بقائے توانائی (Non-Conservative Force) عمل نہ کر رہی ہو۔

11.2.1 توانائی بالحرکت(Kinetic Energy)

کسی سادہ موسیقی اہتزازیہ (Simple Harmonic Oscillator) کے نقل مکان(Displacement) کے لیے ایک عام مساوات یہ دی جاتی ہے۔

$$x = asin(\omega t + \delta) \qquad (11.1)$$

جہاں'x'اہتزازیہ (Oscillator) کا نقل مکان (Displacement) ایک وقت t میں ہے۔

تب اہتزازیہ (Oscillator) کی رفتار v ہوگی

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega Cos(\omega t + \delta) \qquad (11.2)$$

$$K.E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad (11.3)$$

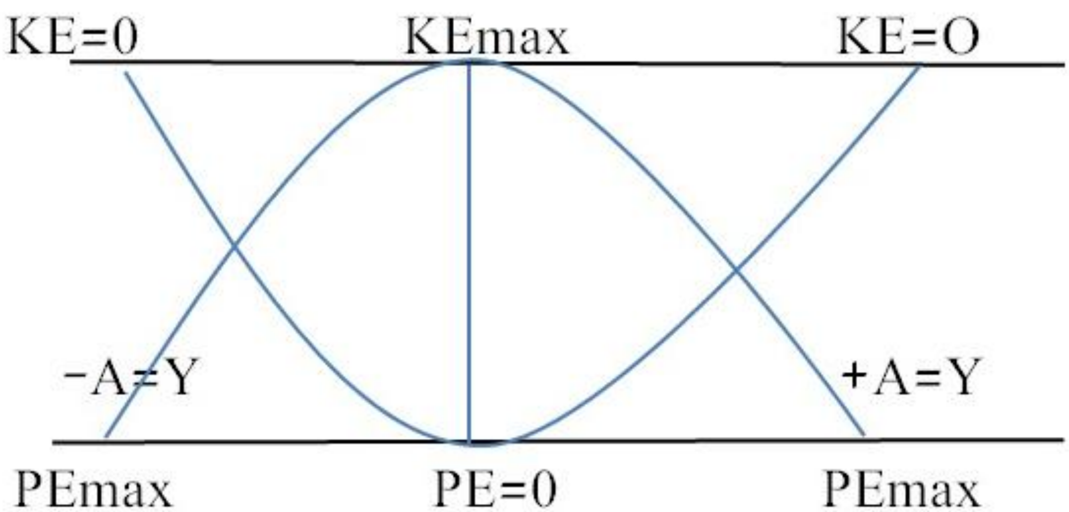
جہاں 'm' اہتزازیہ (Oscillator) کی کمیت ہے۔
نقل مکان کی مساوات کو تفریق کر کے K.E کی مساوات میں درج کرنے پر

$$K = \frac{1}{2} m[a\omega Cos(\omega t + \delta)] \qquad (11.4)$$

$$K = \frac{1}{2} ma^2\omega^2[Cos^2(\omega t + \delta)] \qquad (11.5)$$

مساوات (11.5)سادہ موسیقی اہتزازیہ کی توانائی بالحرکت کی مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

کسی اہتزازیہ (Oscillator) کی توانائی بالحرکت 'K' کی بدلتی ہوئی مقداروں کو نقل مکان کی بدلتی ہوئی مقدار کے ساتھ جب ایک گراف کھینچا جاتا ہے تو اس کی صورت شکل(11.1) میں ظاہر کردہ گراف جیسی ہوتی ہے۔اس ترسیم سے ہم K.Eکی تبدیلی پر غور کرسکتے ہے۔



شکل(11.1)

11.2.2 توانائی بالقوہ(Potential Energy)

یہ تو آپ جان چکے ہیں کہ سادہ موسیقی حرکت میں قوت (Force)'F' مخالف سمت میں نقل مکان (Displacement) راست متناسب ہوتی ہے کے یعنی

$$F \propto -x$$

$$F = -Kx \tag{11.6}$$

جہاںKایک مستقل ہے جو قوت فی اکائی نقل مکان کے ہوتی ہے۔

جہاں تک F کا تعلق ہے اس کو توانائی بالقوہ'U' کی اکائیوں میں یوں ظاہر کیا جاتا ہے

$$\frac{dU}{dx} = -Kx \tag{11.7}$$

یعنی

$$dU = -kxdx$$

مساوات کو تکمیلہ کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + c \tag{11.8}$$

جہاں 'C' تکمیلہ کا مستقل ہے جب 'x' نقل مکان (Displaement) کی قیمت صفر ہوتی ہے تو توانائی بالقوہ (Potential Energy) 'U' بھی صفر ہو گی۔

مساوات میں ان دونوں 'x' اور 'U' کی قیمتیں صفر درج کرنے پر 'C' کی قیمت بھی صفر حاصل ہوتی ہے۔

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

'x'کی قیمت درج کرنے پر

$$U = \frac{1}{2}k[aSin(\omega t + \delta)]^2 \tag{11.9}$$

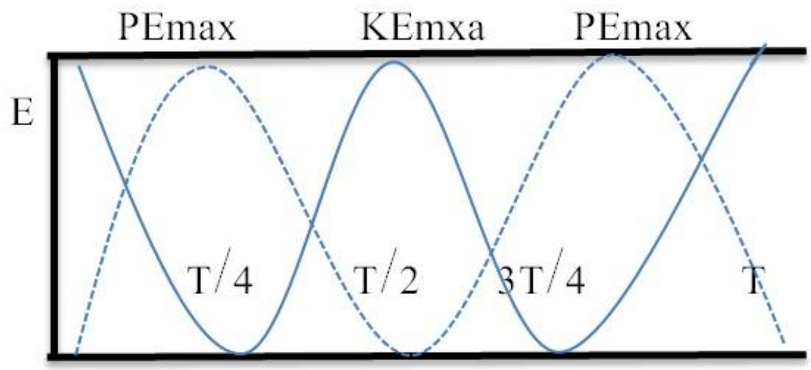
$$U = \frac{1}{2}ka^2Sin^2(\omega t + \delta) \tag{11.10}$$

مساوات میں K کی قیمت $m\omega^2$ درج کرنے پر(کیوں کہ $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ہوتا ہے)

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2a^2Sin^2(\omega t + \delta) \tag{11.11}$$

مساوات (11.11)سادہ موسیقی اہتزازیہ کی توانائی بالقوہ کی مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

کسی اہتزازیہ (Oscillator) کی توانائی بالقوہ 'U' کی بدلتی ہوئی مقداروں کو نقل مکان کی بدلتی ہوئی مقدار کے ساتھ جب ایک گراف کھینچا جاتا ہے تو اس کی صورت شکل (11.2) میں ظاہر کردہ گراف جیسی ہوتی ہے۔ اس ترسیم سے ہم P.E کی تبدیلی کو غور کرسکتے ہیں۔



شکل (11.2)

11.2.3 جملہ توانائی (Total Energy)

$$E = K + U \qquad (11.12)$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 Sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 Cos^2(\omega t + \delta) \qquad (11.13)$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \qquad (11.14)$$

اگر اہتزازیہ (Oscillator) کی فریکوئینسی n ہو تو $\omega = 2\pi n$ ہوگا۔

$$E = \frac{1}{2}m(2\pi n)^2 a^2 \qquad (11.15)$$

$$E = 2\pi^2 n^2 a^2 m \qquad (11.16)$$

کسی اہتزازیہ (Oscillator) کے لیے جملہ توانائی کی مساوات کے بغیر مطالعہ کیا جائے تو پتہ چلے گا کہ جملہ توانائی (Total Energy) 'E' کی قیمت تین اجزا پر منحصر ہوتی ہے۔ اس کو مندرجہ ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

.i جملہ توانائی E راست متناسب ہوتی ہے فریکوئینسی n کے مربع کے یعنی $E \propto n^2$ جب a اور m مستقل ہوں۔

.ii جملہ توانائی E راست متناسب ہوتی ہے حیطہ a کے مربع کے یعنی $E \propto a^2$ جب n اور m مستقل ہوں۔

.iii جملہ توانائی E راست متناسب ہوتی ہے کمیت m کے یعنی $E \propto m$ جب n اور a مستقل ہوں۔

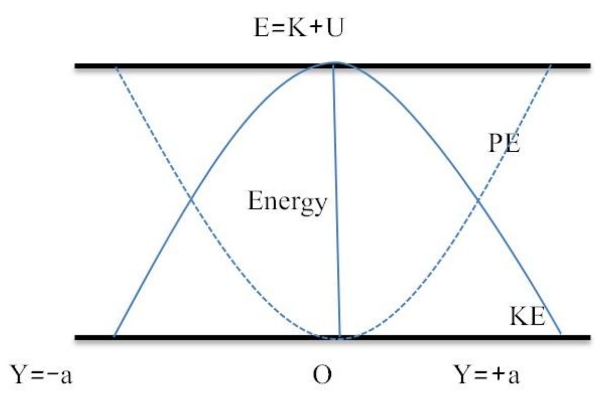
.iv جملہ توانائی E معکوس متناسب ہوتی ہے وقت دوراں T کے مربع کے یعنی $E \propto \frac{1}{T^2}$ جب a اور m مستقل ہوں۔

(چونکہ فریکوئینسی n اور وقت دوراں T میں $n = \frac{1}{T}$ کا رشتہ پایا جاتا ہے)

$$E = 2\pi^2 \frac{a^2 m}{T^2} \qquad (11.17)$$

11.2.4 توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کی ترسیم (Graph of Kinetic Energy and Potential Energy)

کسی اہتزازیہ (Oscillator) کی توانائی بالحرکت 'K' اور توانائی بالقوہ 'U' کی بدلتی ہوئی مقداروں کو نقل مکان کی بدلتی ہوئی مقدار کے ساتھ جب ایک گراف کھینچا جاتا ہے تو اس کی صورت شکل (11.3) میں ظاہر کردہ گراف جیسی ہوتی ہے۔ اس کے مطالعے سے یہ بات جانی جاسکتی ہے کہ جوں جوں توانائی بالقوہ گھٹتی جاتی ہے تو توانائی بالحرکت بڑھتی جاتی ہے۔ اعظم ترین نقل مکان پر K کی قیمت صفر ہوتی ہے اور توازنی مقام پر اس کی قیمت اعظم Kmax ہوتی ہے۔ اسی طرح اعظم ترین مقام پر U کی قیمت اعظم ترین Umax ہوتی ہے اور توازنی مقام پر اس کی قیمت صفر ہوتی ہے۔ دوران حرکت یہ دیکھا جاتا ہے کہ کسی اہتزازیہ (Oscillator) کی اعظم ترین توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت مساوی ہوتی ہے۔ یعنی Umax = Kmax کے شکل (11.3) کو غور سے دیکھا جائے تو پتہ چلے گا کہ گراف میں توانائی بالقوہ کو خط (Line) کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے اور توانائی بالحرکت K کو شکستہ خط (Broken Line) کے ذریعہ۔ نقاط Q اور R اعظم ترین نقل مکان کے مقامات ہیں۔ جن پر توانائی بالقوہ کی مقدار اعظم ترین ہے اور توانائی بالحرکت صفر ہے۔ اسی طرح نقطہ 0 جو توازنی مقام ہے اس پر توانائی بالقوہ صفر ہے اور توانائی بالحرکت کی مقدار اعظم ترین ہے جب کہ دونوں ہی قسم کی اعظم ترین توانائیوں کی مقدار مساوی ہے۔



شکل (11.3)

11.3 حل شدہ مثالیں(Solved Examples)

حل شدہ مثال1

ایک ثانیہ رقاص0.4m حیطہ ارتعاش سے اہتزاز کر رہا ہے۔ اگر اس پر لٹکائی گئی کمیت 0.2kg ہے تب معلوم کرو(i) اس کے تعدیلی نقطے پر حرکی توانائی(ii)اس کے انتہائی نقاط پر توانائی بالقوہ(iii)توانائی بالقوہ جب کہ نقل مقان 0.2m ہو(iv)توانائی بالحرکت جب کہ اس کا نقال مقام0.2 ہو۔

حل:

حل میں دی گئی قیمتیں

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad/sec$$
$$A = 0.4m$$
$$m = 0.2\ kg$$

(i)اس کے تعدیلی نقطے پر حرکی توانائی

$$K.E_{max} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$
$$K.E_{max} = \frac{1}{2} \times 0.2 \times \pi^2 \times 0.4^2$$
$$K.E. = 0.1578J$$

(ii)اس کے انتہائی نقاط پر توانائی بالقوہ

$$P.E_{max} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$
$$P.E_{max} = \frac{1}{2} \times 0.2 \times \pi^2 \times 0.4^2$$
$$P.E. = 0.1578J$$

(iii)توانائی بالقوہ جب کہ نقل مقام0.2m ہو

$$P.E = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2$$
$$P.E = \frac{1}{2} \times 0.2 \times \pi^2 \times 0.2^2$$

$$P.E. = 0.03944J$$

(iv)توانائی بالحرکت جب کہ اس کا نقل مقام 0.2m ہو

$$K.E = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - Y^2)$$
$$K.E = \frac{1}{2} \times 0.2 \times \pi^2(0.4^2 - 0.2^2)$$
$$K.E. = 0.11832J$$

حل شدہ مثال 2

ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے جس کا حیطہ ارتعاش 0.2m ہے تب اس کے تعدیلی مقام سے کتنے فاصلے پر توانائی بالقوہ اس کی توانائی بالحرکت کے مساوی ہو گی۔

حل:

$$P.E_Y = \frac{1}{2}m^2\omega^2y^2$$

$$K.E_Y = \frac{1}{2}m^2\omega^2(A^2 - y^2)$$

$$P.E_y = K.E_y$$

$$\frac{1}{2}m^2\omega^2y^2 = \frac{1}{2}m^2\omega^2(A^2 - y^2)$$

$$y^2 = A^2 - y^2$$

$$2y^2 = A^2 \Rightarrow y^2 = \frac{A^2}{2}$$

$$A = 0.2\ m$$
$$y = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}\ \ ; r = 0$$

$$y = \pm\frac{0.2}{\sqrt{2}} = \pm 0.1 \times \sqrt{2}$$

$$y = \pm 0.1414\ m$$

اس فاصلے پر توانائی بالقوہ ،توانائی بالحرکت کے مساوی ہو گی۔

حل شدہ مثال3

ایک سادہ موسیقی حرکت میں اگر نقل مکان حیطہ کا نصف ہو تو ثابت کرو کہ اس کی توانائی بالقوہ $\frac{1}{4}E$ اور توانائی بالحرکت $\frac{3}{4}E$ جہاں E اس کی مجموعی توانائی ہے۔اگر اس کی توانائی کی نصف توانائی بالقوہ اور نصف توانائی بالحرکت ہو تو نقل مکان کتنا ہو گا۔

حل: سادہ موسیقی حرکت کی عام مساوات

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$V = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{A}{2} = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$\cos(\omega t + \delta) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\omega t + \delta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \omega A\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P.E = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}K\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{KA^2}{8}$$

$$P.E = \frac{1}{4}\left(\frac{KA^2}{2}\right) = \frac{1}{4}E \qquad (\because E = \frac{KA^2}{2})$$

$$K.E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \times \frac{3}{4}$$

$$K.E = \frac{3}{8}KA^2 \qquad (\because \omega^2 = \frac{K}{m})$$

$$K.E = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}K^2 A\right)$$

$$\mu = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$\frac{E}{2} = \frac{1}{2}\frac{KA^2}{2}$$

$$X = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

حل شدہ مثال4

ایک سادہ رقاص کی کمیت 10 گرام ہے۔ خطی سادہ موسیقی حرکت میں ہے جس کا حیطہ ارتعاش 5cm اور وقت دوران 2sec ہے۔ تعدیلی نقطے سے گزرنے کے 1/6 سیکنڈ بعد اس کی توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت معلوم کرو۔

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$m = 10\ gr = 10 \times 10^{-3} = 1 \times 10^{-2} kg$$

$$T = 2\sec\ ; \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ \ rad/sec$$

$$A = 5cm = 5 \times 10^{-2} m$$

تعدیلی نقطے سے گزرنے کے 1/6 سیکنڈ بعد اس کی توانائی بالحرکت

$$t = \frac{1}{6} sec$$

$$K.E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2Cos^2\omega t$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 10^{-2} \times (5 \times 10^{-2})^2\pi^2Cos^2\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{25 \times 10^{-6}}{2} \times \pi^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$K.E = \frac{75}{8} \times \pi^2 \times 10^{-6}J$$

تعدیلی نقطے سے گزرنے کے 1/6 سیکنڈ بعد اس کی توانائی بالقوہ

$$P.E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2Sin^2\omega t$$

$$P.E = \frac{1}{2} \times 1 \times 10^{-2} \times (5 \times 10^{-2})^2\pi^2Sin^2\frac{\pi}{6}$$

$$P.E = \frac{25 \times 10^{-6}}{2} \times \pi^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P.E = \frac{25}{8} \times \pi^2 \times 10^{-6}J = 3.085 \times 10^{-5}J$$

11.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

ہر وہ مادی حرکت جو ایک معینہ وقفے کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے دوری حرکت(Periodic Motion) یا موسیقی حرکت (Harmonic Motion) کہلاتی ہے۔ سورج کے گرد سیاروں کی گردش زمین کے گرد چاند کی گردش' گھڑی میں سیکنڈ کے کانٹے کی حرکت' دیواری گھڑی (Wall Clock) میں رقاص(Pendulum) کی حرکت اور بجتی ہوئی گھنٹی میں جواہرات و سالمات کے ارتعاشات (Vibrations)موسیقی حرکت کی چند مثالیں ہیں۔ اگر موسیقی حرکت کرنے والا جسم یا ذرّہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا

اوپر نیچے حرکت کر رہا ہو تو اس کی یہ حرکت اہتزازی حرکت(Oscillatory Motion) کہلاتی ہے۔روز مرہ زندگی میں ہمارا سابقہ بے شمار اہتزازی حرکت سے پڑتا ہے۔ سادہ رقاص(Simple Pendulum) کے کرے(Bob) کی حرکت ہو یا انتصابی(Vertical) سمت میں لٹکائے گئے ایک اسپرنگ کے آزاد سرے پر بندھے ایک جسم قدر کھینچ کر چھوڑ دینے پر اس میں پیدا ہونے والی حرکت:

- سادہ موسیقی حرکت میں توانائی بالحرکت ' (K) توانائی بالقوہ (U) تواضنی مقام پر اعظم ترین ہوتی ہے۔
- سادہ موسیقی حرکت میں اعظم ترین مقام (Extreme Position) پر P.E اعظم ترین ہوتی ہے اور K.E صفر ہوتی ہے۔
- سادہ موسیقی حرکت میں اعظم ترین .P.E اور اعظم ترین K.E مساوی ہوتی ہے۔
- سادہ موسیقی حرکت میں جملہ توانائی E مستقل ہوتی ہے۔
- سادہ موسیقی حرکت میں توانائی بالحرکت ' (K) توانائی بالقوہ (U) اور جملہ توانائی (E) کی قیمتیں ہوں گی۔

$$U = \frac{1}{2} ma^2\omega^2 Sin^2(\omega t + \delta)، \quad K = \frac{1}{2} ma^2\omega^2[Cos^2(\omega t + \delta)]$$ اور

$$E = \frac{1}{2} ma^2\omega^2$$

- جملہ توانائی فریکوئینسی 'n' کی اکائی میں $E = 2\pi^2 n^2 a^2 m$ اور 'T' Time Period کی اکائی ہو گی۔

$$E = 2\pi^2 \frac{a^2 m}{T^2}$$

11.5 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **موسیقی حرکت (Harmonic Motion)(ہار+مو+نک+مو+شن):** کسی جسم کی وہ حرکت جو ایک معینہ وقفہ کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے ۔موسیقی حرکت کو دوری حرکت بھی کہتے ہیں۔
- **اہتزازی حرکت(Oscillatory Motion)(آ+سی+لے+ٹری+مو+شن):** ایک موسیقی حرکت کرنے والا جسم یا ذرّہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا اوپر نیچے حرکت کرتا ہے تو اس حرکت کو اہتزازی حرکت کہتے ہیں۔
- **بحالی قوت(Restoring Force) (رس+ٹو+رنگ+فورس):** جب کوئی اہتزازیہ(Oscillator) اپنے توازنی مقام سے نقل مکان کرتا ہے تو اس پر عمل کرنے والی وہ قوت جو اہتزازیہ کو توازنی مقام تک لانے کے لیے درکار ہوتی ہے بحالی قوت کہلاتی ہے۔
- **توانائی بالحرکت KineticEnergy(کئی+نے+ٹک+اے+نر+جی):** کسی اہتزازیہ(Oscillator) پر دوران حرکت پائی جانے والی توانائی توانائی بالحرکت کہلاتی ہے۔عام طور پر دیکھا جائے تو ہر وہ جسم یا ذرّہ جو حالت حرکت میں ہو تو اس پر توانائی

بالحرکت پائی جاتی ہے۔

- **توانائی بالقوہ (Potential Energy)(پو+ٹن+شی+یل+اے+نر+جی):** جب اہتزازیہ (Oscillator) اعظم ترین مقام پر رہتا ہے تو اس پر توانائی بالقوہ پائی جاتی ہے۔

11.6 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

11.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. ایک اہتزازیہ (Oscillator) کی توانائی بالقوہ کس مقام پر صفر ہوتی ہے؟

a)توازنی مقام

b)اعظم ترین مقام

c) دونوں مقامات کے درمیان

d) کہیں بھی نہیں۔

2. ایک اہتزازیہ (Oscillator) کی توانائی بالحرکت کس مقام پر صفر ہوتی ہے؟

a) توازنی مقام

b)اعظم ترین مقام

c) دونوں مقامات کے درمیان

d)کہیں بھی نہیں۔

3. ایک اہتزازیہ (Oscillator) کے اہتزاز میں کس مقام پر توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت دونوں پائے جاتے ہیں؟

a)توازنی مقام

b) اعظم ترین مقام

c) دونوں مقامات کے درمیان

d)کہیں بھی نہیں۔

4. توانائی بالقوہ کا تعلق کس سے ہوتا ہے؟

a) نقل مکان

b)رفتار

c) اسراع

d)ان میں سے کوئی بھی نہیں

5. توانائی بالحرکت کا تعلق کس سے ہوتا ہے؟

a) نقل مکان

b) رفتار

c) اسراع

d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

6. سادہ موسیقی حرکت جب حالت حرکت میں ہوتا ہے تو اس میں کون سی توانائی پائی جاتی ہے؟

a)توانائی بالقوہ

b)تونائی بالحرکت

c)جملہ توانائی

d)ان میں سے کوئی نہیں

7. سادہ موسیقی اہتزازیہ (SHO)کی توانائی بالحرکت کس کی مقدار پر منحصر.ہوتی ہے؟

a) کمیت پر

b) حیطہ (Amplitude) پر

c)فریکوئینسی پر

d) ان سب پر

8. سادہ موسیقی اہتزازایہ (SHO)کی توانائی بالقوہ کس کی مقدار پر منحصر.ہوتی ہے؟

a)کمیت پر

b) حیطہ (Amplitude) پر

c) فریکوئینسی پر

d) ان سب پر

9. سادہ موسیقی اہتزازیہ (SHO)کی جملہ توانائی کی مقدار ....پر منحصر ہوتی ہے۔

10. سادہ موسیقی اہتزازیہ(SHO) کی توانائی بالقوہ کی مقدار..................پر منحصر ہوتی ہے۔

a) $\sin^2(\omega t + \delta)$

b) $\text{Cos}^2(\omega t + \delta)$

c)   aاور b

d)   کوئی بھی نہیں

11. سادہ موسیقی اہتزازیہ (SHO) کی توانائی بالحرکت کی مقدار.................پر منحصر ہوتی ہے۔

12. سادہ موسیقی اہتزازیہ (SHO) کی جملہ توانائی کی مقدار کس پر منحصر ہوتی ہے؟

11.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. سادہ موسیقی حرکت کی دوران حرکت توانائیوں کی تبدیلی پر ایک نوٹ لکھیے۔

2. سادہ موسیقی حرکت میں نقل مکان(Displacement) اور توانائی بالقوہ P.E وتوانائی بالحرکت کے ترسیم (Graph) کو تفصیلی وضاحتوں کے ساتھ کھینچیے۔

3. درج ذیل میں دیے گئے سوالات کو بیان کیجیے۔

a. کمیت اور حیطہ مستقل ہوں تو سادہ موسیقی اہتزازیہ کی جملہ توانائی کتنے گنا بڑھے گی جب فریکوئینسی دوگنی ہو جائے۔

b. فریکوئینسی اور کمیت مستقل ہوں تو سادہ موسیقی اہتزازیہ کی جملہ توانائی کتنے گنا بڑھے گی جب ایمپلی ٹیوڈ تین گنا ہو جائے۔

c. ایمپلی ٹیوڈ اور کمیت مستقل ہوں تو سادہ موسیقی اہتزازیہ کی جملہ توانائی کتنے گنا گھٹے گی جب وقت دوراں دوگنا ہو جائے۔

4. درج ذیل میں دیے گئے سوالات کو بیان کیجیے۔

a. سادہ موسیقی حرکت SHM میں کون کون سی توانائیاں مستقل بدلتی رہتی ہیں؟

b. سادہ موسیقی حرکت SHM کون سی توانائی مستقل رہتی ہے اور کیوں؟

c. سادہ موسیقی حرکت SHM میں جملہ توانائی کی مساوات لکھیے۔

d. سادہ موسیقی حرکت SHM میں جملہ توانائی اور فریکوئینسی میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے؟

5. درج ذیل میں دیے گئے سوالات کو بیان کیجیے۔

a. سادہ موسیقی حرکت SHM میں جملہ توانائی اور حیطہ میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے جب کہ دوسری مقداریں مستقل رہتی ہیں۔

b. سادہ موسیقی حرکت SHM میں جملہ توانائی اور کمیت میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے جب کہ دوسری مقداریں مستقل رہتی ہیں۔

c. سادہ موسیقی حرکت SHM میی جملہ توانائی اوروقت دوراں میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے جب کہ دوسری مقداریں مستقل رہتی ہیں۔

d. سادہ موسیقی حرکت SHM میں جملہ توانائی کن کن مقداروں پر منحصر ہوتی ہے - جب کہ دوسری مقداریں مستقل رہتی ہیں۔

11.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. سادہ موسیقی حرکتSHM کی صورت میں'توانائی بالقوہ(Potential Energy) ' اور توانائی بالحرکت (Kinetic Energy)میں قوت کے لحاظ سے کس طرح تبدیلی واقع ہوتی ہے بیان کیجیے۔ان دونوں توانائیوں کی تبدیلیوں کو ایک گراف کے ذریعے واضح کیجیے۔

2. سادہ موسیقی حرکت(Simple Harmonic Motion) کے لیے توانائی بالقوہ, توانائی بالحرکت اور جملہ توانائی کی مقداروں کے لیے ضابطوں کو اخذ کیجیے۔

11.6.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات(Solved Answer Type Questions)

1. سادہ موسیقی حرکت کرنے والے جسم پر عمل کرنے والی قوت2N جب کہ اس کا نقل مقام2cm ہو اگر حیطہ ارتعاش5cm ہے تب سادہ موسیقی حرکت کی جملہ توانائی کیا ہوگی۔

2. ایک چھوٹا جسم کمیت10gr سے خط مستقیم میں سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے۔جس کا وقت دوران $\pi/4$ اور اعظم ترین نقل مقام 10cm ہے۔تب اہتزاز کی جملہ توانائی معلوم کرو۔

3. کون سے فاصلے پر سادہ موسیقی حرکت کرنے والا ذرہ جس کا حیطہ ارتعاش10cm ہو حرکی توانائی اس کی توانائی بالقوہ کی تین گنا ہوگی۔

4. ایک جسم جس کی کمیت2gr ہے۔10Hz تعدد سے سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے۔اس کی حرکی توانائی K.E توانائی بالقوہ اور جملہ توانائی جب کہ اس کا نقل مقام1cm ہو۔معلوم کرو اس کا حیطہ ارتعاش4cm ہے۔

5. ایک ذرہ جس کی کمیت0.5kg ہے۔خطہ مستقیم میں سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے۔اس کے راستے کا طول10cm ہے اور وقت دوراں8sec ہے۔اس کی حرکت توانائی،توانائی بالقوہ اور جملہ توانائی معلوم کرو جب کہ ہیت $\pi/6$ ریڈین ہو۔

6. ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت میں ہے۔جس کی تعدد5Hz اور حیطہ ارتعاش2cm ہے۔ابتدأیہ مثبت انتہائی نقاط پر ہے۔اس کے نقل مقام کی مساوات لکھو۔

7. ایک20gr کا ذرہ سادہ موسیقی حرکت کرنے والے جسم کا تعدد3 اہتزاز فی ثانیہ ہے اور حیطہ ارتعاش5cm ہے۔یہ ایک مکمل اہتزاز کے دوراں کتنا فاصلہ طے کرے گا۔اس کی اوسط رفتار کیا ہے؟

11.7 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں(Suggested Books for Further Readings)

1. College Physics by Sears.F.W.& Zemansky.M.W. Wesley Publishing Co.Inc.London
2. Engineering Mechanics ,Basudeb Bahattacharya,2nd edu.2015,Oxford University Press

3. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta Dhanpat Rai Publications
4. Mechanics Berkely Physics Course ,Vol-I,Charless Kittel,Tata McGraw Hill
5. Modern College Physics by White.H.E. East West Press Pvt.Ltd New Delhi
6. Physics by Zafiratos.C, John wesiey &Sons. Inc. New York
7. Physics Part I by Resnik.R &Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi
8. Technical Physics by Bueche.F ,Harper &Row Publication,New York
9. Unified Physics Vol-I,Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath &Co.Meerut
10. University Physics, F W Sears, MW Zemansky and H D Young 13/e, 1986. Addison Wesley
11. University Physcis, Ronald Lane Reese, 2003, Thomson, Brooks/Cole

اکائی 12۔ قصری اہتزازات

(Damped Oscillations)

اکائی کے اجزا

12.0 تمہید

12.1 مقاصد

12.2 قصری اہتزازات

12.2.1 قصری اہتزازات کی تفرقی مساوات

12.3 حل شدہ مثالیں

12.4 اکتسابی نتائج

12.5 کلیدی الفاظ

12.6 نمونہ امتحانی سوالات

12.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

12.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

12.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

12.6.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

12.7 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

12.0 تمہید (Introduction)

ہر وہ مادی حرکت جو ایک معینہ وقفہ کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے دوری حرکت(Periodic Motion) یا موسیقی حرکت (Harmonic Motion) کہلاتی ہے۔ سورج کے گرد سیاروں کی گردش' زمین کے گرد چاند کی گردش' گھڑی میں سیکنڈ کے کانٹے کی حرکت' دیواری گھڑی(Wall Clock) میں رقاص کی حرکت کی چند مثالیں ہیں۔ اگر موسیقی حرکت کرنے والا جسم یا ذرّہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا اوپر نیچے حرکت کررہاہو تو اس کے حرکت کو اہتزازی حرکت(Oscillatory Motion) کہلاتی ہے۔ روزمرہ زندگی میں ہمارا سابقہ بے شمار اہتزازی حرکت سے پڑتا ہے۔ سادہ رقاص(Simple Pendulum) کے کرے(Bob) کی حرکت ہو یا انتصابی(Vertical) سمت میں لٹکائے گئے ایک اسپرنگ کے آزاد سرے پر بندھے ایک جس کو جسی قدر کھینچ کر چھوڑ دینے پر اس میں پیدا ہونے والی حرکت اہتزازی حرکت کی مثالیں ہیں۔ ان اہتزازی حرکت ک میکانی اہتزازات بھی کہتے ہیں۔ کیوں کہ نور کی شعاعیں (Light Radiations)جب ہوا یا کسی واسطے (Medium) میں سفر کرتی ہیں تو اس میں مقناطیسی توانائی (Magnetic Energy)اور برقی توانائی (Electric Energy) کے سمتیے (Vectors)ایک دوسرے سے عمودوار اہتزاز کرتے ہیں جنہیں برقی مقناطیسی اہتزازات (Electro-magnetic Oscillations) کہا جاتا ہے۔

سادہ موسیقی حرکت میں یہ مان لیا جاتا ہے کہ اہتزاز ایک مستقل حیطہ کے ساتھ اہتزازی حرکت کرتا ہے لیکن حقیقت میں دیکھا جائے تو اس کا حیطہ وقت کے ساتھ گھٹتا جاتا ہے جس کے پیچھے رگڑ(Friction) کی وہ قوتی ہوتا ہے جو اہتزاز اور ہوا کے سالمات کے درمیان عمل پذیر ہوتی ہے اور اہتزاز کی رفتار میں کمی واقع ہوتی ہے۔ اس کے نتیجے میں حیطہ گھٹتا جاتا ہے۔ ایسے اہتزاز کو قصری اہتزاز (Damped Oscillation) اور کرنے والے کو قصری اہتزازیہ(Damped Oscillator) کہا جاتا ہے۔

12.1 مقاصد(Objectives)

یہ اکائی قصری موسیقی اہتزازیہ کی حرکت سے متعلق ہے۔ اس اکائی میں ہم:

i. قصری قوت کی وجہ سے سادہ موسیقی اہتزازیہ کی حرکت میں پیدا ہونے والے اثرات پر بحث کی جائے گی۔ یعٰی قصری موسیقی اہتزازیہ کی حرکت پر غور کیا جائے گا۔

ii. قصری اہتزازات کی تفرقی مساوات کو محسوب کیا جائے گا۔

12.2 قصری اہتزازات (Damped Oscillations)

جب سادہ موسیقی حرکت پر بحث کی جاتی ہے تو یہ مانا جاتا ہے کہ اہتزازیہ پر ماحول کی ہوا اثر انداز نہیں ہوتی۔ اس پر نہ کوئی رگڑ کی قوت (Frictional Force) عمل کرتی ہے اور نہ وقت کے ساتھ اس کی تعداد اور حیطہ بدلتے جاتے ہیں۔ ایسی حرکت غیر قصری

حرکت (Undamped Motion) کہلاتی ہے۔ جب سادہ موسیقی حرکت کرنے والے اہتزازیہ پر ہوا کے سالمات رگڑ پیدا کرتے ہیں تو رگڑ کی قوت کی وجہ سے اس کی تعداد اور حیطہ میں وقت کے ساتھ کمی واقع ہوتی ہے۔ ایسے اہتزازات قصری اہتزازات (Damped Oscillations) کہلاتے ہیں۔ یہ حرکت 'قصری اہتزازی حرکت (Damped Oscillatory Motion) کہلاتی ہے۔ ہوا کے ذریعے عمل میں آنے والی رگڑ کی قوت اہتزازیہ کی رفتار کے ساتھ راست متناسب ہوتی ہے اور وہ رفتار کی سمت کے مخالف عمل کرتی ہے۔ رگڑ کی یہ قوت قصری قوت (Damped Force) کہلاتی ہے۔ اس طرح ایک قصری اہتزازپر عمل کرنے والی قوت دراصل قصری قوت (Damped Force) اور بحالی قوت(Restoring Force) کی حاصل قوت(Resultant Force) ہوتی ہے۔

12.2.1 قصری اہتزازات کی تفرقی مساوات (Differential Equation of Damped Oscillation)

جیسا کہ آپ جان ہی چکے ہیں کہ قصری اہتزازا میں ایک قصری قوت (Damped Force) ہوتی ہے اور اس پر عمل کرنے والی قوت قصری قوت اور بحالی قوت کی حاصل قوت (Resultant Force) ہوتی ہے۔ اگر قصری اہتزازا اہتزازیہ کی رفتار V ہو تو قصری قوت (-bV) ہوگی۔ ہاں b ایک مستقل ہے۔ قصری اہتزاز کی حاصل قوت (Resultant Force) کے لیے ذیل کی مساوات پیش کی جاسکتی ہے:

$$F = -Kx - BV \qquad (12.1)$$

$$F = -Kx - b\frac{dx}{dt} \qquad (12.2)$$

نیوٹن کے حرکت کے دوسرے کلیے کی رو سے حاصل قوت مساوی ہوگی۔ کمیت (Mass)اور اسراع (Acceleration) کے حاصل ضرب ہے۔

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (12.3)$$

مساوات(12.2)اور(12.3)کو ملانے پر حاصل ہو گا۔

$$-Kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (12.4)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx + b\frac{dx}{dt} = 0 \qquad (12.5)$$

یہ مساوات قصری اہتزازا کے لیے دوسرے درجے کی تفرقی مساوات (Second Degree Differential Equation) کہلاتی ہے۔

اگر b کی قیمت بہت چھوٹی ہو تو اس دوسرے درجے کی تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔

$$x = a_0\, exp\left(-\frac{bt}{2m}\right) Cos(\omega' t + \partial) \qquad (12.6)$$

جہاں

$$\omega' = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

اگر b=0 ہو تو ایک اہتزازیہ پر کوئی قصری قوت عمل پذیر نہ ہو گی۔ تب $\omega = \omega' = \sqrt{\frac{k}{m}}$ اور $a_0 = a$ ہو گا۔

یعنی ω اور a ایک غیر قصری حرکت کی تعداد اور حیطہ ہوں گے۔

$$x = aCos(\omega t + \delta)$$

جو غیر قصری اہتزازیہ (Undamped Oscillator) کی مساوات ہے۔

اوپر تو آپ جان ہی چکے ہیں کہ قصری اہتزازیہ میں اہتزازات کی فریکوئنسی اور ایمپلی ٹیوڈ میں کمی واقع ہوتی ہے۔ اس کی تفصیلات پر یوں بحث کی جاسکتی ہے۔

i. فریکوئنسی $\left(\frac{-bt}{2m}\right)$ کی کمی ہو جاتی ہے۔ اس لیے $\omega < \omega'$

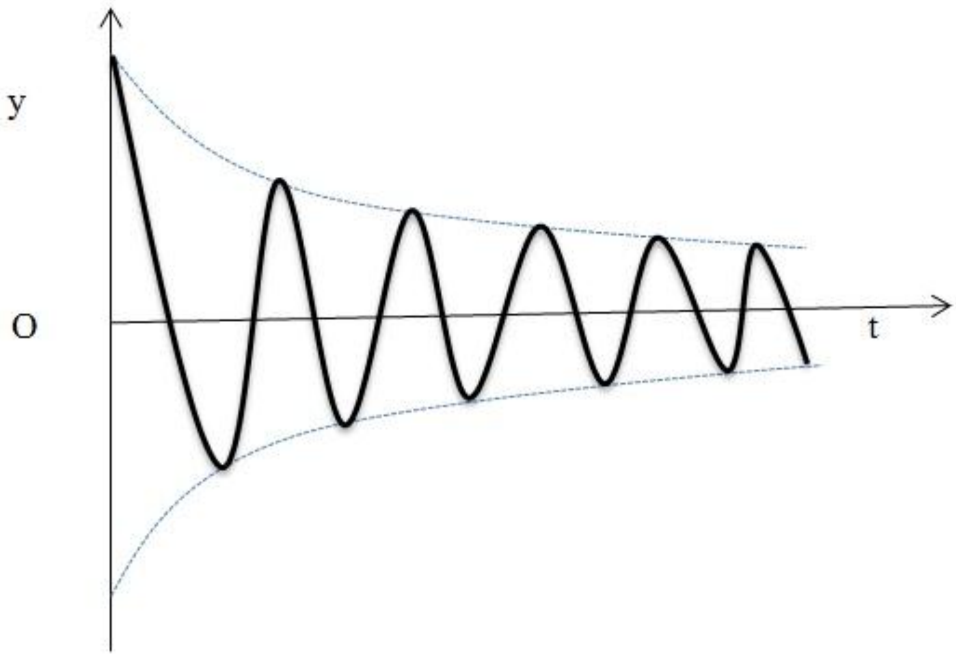
ii. ایمپلی ٹیوڈ (Amplitude) میں وقت کے ساتھ کمی ہوتی جاتی ہے۔ اس لیے $a_0 < a$

iii. وہ وقت τ جس میں ایمپلی ٹیوڈ گھٹ کر اپنے ابتدائی ایمپلی ٹیوڈ کا $\frac{1}{e}$ ہو جاتا ہے وہ اہتزازیہ کا اوسط عرصہ حیات (Mean Life Time) کہلاتا ہے۔

iv. اگر رگڑ کی قوت اتنی زیادہ ہو کہ $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$ تب ω ایک خیالی مقدار بن جاتی ہے۔ ایسی صورت میں اہتزازیہ کی یہ حرکت اہتزازی حرکت کی شکل میں بنائی نہیں رہتی اور وہ بہت زیادہ قصری حرکت (OverDamped Motion) ہو جاتی ہے۔

v. اگر $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$ ہو تب حرکت اپنی اہتزازی نوعیت کھو دیتی ہے۔ یہ حرکت فاصل قصری حرکت (Critically Damped Motion) کہلاتی ہے۔ قصری حرکت کے دوران رگڑ کی قوت کی وجہ سے اس کی توانائی میں کمی ہوتی جاتی ہے۔ اس بات کو قصری حرکت کے ایک گراف سے واضح کیا جاتا ہے۔

vi. قصری حرکت کے دوران رگڑ کی قوت کی وجہ سے توانائی کا مسلسل نقصان ہوتا رہتا ہے۔ شکل (12.1) میں صاف نظر آرہا ہے کہ وقت کے ساتھ حیطہ کم ہوتا جاتا ہے اور آخر میں یہ حرکت رک جاتی ہے۔



(شکل 12.1)

12.3 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

ایک اسپرنگ کا قوتی مستقل 2.5N/m ہے۔ اس کے نچلے سرے سے 0.025kg کمیت کا ایک جسم لٹکایا گیا ہے۔ اس کی قصری قوتی مستقل (Damping Force Constant) کے لیے وہ کس قسم کی حرکتیں کرے گا۔

$$0.2\ \frac{N\ sec}{m} \quad (3) \quad 0.5\ N\frac{sec}{m} \quad (2) \quad 1\ N\frac{sec}{m} \quad (1)$$

حل:

$$\text{مستقل قوت} = 2.5\frac{N}{m}$$

$$\text{کمیت} = 0.025\ kg$$

$$1\ N\frac{sec}{m} \quad (1)$$

$$b = 1\ N\frac{sec}{m}$$

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = 400\ sec^{-2} \quad ; \frac{K}{m} = 100sec^{-2}$$

$$\therefore \frac{b}{2m} > \frac{k}{m}$$

$$0.5\ N\frac{sec}{m} \qquad (2)$$

$$0.5\ N\frac{sec}{m}$$

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = 100sec^{-2} \quad ; \frac{k}{m} = 100sec^{-2}$$

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$$

$$0.2\ \frac{N\,sec}{m} \quad (3)$$

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = 16sec^{-2} \quad ; \frac{k}{m} = 100sec^{-2}$$

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)sec^{-2} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2 sec^{-2}}$$

$$\omega = \sqrt{100 - 16} = 9.17sec^{-1}$$

12.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

ہر وہ مادی حرکت جو ایک معینہ وقفے کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے دوری حرکت(Periodic Motion) یا موسیقی حرکت (Harmonic Motion) کہلاتی ہے۔اگر موسیقی حرکت کرنے والا جسم یا ذرّہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا اوپر نیچے حرکت کر رہا ہو تو اس کی حرکت اہتزازی حرکت(Oscillatory Motion) کہلاتی ہے۔روزمرہ زندگی میں ہمارا سابقہ بے شمار اہتزازی حرکت سے بڑتا ہے۔ سادہ رقاص(Simple Pendulum) کے کرے(Bob) کی حرکت ایک مثال ہے۔ ان اہتزازی حرکت کو میکانی اہتزازات بھی کہتے ہیں۔کیوں کہ نور کی شعاعیں (Light Radiations) جب ہوا یا کسی واسطے (Medium) میں سفر کرتی ہیں تو اس میں مقناطیسی توانائی (Magnetic Energy) اور برقی توانائی (Electric Energy) کے سمتیے ایک دوسرے سے عمودوار اہتزاز کرتے ہیں جنہیں برقی مقناطیسی اہتزازات کہا جاتا ہے۔

- قصری اہتزازات (Damped Oscillations) ان اہتزازات کو کہتے ہیں جن پر ماحول (ہوا) کی رگڑ کی وجہ سے ان کے حیطہ اور فریکوئینسی میں کمی واقع ہوتی ہے۔ایسی اہتزازی حرکت قصری اہتزازات حرکت کہلاتی ہے۔
- قصری اہتزازات میں پیدا ہونے والی رگڑ کی قوت قصری قوت کہلاتی ہے۔
- قصری اہتزازات کی مساوات $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$ ہے۔ یہ مساوات قصری اہتزازات کے لیے دوسری درجہ کی تفرقی مساوات(Second DegreeDifferential Equation) کہلاتی ہے۔
- قصری حرکت(Damped Motion) میں جب رگڑ کی قوت بہت زیادہ ہو جاتی ہے تو اس کی اہتزازی حرکت باقی نہیں رہتی اور وہ بہت زیادہ قصری حرکت (Over Damped Motion) کہلاتی ہے۔
- قصری اہتزازات جب اہتزازی نوعیت کھو دیتی ہے تو وہ **فاصل قصری حرکت** (Critical Damped Motion) کہلاتی ہے۔
- وقت کا وہ وقفہ جس میں حیطہ گھٹ کر ابتدائی حیطہ کا $\frac{1}{e}$ ہو جاتا ہے۔ تو وہ اوسط عرصہ حیات (Mean Life Time) کہلاتا ہے۔ قصری حرکت ایک طویل وقفے کے بعد حالات سکون میں آجاتی ہے۔

12.5 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **اہتزاز (Oscillation)(آ+سی+لے+شن):** کسی جسم یا ذرّہ کی وہ حرکت ہے جو ایک مخصوص فاصلے کے درمیان اوپر نیچے یا آگے پیچھے عمل میں آتی رہتی ہے۔ دیواری گھڑی(Wall Clock) کے پینڈولم کی دائیں بائیں حرکت یا ساکن پانی کی سطح پر خلل کے پیدا کیے جانے پر پانی کے سالمات کے اوپر نیچے حرکت اس کی اچھی مثالیں ہیں۔
- **بحالی قوت(Restoing Force) (رس+ٹو+رنگ+فورس):** جب کوئی اہتزازیہ اپنے توازنی مقام سے نقل مکان کرتا ہے تو اس پر عمل کرنے والی وہ قوت جو اہتزازیہ کو توازنی مقام تک لانے کے لیے درکار ہوتی ہے بحالی قوت کہلاتی ہے۔
- **قصری اہتزاز (Damped Oscillation) (ڈا+ایم+پڈ+آ+سی+لے+شن):** جب اہتزاز کرنے والے جسم اور ہوا کے درمیان رگڑ کی قوت(Frictional Force) عمل کرتی ہے تو یہ اہتزاز قصری اہتزاز کہلاتی ہے۔قصری اہتزاز کے دوران' اہتزاز کرنے والے جسم کا حیطہ اور فریکوئینسی کم ہوتی جاتی ہے اور آخر کار وہ جسم حالت سکون آجاتا ہے۔

12.6 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

12.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. سادہ موسیقی اہتزازیہ بقائے توانائی کا کلیہ کی پابندی کرتا ہے۔

a) ہاں
b) نہیں
c) کبھی ہاں کبھی نہیں
d) کلیہ سے تعلق نہیں

2. بقائے توانائی کے کلیے کی پابندی نہ کرنے والا اہتزازات کیا کہلاتا ہے؟

a) سادہ موسیقی حرکت
b)قصری اہتزازات
(c) a اورb
d) کوئی بھی نہیں

3. سادہ موسیقی حرکت SHM میں بحالی قوت (Restoring Froce) کب پیدا ہوتی ہے۔

4. SHMمیں بحالی قوت F اور نقل مکانx کے درمیان پائے جانے والے رشتے کو حسابی شکل میں کیسے ظاہر کیا جاتا ہے؟

5. سادہ موسیقی حرکت SHM جب قصری حرکت میں تبدیل ہو جاتی ہے تو کون سی مقداروں میں تبدیلی واقع ہوتی ہے؟

6. قصری حرکت میں عمل کرنے والی قصری قوت کی مقدار کے لیے ضابطہ لکھیے۔

7. قصری حرکت(Damped Motion) میں فریکوئینسی کی مقدار کیا ہوگی؟

8. قصری حرکت میں حیطہ اور وقت میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے؟

9. فاصل قصری حرکت کسے کہتے ہیں؟

10. بہت زیادہ قصری حرکت(Over Damped Motion) کسے کہتے ہیں؟

12.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. قصری موسیقی حرکت (Damped Harmonic Motion) کے لیے حیطہ اور وقت کے لیے ایک ترسیم (Graph) کھینچیے۔

2. قصری اہتزازات(Damped Oscillations) کیا ہوتے ہیں؟

3. قصری اہتزازات اور غیر قصری اہتزازات میں کیا فرق پایا جاتا ہے؟

4. قصری حرکت کی حالت ایک طویل وقفے کے بعد کیا صورت اختیار کر لیتی ہے؟

5. بہت زیادہ قصری حرکت اور فاصل قصری حرکت کو بیان کیجیے۔

6. فاصل قصری حرکت قصری حرکت اور زیادہ قصری حرکت میں فرق واضح کیجیے۔

7. کون سی قوت سادہ موسیقی حرکت SHM کو قصری موسیقی حرکت میں تبدیل کر دیتی ہے؟اس قوت کے اثرات کن مقداروں پر پڑتے ہیں؟ بیان کیجیے۔

12.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ ایک سادہ موسیقی اہتزازیہ SHO کی مجموعی توانائی غیر بقائی قوت (Non-Conservative Force) کی عدم موجودگی میں مستقل رہتی ہے۔ یہ بھی ثابت کیجیے کہ یہ توانائی' حرکت کے حیطہ کے مربع کے ساتھ راست متناسب ہوتی ہے۔
2. ایک قصری موسیقی اہتزازیہ کے لیے اس شرط کو اخذ کیجیے جس پر حاصل حرکت اہتزازیہ غیر قصری اہتزازی ہو جائے۔ تب حیطہ اہتزاز (Amplitude of Oscillation) اور فریکوئینسی پر کیا اثرات مرتب ہوتے ہیں؟
3. قصری موسیقی اہتزازیہ پر ایک تفصیلی نوٹ لکھیے۔ ان اہتزاز کے لیے تفرقی مساوات اخذ کیجیے۔

12.6.4 حل شدہ جوابات کے حاصل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک اسپرنگ کا فوقی مستقل 3.5N/m ہے اس کے نچلے سرے سے 0.05kg کمیت کا ایک جسم لٹکایا گیا ہے۔ اس کی قصری قوت مستقل (Damping Force Constant) کے لیے وہ کس قسم کی حرکتیں کرے گا۔ (i) 2.5N/m (ii) 0.8sec/m (iii) 1.5Nsec/m اگر حرکت اہتزازی ہو تو تعدد اہتزاز معلوم کرو۔

12.7 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

---

1. College Physics by Sears.F.W.& Zemansky.M.W. Wesley Publishing Co.Inc.London
2. Engineering Mechanics, Basudeb Bahattacharya, 2nd edn., 2015, Oxford University Press
3. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta Dhanpat Rai Publications
4. Mechanics Berkeley Physics Course, Vol. 1 : Charles Kittel, et. Al.2007, Tata McGraw Hill
5. Physics by Zafiratos.C, John wesiey &Sons. Inc. New York
6. Physics Matter Energy and Univers by Hruwell G.P.&Legge.G.J.F. East West Press Pvt.Ltd.New Delhi
7. Physics Part I by Resnik.R &Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi

8. Physics the pioneer science Vol.I by Taylor .L.W. Dover Publication
9. Technical Physics by Bueche.F ,Harper &Row Publication,New York
10. Unified Physics Vol-I,Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath &Co.Meerut
11. University Physics, F W Sears, MW Zemansky and H D Young 13/e, 1986. Addison Wesley
12. University Physcis, Ronald Lane Reese, 2003, Thomson, Brooks/Cole

اکائی 13۔ لچک دار مادے

(Elastic Materials)

اکائی کے اجزا

13.0 تمہید
13.1 مقاصد
13.2 زور اور بگاڑ
13.3 زور اور بگاڑ کے اقسام
13.3.1 تنشئ زور اور تنشئ بگاڑ
13.3.2 جزی زور اور جزی بگاڑ
13.3.3 حجم زور اور حجم بگاڑ
13.4 طولی بگاڑ اور جزی بگاڑ
13.5 حجمی بگاڑ اور طولی بگاڑ
13.6 ہوکس کا کلیہ
13.7 زوراور بگاڑ کا خم یا ڈائیگرام
13.7.1 لچک کی تھکان
13.8 تار میں فسادی توانائی / بگاڑی توانائی
13.9 حل شدہ مثالیں
13.10 اکتسابی نتائج
13.11 کلیدی الفاظ
13.12 نمونہ امتحانی سوالات
13.12.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
13.12.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

13.12.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
13.12.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات
13.13 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

13.0 تمہید (Introduction)

سائنس اور ٹکنالوجی دونوں میں لچک دار مادہ کی بہت اہمیت ہے لچک کے مادے میں بندشی قوتوں کی نوعیت کو سمجھنے کے لیے یہ معلومات اہم ہو جاتی ہیں اور انجینئرنگ اور ڈیزائننگ میں ان کی پیمائش اہمیت کی حامل ہوتی ہے۔ جب ایک تار کو لگائی گئی قوت کے ذریعے سے تانا جاتا ہے تب اس کے طول میں اضافہ ہوتا ہے۔ جب یہ قوت ہٹائی جائے تب یہ اپنی اصلی حالت پر واپس آتا ہے۔ لچک دار اجسام کی جسامت میں قوت کے لگانے سے تغیر پیدا ہوتا ہے جسے بگاڑ (Stress) کہتے ہیں۔ لگائی گئی قوت جس سے جسم کی شکل یا جسامت میں تغیر واقع ہو بگاڑ پیدا کرنے والی قوت کہلاتی ہے۔

13.1 مقاصد (Objectives)

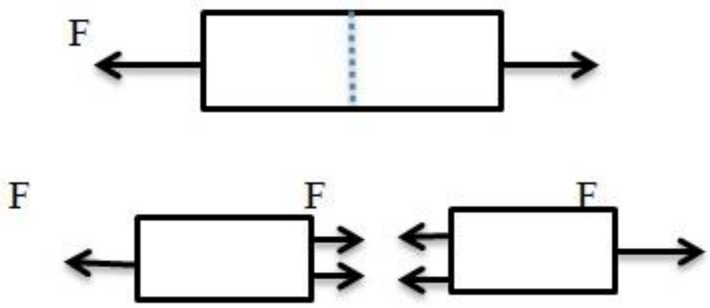
اس اکائی میں لچک کے مفہوم کو سمجھایا گیا ہے۔ اس اکائی میں:

i. زور اور بگاڑ کی تعریف کی گئی ہیں۔
ii. زور اور بگاڑ کے اقسام کے تعریفیں کی گئی ہیں۔
iii. ہوکس کے کلیے کو بیان کیا گیا ہے۔
iv. زور اور بگاڑ ڈائگرام کی تشریح کی گئی ہے۔

13.2 زور اور بگاڑ (Stress and Strain)

جیسا کہ پہلے بیان کیا جاچکا ہے کہ بگاڑ پیدا کرنے والی قوتوں کے اثر سے جسم کے ذرات میں تھوڑا سا باہمی نقل مکان واقع ہوتا ہے۔ اس کے رد عمل کے طور پر جسم کے اندر ایک قوت پیدا ہوتی ہے جس کا تقاضہ ہوتا ہے کہ وہ بگاڑ لانے والی قوت کی مخالفت کرے اور اس کی توازن میں رکھے۔ بگاڑ پیدا کرنے والی اور اس کی مخالفت کرنے والی قوتیں، مقدار میں مساوی اور سمت میں مخالف ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ ایک سلاخ لی گئی ہے جس کی تراش عمودی کا رقبہ یکساں ہے۔ اس سلاخ کے دونوں سروں پر مقدار میں مساوی سمتوں میں مخالف قوتیں F.F بموجب شکل (13.1) عمل کر رہی ہیں یعنی سلاخ زیر تناؤ ہے۔



(شکل13.1)

شکل میں شکستہ خط سے سلاخ کی ایک تراش دکھائی گئی ہے جو سلاخ کے طول کے عمودوار سمت ہے۔ سلاخ کی سبھی ہی تراشیں متوازن حالت میں ہیں اس لیے زیر نظر تراش کے دائیں جانب کا حصہ بائیں جانب کے حصے کو قوت F سے کھینچ رہا ہو گا اور یہی صورت حال دوسری تراشوں میں بھی ہو گی۔ یہ کھینچاؤ رقبہ "A" پر ہموارانہ منقسم ہو گا اور اسی قوت رد عمل فی اکائی رقبہ کو زور کہا جاتا ہے۔ یعنی

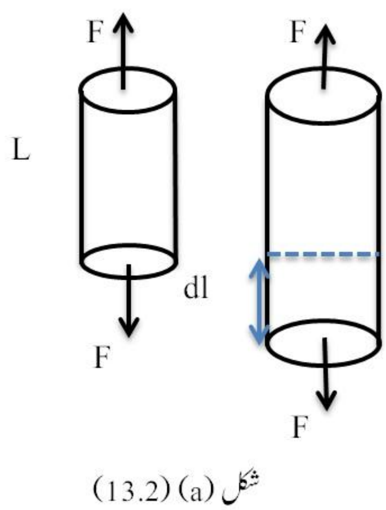
$$\text{زور} = \frac{F}{A}$$

اشیاء کی شکلوں کے بگاڑ سے مربوط جو طبیعی مقدار ہوتی ہے، وہ یہی زور ہے نہ کہ مجموعی قوت۔ اس کو Nm^{-2} میں تعبیر کیا جاتا ہے۔

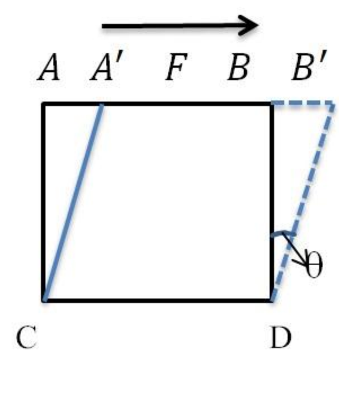
جسم میں لائے ہوئے مجموعی بگاڑ کی کسر کو Strain یعنی بگاڑ یا فساد کہتے ہیں، بگاڑ کی وجہ سے جسم کے ابعاد یا شکل یا دونوں میں تبدیلی ہو جاتی ہے۔

13.3 زور اور بگاڑ کے اقسام (Types of Stress and Strain)

عام طور پر زور کی تین قسموں کی تعریف کی جاتی ہے ان کو شکل (13.2) کے ذریعے دکھایا گیا ہے۔



شکل (a) (13.2)



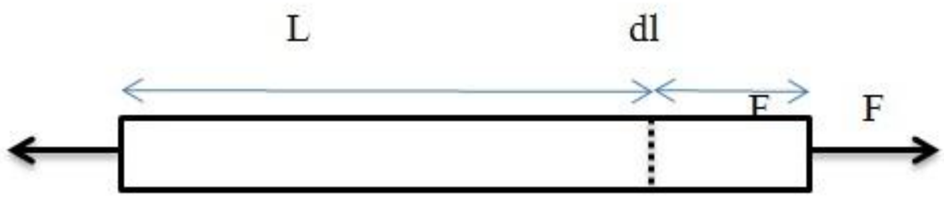
شکل (b) (13.2)

شکل(13.2)

13.3.1 تنشئی زور اور تنشئی بگاڑ (Tensile Stress and Tensile Strain)

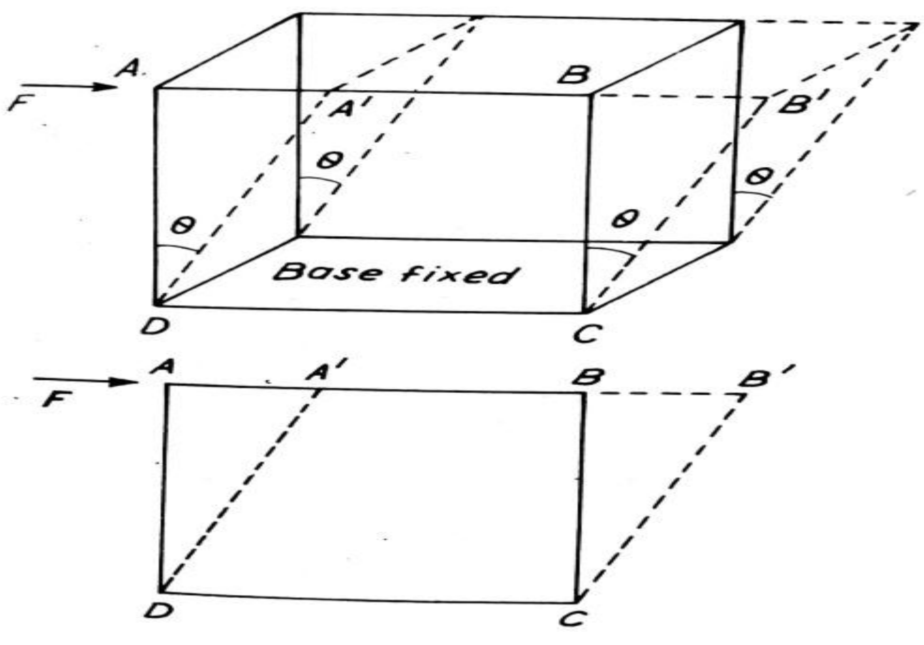
تنشئی زور، وہ قوت فی اکائی رقبہ ہے جو جسم کے طول میں اضافہ کرتی ہے جیسا کہ شکل (13.2(a)) میں دکھایا گیا ہے۔ "F" ایک قوت ہے جو ایک سلاخ پر عمل پیرا ہے جب کہ سلاخ کا تراش عمودی کا رقبہ "A" ہے۔ جیسا کہ شکل(13.3) میں اس قوت کی وجہ سے سلاخ کا طول L بڑھ کر (L+dl) ہو جاتا ہے۔ سلاخ کی اکائی میں اضافہ یعنی ($\frac{\mathrm{dl}}{\mathrm{L}}$) کو تنشئی بگاڑ (Tensile Strain) کہتے ہیں۔ یعنی

$$\text{تنشئی زور} = \frac{F}{A}$$



شکل(13.3)

13.3.2 جزی زور اور جزی بگاڑ(Shearing Stress and Shearing Strain)



شکل(13.4)

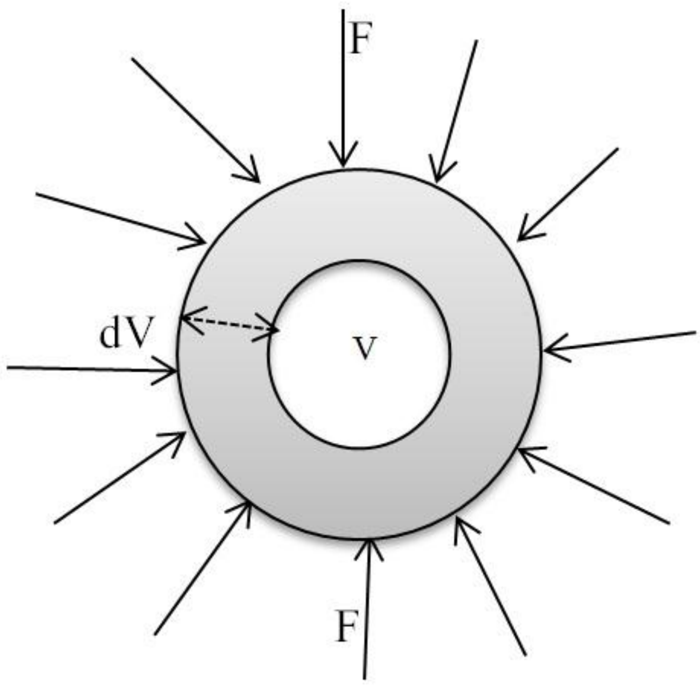
(Source: R.K.Gaur & S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

فرض کرو کہ جب شکل (13.4) ایک مکعب کی سطح ABCD کے ضلع $A'B'$ کے ساتھ ایک مماسی قوت (Tangential Force) بائیں سے دائیں جانب عمل کر رہی ہے جس کی وجہ سے سطح ABCD بگڑ کر $A'B'CD$ ہو جاتی ہے اور پورے مکعب کی شکل بدل جاتی ہے۔ اکائی رقبے پر عمل کرنے والی قوت کو جزی زور (Shearing Stress) اور شکل ((13.2(b)) میں دکھائے گئے زاویہ "θ" کو جزی بگاڑ (Shearing Strain) کہا جاتا ہے۔

13.3.3 حجم زور اور حجم بگاڑ (Bulk Stress and Bulk Strain)

فرض کرو کہ جب شکل (13.5) "V" حجم والے ایک جسم پر ایک ماسکونی دباؤ عمل کر رہا ہے جس کی وجہ سے حجم میں dv تبدیلی واقع ہوتی ہے۔ ایسے دبائو کو حجمی زور (Bulk Stress) اور حجم میں تبدیلی فی اکائی حجم یعنی

$$\frac{dv}{v} =$$ حجمی بگاڑ (Bulk Strain)



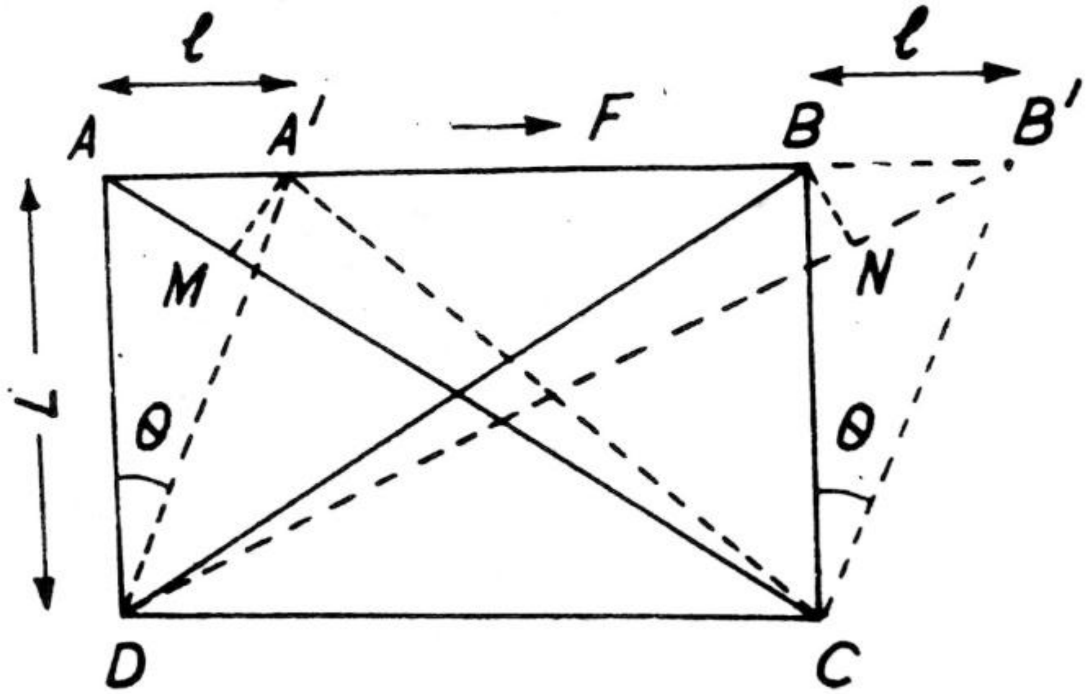
شکل (13.5)

13.4 طولی بگاڑ اور جزی بگاڑ (Longitudinal Strain and Shearing Strain)

اب ہم طولی اور جزی بگاڑ میں پائے جانے والے رشتہ پر غور کریں گے۔

فرض کرو کہ شکل (13.6) میں ABCD ایک مکعب کی عمودی تراش ہے اور رخ DC اپنی جگہ سے ہل نہیں سکتا۔ مکعب پر ایک

جزی قوت عائد کی گئی ہے جس کی وجہ سے ABCD بگڑ کر $A'B'CD$ ہو جاتا ہے۔ وتر DB بڑھ کر DB' ہو تا ہے جب کہ وتر AC گھٹ کر $A'C$ ہو جاتا ہے۔ وتروں کے طولوں کی تبدیلی اور زاویہ "θ" کی مقداریں ہیں۔ نقطہ "B" سے $B'D$ پر۔ ایک عمود BN ہے۔



شکل (13.6)

(Source: R.K.Gaur & S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

چونکہ θ چھوٹا ہے اس لیے قائم زاویہ مثلث NBB' میں زاویہ $BB'N$ کو 45° کے برابر تصور کر لیا گیا ہے۔

تب

$$NB' = BB' Cos\, 45 = \frac{BB'}{\sqrt{2}} \qquad (13.1)$$

اس طرح مثلث BCD میں

$$BD = \sqrt{2}\, BC$$

اب طولی بگاڑ ہو گا۔

$$e = \frac{CB'}{BD} = \frac{BB'}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}BC} = \frac{1}{2} \frac{BB'}{BC} \qquad (13.2)$$

لیکن $\Delta\, BB'C$ میں

$$tan\, \theta = \theta = \frac{BB'}{BC}$$

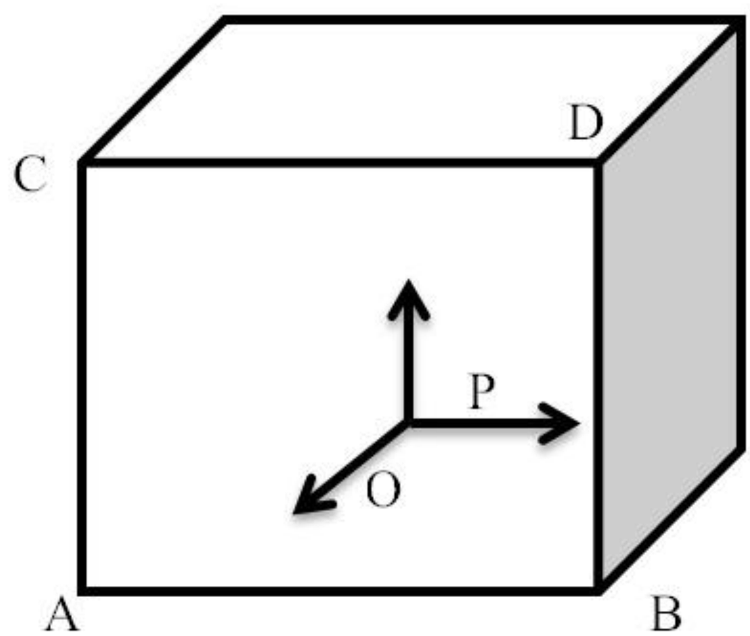
اس لیے

$$\theta = 2e \Leftarrow e = \frac{\theta}{2} \qquad (13.3)$$

یعنی جزی بگاڑ = طولی بگاڑ 2x

13.5 حجمی بگاڑ اور طولی بگاڑ (Bulk Strain and Longitudinal Strain)

شکل (13.7) میں ایک اکائی مکعب کو دکھایا گیا ہے جس کے ایک رخ کو ABCD سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل (13.7)

اب اگر ہر سمت سے اس کو مساوی قوتوں سے کھینچا جائے۔ تو مکعب کے طول عرض اور بلندی میں یکساں اضافہ ہو گا۔ اگر یہ بگاڑ (e) ہو تو مکعب کا نیا حجم ہو گا $(1+e)^3 = 1 + 3e$ چوں کہ ایک چھوٹی مقدار ہے اس لیے e^2 اور e^3 کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

حجم میں اضافہ یا حجمی بگاڑ ہوتا ہے۔ $1+3e-1=3e$

حجمی بگاڑ = طولی بگاڑ 3x

13.6 ہو کس کا کلیہ (Hook's Law)

اگر ہم ایک تار کو لے کر اسے کھینچتے جائیں تو ایک حد ایسی آئے گی کہ اس کو عبور کرنے کے بعد اگر کھینچنے والی قوت کو ہٹا دیا جائے تو تار اپنے اصلی طول پر واپس نہیں آئے گا اور تار میں ایک مستقل بگاڑ پیدا ہو جائے گا۔ اس حد کو لچک کی حد (Elastic Limit) کہتے ہیں۔

رابرٹ ہوک(Robert Hook) نے زور اور اس سے پیدا ہونے والی بگاڑ میں تعلق بتانے والا ایک کلیہ پیش کیا جس کو اسی کے نام سے موسوم کیا جاتا ہے۔اس کلیہ کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے "لچک کی حد کے اندر زور اور بگاڑ میں راست تناسب ہوتا ہے"۔یعنی

تشریح:

زور $\propto$ بگاڑ

زور(Strain) $\propto$ بگاڑ(Stress)

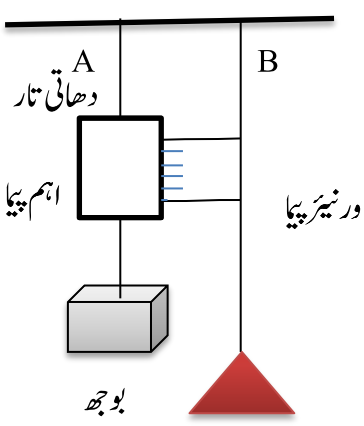
لچک کا معیار $= \frac{\text{زور (stress)}}{\text{بگاڑ (strain)}} =$ (E)ایک مستقل(Constant)

اس مستقل E کو معیار لچک یا لچک کا معیار کہا جاتا ہے۔اب ہم لچک کے مختلف معیاروں کی تعریفیں کریں گے۔

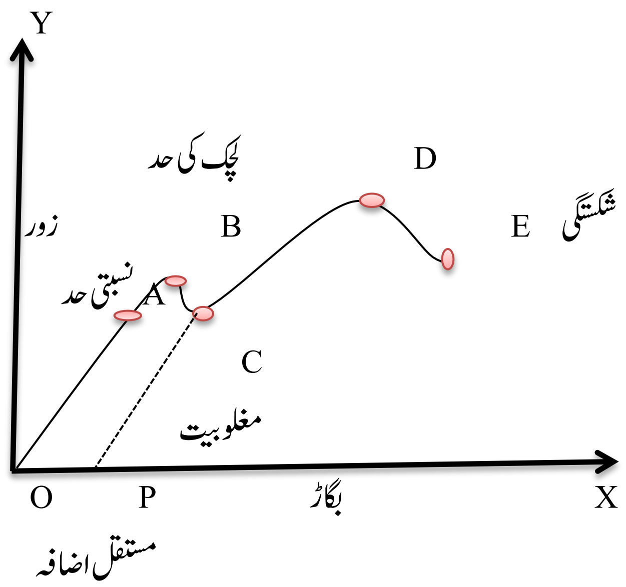
اس کی SI اکائی Nm^{-2} ہے یا Pascal(Pa) ہے۔ CGS اکائی $dynecm^{-2}$ اور ابعادی ضابطہ $(ML^{-1}T^{-2})$ معیار لچک اور زور کی اکائیاں اور ابعاد ایک ہی ہیں۔

13.7 زور اور بگاڑ کا خم یا ڈائیگرام (Stress and Strain Diagram)

دو دھاتی تار A,B پر اضافہ بوجھ معلوم کرنے کے لیے A(ایک دھاتی تار) کو ایک استواری سہارے سے لٹکایا جاتا ہے اور دوسرے سرے پر بوجھ بڑھایا جاتا ہے۔B دھاتی تار کو A سے فکسڈ(Fixed) کیا جاتا ہے۔A تار کو اور اہم پیا (Main Scale) اور B تار پر ورنیئر پیا (Vernier Scale) کو لگا دیا جائے۔ شکل(13.8(a)) کی طرح ہے۔



شکل(13.8(b))



شکل(13.8(a))

شکل(13.8)

تار A پر بوجھ کو بڑھاتے ہوئے ورنیئر پیا (Vernier Scale) اوراہم پیا (Main scale) رِڈینگ کو معلوم کیا جائے۔ اس وقت تک کہ تار ٹوٹ نہ جائے۔ ایک ترسیم Y محور پر زور اور x محور پر بگاڑ لے کر ایک ترسیم کھینچی جائے جو شکل (13.8) کی طرح ہے۔

گراف کا حصہ OA ایک خط مستقیم ہے۔ نقطہ A تک بوجھ کے لگانے پر تار کے طول میں بہت کم اضافہ ہوتا ہے۔ اس حصے میں یعنی نقطہ A تک زور راست تناسب ہوتا ہے۔ بگاڑ کے بہ الفاظ دیگر یہ ہک (Hooke) کے کلیے کی پابندی کرتا ہے۔ تار پر لگایا ہوا بوجھ ہٹالیا جائے تو وہ پھر اپنے ابتدائی طول پر آجاتا ہے۔ نقطہ A کو نسبتی حد (Proportional Limit) کہتے ہیں۔

نقطہ A سے آگے نقطہ B تک گراف ترسیم ذرا سا منحنی ہے۔ اگر ترسیم میں O اور B کے درمیان کسی بھی مقام پر تار سے بوجھ کو ہٹالیا جائے تب یہ اپنی ابتدائی حالت پر واپس لوٹ آتا ہے۔ نقطہ B کو لچک کی حد (Elastic Limit) کہتے ہیں لیکن A اور B کے درمیان زور فساد کے تناسب نہیں ہوتا۔

بعض مادوں میں ہک (Hooke) کا کلیے نقطہ B تک پابندی کرتا ہے۔ ایسے مادوں میں نقطہ A اور B دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ یعنی نقطہ A لچکی حد ہوگا۔ نقطہ B کے بعد اگر تار کے بوجھ میں مسلسل اضافہ کیا جائے تو تار مغلوب (Yield) ہونے لگتا ہے۔ اسی وزن کو جس کے لگانے کے بعد تار میں لچک کے خواص باقی نہ رہیں۔ نقطہ مغلوبیت (Yield Point) کہتے ہیں۔

یہاں تار ہک (Hooke) کے کلیے کی پابندی نہیں کرتا اور اگر اس پر سے بوجھ ہٹالیا جائے تو وہ اپنی اصلی حالت کو اختیار بھی نہیں کرتا۔ اس حصے میں یعنی نقطہ B سے C تک تار کے بوجھ میں ذرا بھی اضافہ کیا جائے تو بگاڑ میں بہت زیادہ اضافہ ہوجاتا ہے۔ اس طرح کے ردِ عمل کو ترسیم میں ٹوٹی ہوئی خطہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ جو x محور پر 'o' پر نہیں بلکہ 'p' پر خط کرتی ہے۔ اس طرح سے OP ایک دائی تغیر ہے۔ گراف کے اس حصہ میں تار کے طول میں ایک مستقل اضافے کو Permanent Set کہا جاتا ہے۔ نقطہ 'C' کے بعد بوجھ میں اضافے کے بغیر ہی تار کے طول میں خود بہ خود اضافہ ہوتا جاتا ہے۔ اور تار باریک ہونے لگتا ہے یعنی اس کے قطر میں مسلسل کمی ہونے لگتی ہے۔ نقطہ 'D' کے بعد تار میں پتلا پن ہموار طور پر زیادہ دیر نہیں ٹکے گا اور تار میں پھوٹن واقع ہوگی اور فوری طور پر زور کم ہوجائے گا۔ خود بہ خود حصہ DE حاصل ہوگا۔ نقطہ E پر تار بالآخر ٹوٹ جائے گا۔ E کو نقطہ شکستگی (Breaking Point) کہتے ہیں۔

اگر لچکی حد اور نقطہ شکستگی کے درمیان بگاڑ زیادہ ہو اسے مادوں کو تمرد (Ductile) کہتے ہیں۔ اسے مادوں کے باریک تار بنا سکتے ہیں۔ اگر لچکی حد اور نقطہ شکستگی کے درمیان فاصلہ بہت چھوٹا سا یا تار لچکی حد پار کرتے ہی ٹوٹ جائے اسے مادے کو پھوٹک (Brittle) کہتے ہیں۔

13.7.1 لچک کی تھکان (Elastic Fatigue)

جب ایک جسم پر مسلسل زور لگایا جاتا ہے۔ لچک کی حد کے اندر ہی وہ کمزور پڑ جاتا ہے۔ کیوں کہ یہ لچکی خصوصیت عارضی طور پر کھو بیٹھتا ہے۔ اگر جسم کی موجودہ حالت کو جانیں بغیر زیادہ زور لگائیں تب اس میں شرح پیدا ہوگی اور جسم ٹوٹ جائے گا۔ یہ زور شکستگی سے کم زور پر بھی ٹوٹ سکتا ہے۔ مثلاً ایک دھاتی تار جیسے تانبہ کے تار کو ایک دفعہ موڑنے پر یہ نہیں ٹوٹتا ہے لیکن مسلسل ایک ہی مقام پر موڑنے پر یہ

ٹوٹ جاتا ہے۔ یہ لچک کی خاصیت میں پیدا ہونے والا عارضی نقصان جب کہ تار پر مسلسل زور لگایا جائے لچک کی تھکان(Elastic Fatigue) کہا جاتا ہے۔ اگر عناصر کو کچھ وقت تک رکھ چھوڑ دیا جائے یعنی اس پر کچھ وقت کے لیے فساد یا بگاڑ عائد نہ کیا جائے یہ اپنے اصلی لچکی خصوصیت حاصل کر لے گا۔

13.8 تار میں فسادی توانائی / بگاڑی توانائی(Strain Energy in Wire)

جب ایک تار اپنے طبعی طول میں رہتا ہے تب توانائی بالقوہ جو جوہروں اور سالمات میں پائی جانے والی قوتوں کی وجہ سے اقل ترین ہوتی ہے جب تار پر بگاڑ پیدا کیا جائے اندرونی قوتیں جسے رجعی قوت کہتے ہیں ۔ اور بگاڑ پیدا کرنے والی قوتوں کے مخالف یہ قوتیں جسم میں کام کریں گی۔ یہ کام میں توانائی بالقوہ کی شکل میں محفوظ ہو گی۔ اس توانائی بالقوہ کو بگاڑ توانائی کہتے ہیں۔ بگاڑ توانائی در اصل جسم میں محفوظہ توانائی ہے جو اس میں بگاڑ کی وجہ سے ہے۔

بگاڑ توانائی(Strain Energy)

فرض کرو کہ ایک پتلا ہموار تار جس کا طبعی طول L اور عرضی تراش کا رقبہ A ہے۔ ایک سرے کو مستقل رکھ کر دوسرے سرے پر بیرونی قوت عائد کی جائے تب تار میں تناؤ ہو گا۔ اور یہ قوت ہمیشہ اس تار کے تناؤ کے مساوی ہو گی۔ تناسبی حد کے اندر اضافی طول عائد کردہ قوت کے راست متناسب ہو گی۔ قوت ہموار طور پر صفر سے F تک بڑھ کر اضافہ طول e دیتی ہے۔ تار پر اوسط قوت یعنی

$$\left[\frac{0+F}{2}\right]=\frac{F}{2} \tag{13.4}$$

طے شدہ کام = اوسط x اضافہ طول ($\because W=FS$)

$$W=\frac{F}{2}(e) \tag{13.5}$$

یہ تار میں فسادی توانائی کی شکل میں محفوظ رہتی ہے۔

$\therefore$ تار میں فسادی توانائی

$$W=\frac{1}{2}Fe \tag{13.6}$$

تار میں فسادی توانائی اکائی حجم

$$W=\frac{1Fe}{2AL} \tag{13.7}$$

$$\text{فسادی توانائی کا حجم} = \text{فساد}\ x\ \text{زور} \times \frac{1}{2} \quad (13.8)$$

یہ فسادی توانائی فی اکائی حجم کو تار میں ینگ کے معیار لچک Y میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\text{فسادی توانائی فی اکائی حجم} = \frac{1}{2}\frac{(\text{زور})^2}{Y} \quad (13.9)$$

$$\because Y = \frac{\text{زور}}{\text{فساد}} \quad (13.10)$$

$$\text{فسادی توانائی فی اکائی حجم} = \frac{1}{2}(\text{فساد})^2 \times Y \quad (13.11)$$

جب بیرونی قوت کو ہٹالیا جائے تب زور ختم ہو جاتا ہے اور فسادی توانائی حرارت کی شکل میں ظاہر ہو گی۔ مندرجہ بالا رشتہ طولی حجمی اور شکلی فساد کے لیے کارآمد ہے۔

13.9 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال1

اگر ینگ کا معیار لچک $1.2\text{x}10^{11}\text{Nm}^{-2}$ ہے تب تار کو جس کا طول 3m اور عرضی تراش کا رقبہ 4mm^2 کو 8kg بوجھ جو اس کے نچلے سرے سے لٹکایا گیا ہے۔ تو کام معلوم کرو۔

حل:

$Y=1.2\text{x}10^{11}\ \text{N m}^{-2}$; L=3m ; $A=4\text{mm}^2 = 4\text{x}10^{-6}\ \text{m}^2$; M= 8 Kg

$$\text{W} = \text{کام} = \frac{1}{2}\ \text{تانی ہوئی قوت}\ \text{x}\ \text{اضافہ طول}$$

$$\text{لیکن}\ e = \frac{FL}{AY}$$

$$w = \frac{1}{2}\times\frac{F^2L}{AY} = \frac{1}{2}\times\frac{(Mg)^2L}{AY} = \frac{1}{2}\times\frac{(8\times9.8)^2\times3}{4\times10^{-6}\times1.2\times10^{11}} = 0.0192J$$

حل شدہ مثال2

ایک فولاد کے تار کا قطر 1mm ہے اس پر 50N کی قوت عائد کی گئی ہے زور معلوم کرو۔

حل:

$$\text{نصف قطر}\ r = \frac{\text{قطر}}{2} = \frac{1mm}{2} = 0.5mm$$

$$r = o.5 \times 10^{-3} m \ , F = 50N$$

$$\text{زور} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2}$$

$$\text{زور} = \frac{50}{3.14 \times (0.5 \times 10^{-3})^2}$$

$$\text{زور} = 31.84 \times 10^6 \ \frac{N}{m^2}$$

حل شدہ مثال3

ایک تانبے کے تار کو جو 1 میٹر لمبا ہے 1cm تانا گیا ہے اس کا بگاڑ معلوم کرو۔

حل:

$$L = 1cm$$

$$e = 1cm = 1 \times 10^{-2} m$$

$$\text{بگاڑ}(strain) = \frac{e}{L}$$

$$\text{بگاڑ}(strain) = \frac{1 \times 10^{-2}}{1} = 0.01$$

حل شدہ مثال4

ایک فولاد کے تار کا قطر 2mm اور طول 2m ہے۔ اسے 10N قوت سے تانا گیا ہے جس سے اس کے طول میں 0.05mm اضافہ ہوتا ہے۔ تب معلوم کرو (i) زور (ii) بگاڑ

حل:

$$\text{تار کا قطر} = 2mm$$

$$\text{نصف قطر } r = 1mm = 1 \times 10^{-3} m$$

$$\text{طول} = L = 2m$$

$$\text{زور} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2}$$

$$\text{زور} = \frac{10}{3.14(1 \times 10^{-3})^2} = 0.3185 \times 10^5 N/m^2$$

$$\text{بگاڑ} = \frac{e}{L}$$

$$0.025 \times 10^{-3} = \frac{0.05 \times 10^{-3}}{2} = \text{بگاڑ}$$

13.10 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے جانا کہ:

- عائد کردہ قوت جو جسم کے شکل یا جسامت میں تبدیلی لاتی ہے۔بگاڑ پیدا کرنے والی قوت کہلاتی ہے۔
- مادہ کی وہ خاصیت جس کی بدولت مادہ اپنی ابتدائی جسامت اور شکل پر عود کر جاتا ہے جب کہ بگاڑ پیدا کرنے والی قوتیں ہٹائی جائیں لچک کہلاتی ہیں۔
- اگر جسم مکمل طور پر ابتدائی جسامت اور شکل اختیار کرلیتا ہے جب کہ بگاڑ پیدا کرنے والی قوتیں ہٹائی جائیں تب ایسا جسم کامل لچک دار کہلاتا ہے۔
- مادے کی وہ خاصیت جس کی بدولت مادہ اپنی بگڑی ہوئی حالت میں رہ جائے جب کہ بگاڑ پیدا کرنے والی قوت کو ہٹادیا جائے غیر لچکی خصوصیات کہلاتی ہے۔
- زور جسم کے اندر رجعی قوت فی اکائی رقبہ ہے۔
- مختلف زور کے قسم (i)طولی زور(ii)عمودی یا جزی یا شکلی زور اور(iii) حجمی زور
- کسی جسم کے ابعاد میں مختلف قوتوں یا توازن میں جفت کے عائد کرنے پر تغیر اور اصلی ابعاد کی نسبت بگاڑ کہلاتی ہے۔اس کی کوئی اکائیاں اور ابعاد نہیں۔
- بگاڑ کے تین اقسام ہیں(i)طولی بگاڑ(ii)عمودی یا جزی یا شکلی بگاڑ (iii) حجمی بگاڑ
- جسم کے طول میں تغیر اور اس کے اصل طول کی نسبت کو طولی بگاڑ کہتے ہیں۔
- جسم کے حجم میں تغیر اور اس کے اصل حجم میں نسبت کو حجم بگاڑ کہتے ہیں۔
- شکلی بگاڑ وہ زاویہ θ یا $\frac{\Delta l}{L}$ کی نسبت کے مساوی ہے۔

13.11 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **پچکاؤ(Compressibility)** : حجمی معیار کے مربی مقلوب
- **تمدد(Duetile)** : لچکی حد اور نقطہ شگفتگی کے درمیان بگاڑ
- **پھوٹک(Brittle)** : لچکی حد پار کرتے ہی ٹوٹ جائے
- **شگفتگی نقطہ(Yield Point)** : لچکی حدود سے آگے بوجھ کے اضافہ پر ترسیم نقطہ

13.12 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

13.12.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. کمانی(Spring) کو اسٹیل سے کیوں بنایا جاتا ہے۔ تانبہ سے کیوں نہیں؟
2. ایک کمانی(Spring) کو کھینچنے پر کس طرح کا فساد پیدا ہو گا؟
3. کیا گیس استواری زور کی مزاحمت کرتے ہیں؟
4. زور کی اکائی.............................ہے۔
5. تقریباً کامل لچک دار اجسام کی مثالیں دیجیے۔
6. تقریباً غیر کامل لچک دار اجسام کی مثالیں دیجیے۔
7. زور کا ابعاد کا ضابطہ.............................ہے۔
8. لچک کی حد(Elastic Limit) سے کیا مراد ہے؟
9. طولی بگاڑ اور جزی بگاڑ میں رشتہ.............................ہے۔
10. کیا تار ٹوٹنے پر اس کی تپش میں اضافہ ہو گا؟

13.12.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. بگاڑ اور بگاڑ پیدا کرنے والی قوت کیا ہے۔ بیان کرو۔
2. زور کیا ہے؟ اس کے اقسام بیان کرو۔
3. بگاڑ کیا ہے؟ اس کے اقسام بیان کرو۔
4. بگاڑ توانائی کی تعریف کرو اس کے مساوات اخذ کرو۔

13.12.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. بگاڑ کے اقسام کو بیان کرو۔ بگاڑ توانائی کی تعریف کرو اور اس کے مساوات اخذ کرو۔
2. اگر ایک تار کو مسلسل ایک مخصوص نقطے پر موڑا جائے تب یہ ٹوٹ جاتا ہے۔ کیوں؟

13.12.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات(Solved Answer Type Questions)

1. ایک تار کو قطر 0.5mm ہے اس پر 10N قوت تانی گئی ہے تار میں زور معلوم کرو۔

2. ایک Iron تار کا طول 10cm ہے تب 0.05cm تانا گیا ہے تار میں بگاڑ معلوم کرو۔

3. ایک Copper کے تار کا قطر ایک ملی میٹر (1mm) ہے اور طول 2m ہے 10N قوت سے تان دیا گیا ہے اگر اس کے طول میں 0.25mm اضافہ ہو تب (i) زور، (ii) بگاڑ معلوم کرو۔

4. اگر پلیٹینیم کے تار کو %0.5 تانا گیا تب اس تار کا بگاڑ کیا ہو گا۔

13.13 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. College Physics by Sears.F.W.& Zemansky.M.W. Wesley Publishing Co.Inc.London
2. Deformation and Integrity of Materials,Volume-1: Fundamentals and Elasticity, De with Gijsbertus (2006)
3. Elasticity Theory by sadd Martin.H, Application and Numarics Oxford Elsevies
4. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta Dhanpat Rai Publications
5. Physics by Zafiratos.C, John wesiey &Sons. Inc. New York
6. Physics Part I by Resnik.R &Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi
7. Physics of Rubber Elasticity by Treloar, L.R.GClarendom Press
8. Technical Physics by Bueche.F ,Harper &Row Publication,New York
9. Theory of Elasticity by Landau LD,Lipshits.E.m ,3rd Edition
10. Unified Physics Vol-I,Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath &Co.Meerut

اکائی 14۔ ٹھوس اجسام کی لچک کے خواص

(Elastic Properties of Matter)

اکائی کے اجزا

14.0 تمہید

14.1 مقاصد

14.2 ہوکس کا کلیہ

14.3 لچک کے معیار

14.3.1 ینگ کا معیار

14.3.2 استواری کا معیار

14.3.3 حجمی معیار

14.4 پائی سان کی نسبت

14.5 ینگ کے معیار (Y)' استواری کے معیار η اور حجمی معیار (K) میں رشتہ

14.5.1 ینگ کے معیار (Y) اور حجمی معیار (K) میں رشتہ

14.5.2 ینگ کے معیار (Y) اور استواری کا معیار η میں رشتہ

14.5.3 ینگ کے معیار (Y)، حجمی معیار (K) اور استواری کا معیار η میں رشتہ

14.6 حل شدہ مثالیں

14.7 اکتسابی نتائج

14.8 کلیدی الفاظ

14.9 نمونہ امتحانی سوالات

14.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

14.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

14.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

14.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

14.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

14.0 تمہید(Introduction)

مادی اجسام کے میکانی رویے کو ان کی لچک کے خواص کی مدد سے بیان کیا جاتا ہے اس لیے سائنس اور ٹکنالوجی دونوں میں ان کی پیمائش اہمیت کی حامل ہوتی ہے۔

جب ایک ربر کے گولے پر دباؤ میں اضافہ کریں تب اس کے حجم میں خمی واقع ہوتی ہے۔ ایک کتاب میز پر رکھی جائے اور ایک قوت لگائی جائے اور نیچے کی سطح مستقل رہے تو اس کے شکل میں تبدیلی وقع ہوگئی اور اسی طرح ایک تار کو لگائی قوت سے طول میں اضافہ ہوتا ہے۔ لچک کی حد کے اندر زور اور بگاڑ کی نسبت مستقل ہوتی ہے۔ اس مستقل کو لچک کی معیار کہلاتا ہے۔

14.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی میں ہم:

i. زور اور بگاڑ کے لچک کے مختلف معیاروں کی تعریفیں کریں گے۔

ii. لچک کے مستقلات اور مادی اشیا کی طاقت کے مابین پائے جانے والے رستوں کو معلوم کریں گے۔

14.2 ہوکس کا کلیہ(Hook's Law)

اگر ہم ایک تار کو لے کر اسے کھینچتے جائیں تو ایک حد ایسی آئے گی کہ اس کو عبور کرنے کے بعد اگر کھینچنے والی قوت کو ہٹا دیا جائے تو تار اپنے اصلی طول پر واپس نہیں آئے گا اور تار میں ایک مستقل بگاڑ پیدا ہو جائے گا۔ اس حد کو لچک کی حد(Elastic Limit) کہتے ہیں۔ رابرٹ ہوک(Robert Hook) نے زور اور اس سے پیدا ہونے والے بگاڑ میں تعلق بتانے والا ایک کلیہ پیش کیا جس کو اسی کے نام سے موسوم کیا جاتا ہے۔ اس کلیے کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے "لچک کی حد کے اندر زور اور بگاڑ میں راست تناسب ہوتا ہے"۔ یعنی

تشریح:

زور $\propto$ بگاڑ

زور(Strain) $\propto$ بگاڑ(Stress)

لچک کا معیار $= \dfrac{\text{زور (stress)}}{\text{بگاڑ (strain)}} =$ (E) ایک مستقل(Constant)

اس مستقل E کو معیار لچک یا لچک کا معیار کہا جاتا ہے۔ اب ہم لچک کے مختلف معیاروں کی تعریفیں کریں گے۔

اس کی SI اکائی Nm^{-2} ہے یا (Pa) Pascal ہے CGS اکائی $dynecm^{-2}$ اور ابعادی ضابطہ ($ML^{-1}T^{-2}$) معیار لچک اور زور کے اکائیاں اور ابعاد ایک ہی ہیں۔

14.3 لچک کے معیار (Modulus of Elasticity)

تین اقسام کے زور کی بنا پر لچک کے معیار بھی تین طرح کے ہے۔

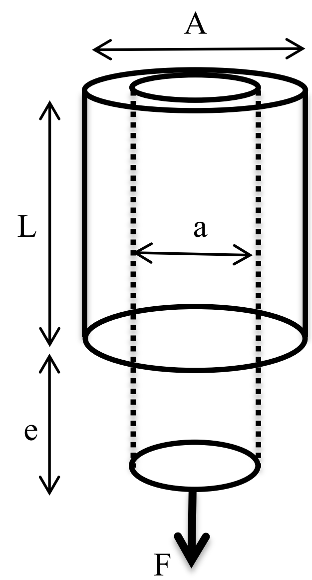
(i) ینگ معیار جو طولی فساد کی نسبت سے ہے۔

(ii) استواری معیار جو شکلی فساد کی نسبت سے ہے۔

(iii) حجمی معیار جو حجمی فساد کی نسبت سے ہے۔

14.3.1 ینگ کا معیار (Young's Modulus –Y)

اسے تناسبی حد کے اندر طولی زور اور طولی فساد کے درمیان نسبت سے بیان کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ L ایک تار یا سلاخ کا طول ہے۔ اور عرضی تراش کا رقبہ A ہے۔ ایک سخت سہارے سے لٹکایا گیا ہے۔ اگر اس پر F قوت دوسرے سرے پر لٹکائی جائے۔ تب اس کے طول میں e اضافہ ہوتا ہے۔ جیسا کہ شکل (14.1) میں ہے۔



شکل (14.1)

$$\text{زور طولی} = \frac{F}{A}$$

$$\text{فساد طول} = \frac{e}{L}$$

ینگ کا معیار

$$Y = \frac{\text{زور طولی}}{\text{فساد طولی}}$$

$$Y = \frac{F/_A}{e/_L} = \frac{FL}{Ae}$$

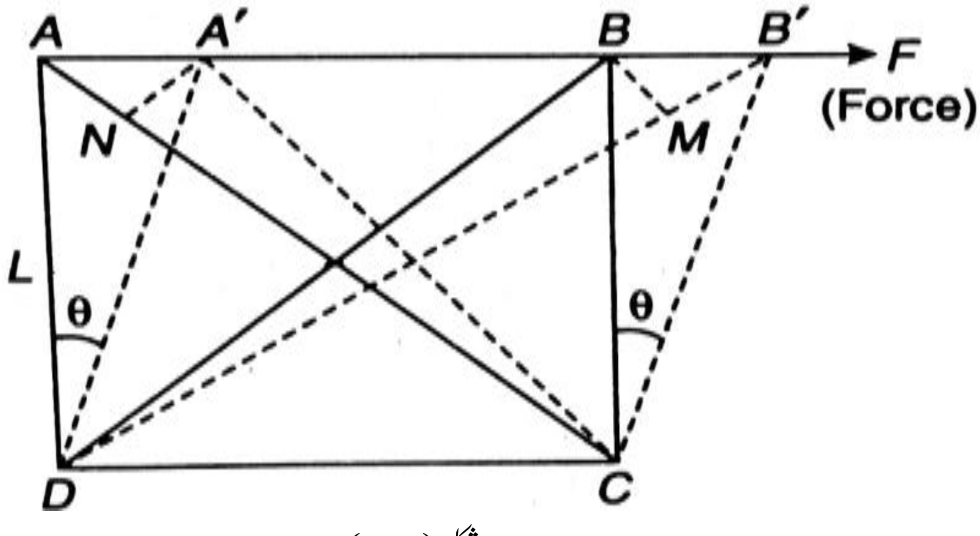
$$Y = \frac{FL}{Ae}$$

ینگ کا معیار لچک ایک سخت جسم کے لیے لامتناہی ہو گا۔ کیوں کہ e=0 چاہے وقت کی مقدار کتنی ہی کیوں نہ ہو۔ صرف ٹھوس میں ینگ کا معیار لچک ہو گا۔ معاشیات اور گیس میں ینگ کا معیار نہیں ہو گا۔

اسٹیل، ربر سے زیادہ لچک دار ہے کیوں کہ دیے گئے زور پر ربر میں بہ نسبت اسٹیل کے بہت زیادہ فساد ہو گا۔

14.3.2 استواری کا معیار (Regidity Modulus –(η))

اسے تناسبی حد کے اندر شکلی زور اور شکلی فساد کی نسبت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک ملعب جس کا طول L ہے جو شکل (14.2) میں دکھایا گیا ہے۔ پر ایک قوت F اس کی ایک سطح پر لگائی گئی دوسری سطح CD مستقل ہے۔ اس قوت کی بدولت عمودی سطح مستقل سطح سے L فاصلے $(BB' = l)$ $A'B'$ تک ہٹ جائے گی یا θ زاویہ پر ہو گی۔



شکل (14.2)

(Source: R.K.Gaur & S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

$$\text{زور شکلی} = \frac{F}{A}$$

$$\text{فساد}\theta = \frac{l}{L}$$

$$\text{استواری کا معیار} = \frac{\text{شکلی زور}}{\text{شکلی فساد}} = \frac{\frac{F}{A}}{\theta}$$

$$\eta = \frac{F}{A\theta} = \frac{FL}{Al}$$

استواری معیار (Shear Modulus) یا مرڈی معیار (Torsional Modulus) بھی کہتے ہیں۔ عرض ٹھوس میں یہ خصوصیات پائی جاتی ہے۔مائیات(Liquids)اور گیس(Gases) میں استواری معیار نہیں ہوتا۔

14.3.3 حجمی معیار((Bulk Modulus –(K)

لچک کے حدود میں حجمی زور اور حجمی فساد کی نسبت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔جب جسم کے حجم V میں دباؤP کے زیر اثر ΔV تغیر واقع ہوتا ہے۔تب

حجمی زور= P

$$\text{حجمی فساد} = \frac{\Delta V}{V}$$

$$K = -\frac{P}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{\text{حجمی زور}}{\text{حجمی بگاڑ}}$$

$$K = -\frac{P}{\frac{\Delta V}{V}}$$

$$K = -\frac{PV}{\Delta V}$$

منفی علامت دباؤ کے اضافہ پر حجم میں کمی کو واضح کرتی ہے عموماً ΔV حجم کے تغیر کو ظاہر کرتی ہے۔اگر دباؤ میں ΔP تغیر واقع ہو تب حجمی معیار لچک۔

$$\text{حجمی معیار } K = -\left(\frac{\Delta P}{\Delta V}\right)V$$

حجمی معیار کے ضربی مقلوب کو پچکاؤ(Compressibility) کہتے ہیں۔ ایک استوار جسم اور ایک کامل مائع میں پچکاؤ نہیں ہوتا۔ یعنی ان کی پچکاؤ کی قیمت صفر ہو گی۔

ٹھوس مائع اور گیس میں حجمی معیار پایا جاتا ہے۔ گیس میں دو طرح کے حجمی معیار پائے جاتے ہیں۔

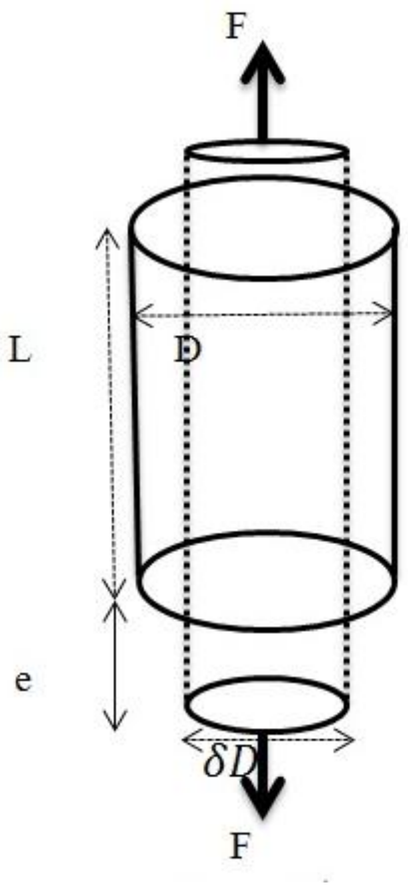
(i) ہم تپشی لچک جو تپشی تغیر کی وجہ سے ہے۔

(ii) ہر نا گزار لچک جو ہر نا گزار تغیر کی وجہ سے ہے۔

14.4 پائی سان کی نسبت(Poisson's Ratio)

جب ایک تار پر طولی زور لگایا جاتا ہے تب اس کے طول میں اضافہ ہوتا ہے لیکن اس کے قطر میں کمی واقع ہوتی ہے۔ یعنی لگائی گئی قوت کی سمت میں اگر اضافہ ہو تب اس کے عمودوار سمت میں سکڑاؤ ہو گا۔

لگائی گئی قوت کے عمودوار تغیر ابعاد اور ابتدائی ابعاد کی نسبت کو سطح فساد(Lateral Strain) کہتے ہیں۔



شکل(14.3)

سطحی فساد، طولی فساد کے راست متناسب ہے۔

سطحی فساد $\propto$ طولی فساد

سطحی فساد = σ طولی فساد

جہاں σ پائی سان کی نسبت ہے۔ اس کی قیمت مادے کی نوعیت پر منحصر ہے۔

اسے سطحی فساد اور طولی فساد کی نسبت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک تار جس کا طول L اور قطر D ہے۔ اس کے طول میں e اضافہ ہو گا۔ یہ اضافہ دو مساوی مخالف سمت میں لگائی گئی قوتوں کی وجہ سے ہے۔ اس سے قطر میں δD کی کمی واقع ہو گی۔ یہ کمی لگائی گئی قوت کی سمت سے عموداً ہو گی۔

$$\text{سطحی بگاڑ} = -\frac{\delta D}{D}$$

منفی علامت طول کے اضافہ e پر قطر میں δD میں کمی کی وجہ سے ہے۔

پائی سان کی نسبت کی کوئی اکائی اور ابعاد نہیں ہیں کیوں کہ یہ دو فسادوں کی نسبت ہے۔ شکل (14.3) پائی سان کی نسبت کی نظر ثانی حد 1- سے 0.5+ ہے لیکن عملی طور پر اس کی حد 0.2 سے 0.4 تک ہے۔ جدول(14.1) مختلف مادوں کے لچک کی معیار اور پائی سان کی نسبت کو ظاہر کرتی ہے۔

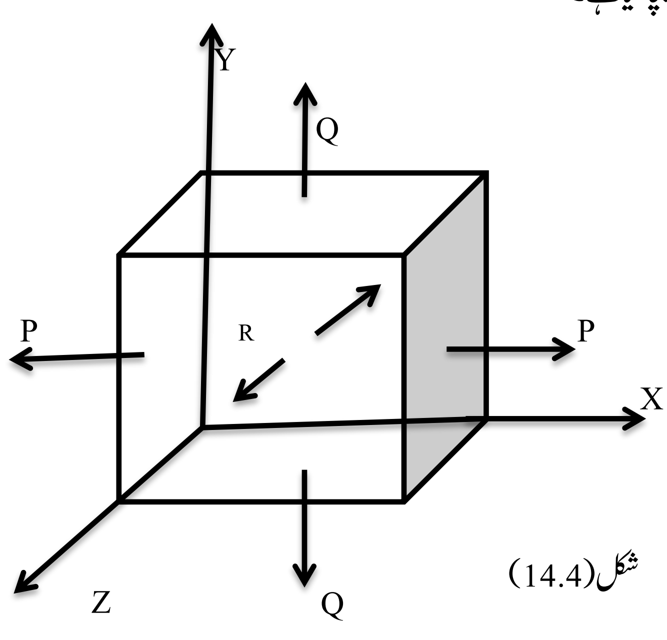
جدول 14.1

مختلف مادوں کے لچک کی معیار اور پائی سان کی نسبت

مادہ	Y $10^{11}N/m^2$	n $10^{11}N/m^2$	K $10^{11}N/m^2$	σ
المونیم	0.70	0.30	0.70	0.16
پیتل	0.90	0.36	0.61	0.26
تانبہ	1.1	0.42	1.4	0.32
کاپر	1.9	0.70	1.0	0.27
لوہا	2.0	0.84	1.6	0.19
فولاد	3.6	1.5	2.0	0.20
ٹنگسٹن	2.02	0.77	1.76	0.30
نکل شیشہ	0.60	0.31	0.37	0.19

14.5 ینگ کے معیار(Y)' استواری کے معیاری η اور حجمی معیار (K) میں رشتہ

شکل(14.4) میں ایک اکائی مکعب کو دکھایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ تینوں صدر محوروں Y,X اور Z کی سمتوں میں اس کو تین قوتوں Q,P اور R کھینچا گیا ہے۔



شکل(14.4)

کھینچنے والی قوت OX,P کے متوازی ہے اور یہ سطحوں AA', DD' اور BB', CC' پر مخالف سمتوں میں عمل پیرا ہے۔
اس طرح Q کا عمل سطحوں CC', DD' اور BB', AA' پر اور R کا عمل سطحوں ABCD اور $A'B'C'D'$ پر یکساں ہو رہا ہے چوں کہ مکعب کا ہر ضلع اکائی ہے۔ Q,P اور R متعلقہ زور کی مقداریں بن جاتی ہیں۔
کھینچنے والی قوت کے سبب اس کی سمت میں طول میں اضافہ ہوتا ہے اور اس کی عمودوار سمت میں سکڑائو واقع ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر زور P سمت OX میں ایک بگاڑ $\frac{P}{Y}$ پیدا کرتا ہے اور اسی کی وجہ سے OY اور OZ کی سمتوں میں پیدا ہونے والے بگاڑ یا سکڑاؤ $\left(-\frac{\sigma P}{Y}\right)$ ہوں گے۔ اس طرح سے زور Q اور زور R سے پیدا ہونے والے بگاڑوں کو جدول (14.2) میں دکھایا گیا ہے۔

جدول (14.2)

زور اور اس کی سمت	بگاڑ کی سمت		
	OX	OY	OZ
OX.P کی سمت میں	$\frac{P}{Y}$	$-\frac{P\sigma}{Y}$	$-\frac{P\sigma}{Y}$
OY,Q کی سمت میں	$-\frac{\sigma Q}{Y}$	$\frac{Q}{Y}$	$-\frac{\sigma Q}{Y}$
OZ,R کی سمت میں	$-\frac{\sigma R}{Y}$	$-\frac{\sigma R}{Y}$	$\frac{R}{Y}$
اگر Q.P اور R ایک وقت پر عمل پیرا ہوں	$\frac{P}{Y}-\frac{\sigma(Q+R)}{Y}$	$\frac{Q}{Y}-\frac{\sigma(P+R)}{Y}$	$\frac{R}{Y}-\frac{\sigma(P+Q)}{Y}$

14.5.1 ینگ کے معیار (Y) اور حجمی معیار (K) میں رشتہ

(Relation between Young Modulus and Bulk Modulus)

اگر P=Q=R ہو تو مکعب کی تمام سمتوں میں پیدا ہونے والے بگاڑ مساوی ہوں گے ایسی صورت میں کسی بھی سمت میں بگاڑ "e" ہو گا۔

$$e=\frac{P}{Y}-\frac{\sigma(P+P)}{Y}=\frac{P(1-2\sigma)}{Y} \qquad (14.1)$$

اور حجمی بگاڑ ہو گا $3e=\frac{3P(1-2\sigma)}{Y}$

حجمی لچک کا معیار ہو گا

$$K = \frac{P}{\text{حجمی بگاڑ}} = \frac{PY}{3P(1-2\sigma)} = \frac{Y}{3(1-2\sigma)} \quad (14.2)$$

$$\therefore Y = 3K(1-2\sigma) \quad (14.3)$$

14.5.2 ینگ کے معیار (Y) اور استواری کے معیاری η میں رشتہ

(Relation between Young Modulus and Rigidity Modulus)

اگر R=Q اور Q=-P (جس میں کھینچاؤ ہے اور Q سکڑاؤ) تو مکعب میں پیدا ہونے والے بگاڑ جدول (14.3) کے مطابق ہوں گے۔

جدول (14.3)

زور اور اس کی سمت	بگاڑ کی سمت		
	OX	OY	OZ
OX- کی سمت میں	$\frac{P}{Y}$	$-\frac{\sigma P}{Y}$	$-\frac{\sigma P}{Y}$
OY- کی سمت میں Q=-P	$-\frac{\sigma Q}{Y} = \frac{\sigma P}{Y}$	$\frac{Q}{Y} = -\frac{P}{Y}$	$\frac{\sigma Q}{Y} = \frac{\sigma P}{Y}$
OZ- کی سمت میں R=-O	--	--	--
اگر Q.P اور R ایک وقت پر عمل پیرا ہوں	$\frac{P}{Y}(1+\sigma)$	$-\frac{P}{Y}(1+\sigma)$	Zero

چونکہ جزی بگاڑ θ اور طولی بگار "e" میں ذیل کا تعلق ہے۔

$\theta = 2e$

اس لیے

$$\frac{P}{\eta} = \frac{2P}{Y}(1+2\sigma) \quad (14.4)$$

یا

$$Y = 2\eta(1+\sigma) \qquad (14.5)$$

14.5.3 ینگ کے معیار(Y)، حجمی معیار (K)اور استواری کے معیاری η میں رشتہ

(Relation between Young,Bulk and RigidityModulus)

مساواتوں(14.3)اور(14.5)کو جوڑنے پر

$$\sigma = \frac{3k - 2\eta}{2(3K+\eta)} \qquad (14.6)$$

14.6 حل شدہ مثالیں(Solved Examples)

حل شدہ مثال1

ایک مکعب2cmوالے ضلعے کی اوپری سطح کو0.25cm مماسی قوت 0.5N کے ذریعے سے سرکایا گیا ہے تب مادہ کے استواری کا معیار لچک(Rigidity Modulus)معلوم کرو۔

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$L = 2cm = 2\times10^{-2}m$$
$$L = 0.25cm = 0.25\times10^{-2}m$$
$$F = 0.5\ N$$

استواری کا معیار لچک

$$\eta = \frac{FL}{Al} = \frac{FL}{L^2 l} = \frac{F}{Ll}$$

$$\eta = \frac{0.5}{2\times10^{-2}\times0.25\times10^{-2}}$$

$$\eta = 1\times10^{4}\ N/m^2$$

حل شدہ مثال2

ایک2100Nوالی مماسی قوت ایک جسم جس کے سطحی رقبے $3x10^{-6}m^2$ پر عائد کی گئی ہے جس سے اوپری سطح7mm رکھی

جاتی ہے۔ اگر مستقل سطح سے اوپری سطح کا فاصلہ 0.1m ہو تب مادے کا استواری معیار لچک معلوم کرو۔

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$F = 2100\ N$$
$$A = 3 \times 10^{-6} m^2$$
$$l = 7mm = 7 \times 10^{-3} m$$
$$L = 0.1M$$

استواری معیار لچک

$$\eta = \frac{FL}{Al}$$

$$\eta = \frac{2100 \times 0.1}{3 \times 10^{-6} \times 7 \times 10^{-3}}$$

$$\eta = 1 \times 10^{10}\ Nm^{-2}$$

حل شدہ مثال 3

کرہ ہوائی کا دباؤ $10 \times 10^5 Nm^{-2}$ عائد کر کے ایک حجم $10^{-3}m^3$ میں $10^{-6}m^3$ تغیر لایا گیا ہے۔ حجمی معیار معلوم کرو۔

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$10^{-3}m^3 = V_{\text{حجمی}}$$
$$\Delta V = -10^{-6}m^3$$
$$\Delta P = 10 \times 10^5 = 1 \times 10^6\ Nm^{-2}$$

حجمی معیار

$$K = -\left(\frac{\Delta P}{\Delta V}\right) V$$

$$K = \frac{-1 \times 10^6}{-10^{-6}} \times 10^{-3}$$

$$K = 1 \times 10^9\ Nm^{-2}$$

حل شدہ مثال4

پانی کے حجم میں ٪1 کمی کرنے کے لیے درکار دباؤ کی قیمت معلوم کرو۔ پانی کے حجم کا معیار $2x10^9Nm^{-2}$ ہے۔

حل: پانی کے حجم میں ایک فیصد کی کمی

$$-1\% = \frac{\Delta V}{V}$$

$$\frac{-1}{100} = \frac{\Delta V}{V}$$

$$\frac{\Delta V}{V} \times 100 = -1$$

حجم کا معیار

$$K = -\left(\frac{\Delta P}{\Delta V}\right) V$$

$$\Delta P = -K\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$$

$$\Delta P = -2 \times 10^9 \times \frac{-1}{100}$$

دباؤ کی قیمت

$$\Delta P = 2 \times 10^7 Nm^{-2}$$

حل شدہ مثال5

ایک 1cm لمبے تانبے کے تار کو تان کر اس کے طول میں 0.1cm اضافہ کیا گیا ہے۔ تب اس تار کا سطحی بگاڑ معلوم کرو۔ تانبے کے لیے پائی سان کی نسبت 0.26 ہے۔

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$L = 1cm$$
$$\Delta L = 0.1cm$$

پائی سان کی نسبت 0.26

$$\sigma = 0.26$$

$$\text{طولی فساد} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{O.1}{1}$$

$$\text{طولی فساد} = 0.1$$

$$\sigma = \frac{\text{سطحی فساد}}{\text{طولی فساد}}$$

طولی فساد x σ = سطحی فساد

$$\text{سطحی فساد} = 0.26 \times O.1$$

$$\text{سطحی فساد} = 0.026$$

حل شدہ مثال6

ایک فولاد کے تار کا قطر 1mm اور طول 1m ہے۔ اسے 10N قوت سے تانا گیا ہے جس سے اس کے طول میں 0.064mm اضافہ ہوتا ہے۔ تب معلوم کرو۔ (i) زور (ii) بگاڑ (iii) ینگ کا معیار لچک۔

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$\text{قطر} D = 1mm$$

$$\text{نصف قطر} r = 0.5mm = 5 \times 10^{-3}m$$

$$L = 1m \quad , F = 10N$$

$$e = 0.0064mm = 0.064 \times 10^{-3}m$$

(i) زور

$$\text{زور} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2}$$

$$\text{زور} = \frac{10}{3.14 \times (0.5 \times 10^{-3})^2}$$

$$\text{زور} = 1.273 \times 10^{7}\ Nm^{-2}$$

(ii) بگاڑ

$$\text{بگاڑ} = \frac{e}{L}$$

$$بگاڑ = \frac{0.064 \times 10^{-3}}{1}$$

$$بگاڑ = 0.064 \times 10^{-3}$$

(iii) ینگ کا معیار لچک

$$ینگ\ معیار = Y = \frac{F/A}{e/L}$$

$$Y = \frac{1.273 \times 10^{7}}{0.064 \times 10^{-3}}$$

$$Y = 2 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$$

حل شدہ مثال 7

ایک فولاد کے تار کا قطر 1mm اور طول 2m کو 2kgwt سے تانا گیا ہے تب معلوم کرو (i) تار کا اضافہ طول (ii) فساد (iii) زور۔ دیا گیا ہے کہ ($g=9.8ms^{-2}, Y = 2 \times 10^{11} Nm^{-2}$)

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

قطر = 1mm؛ radius، $r = \frac{1}{2} mm = \frac{1}{2} \times 10^{-3} m$؛ L=2m

$F=2kg\ wt=2x9.8\ N;\ Y=2x10^{11}\ N\ m^{-2}$،

e=? اضافہ طول $\qquad Y = \frac{F}{\pi r^2}\frac{L}{e}$

$$e = \frac{FL}{\pi r^2 Y} = \frac{2\times9.8\times2}{\pi\left(\frac{1}{2}\times10^{-3}\right)^2\times2\times10^{11}} = 2.495 \times 10^{-4} m = 0.2495 mm.$$

$$فساد = \frac{e}{L} = \frac{2.495 \times 10^{-4}}{2} = 1.248 \times 10^{-4}$$

$$\text{زور} = Y \times \text{فساد} = 2 \times 10^{11} \times \left(\frac{2.495 \times 10^{-4}}{2}\right) = 2.495 \times 10^{7} N\ m^{-2}$$

حل شدہ مثال8

فولادی تار کے سرے سے کتنی کمیت لٹکائی جائے جب کہ اس کا طول 2m قطر 1mm اور اس میں پھیلاؤ 1mm ہو ($Y = 2 \times 10^{11} Nm^{-2}$)

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

قطر=1mm، $\text{نصف قطر} = \frac{1}{2} mm = \frac{1}{2} \times 10^{-3} m$؛ L=2m

F=2kg wt=2x9.8 N; Y=2x10^{11} N m^{-2},

$$Y = \frac{F}{\pi r^2}\frac{L}{e}$$ e=? اضافہ طول

$$\therefore F = \frac{YAe}{L} = Mg \Rightarrow M = \frac{YAe}{Lg} = \frac{Y(\pi r^2)e}{gL}$$

$$M = \frac{2\times10^{11}\times\pi\left(\frac{1}{2}\times10^{-3}\right)^2\times1\times10^{-3}}{9.8\times2} = \frac{\pi\times10^{2}}{9.8\times4} = \frac{100\pi}{39.2} = 8.015 kg.$$

حل شدہ مثال9

ایک مکعب 5cm والے ضلع کی اوپری سطح کو 0.6sec مماسی قوت 0.25N کے ذریعے سے سرکایا گیا ہے۔ تب مادہ کے استواری کا معیار لچک (Rigidity Modulus) معلوم کرو۔

حل:

$$\text{استواری کا معیار}\ \eta = \frac{FL}{Al} = \frac{FL}{L^2 l} = \frac{F}{Ll}$$

L=5.0cm = 5.0x10^{-2}m; l=0.65cm=0.65x10^{-2}m; F=0.25N

$$\eta = \frac{0.25}{5.0\text{x}10^{-2} \times 0.65\text{x}10^{-2}} = \frac{0.25 \times 10^{4}}{3.25} = 769.2 Nm^{-2}$$

14.7 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

- ہک کا کلیہ بیان کرتا ہے کہ تناسبی حد کے اندر کسی جسم پر عمل پزور راست تناسب ہے۔
- لچک کے معیار یا معیار کے تین اقسام ہیں (i) ینگ کے معیار لچک (ii) حجمی معیار لچک (iii) استواری معیار لچک
- کسی مادے کا معیار لچک جسم میں زور اور بگاڑ کی نسبت ہے جو جسم اس کی اکائیوں اور ابعاد زور کے مساوی ہیں۔
- ینگ کے معیار لچک کی حد کے اندر طولی زور اور طولی بگاڑ کی نسبت $Y = \frac{FL}{AE}$ ہے۔
- حجمی معیار لچک کی حد کے اندر حجمی زور اور حجمی بگاڑ کے درمیان نسبت ہے۔ ایسے $K = \left(\frac{\Delta P}{\Delta P}\right) V$ ہے۔
- استواری کے معیار لچک کی حد میں شکلی زور شکلی فساد کی نسبت ہے۔ $\eta = \frac{F}{A\theta}$
- سطحی بگاڑ اور طولی بگاڑ کی نسبت کو پائی سن (σ) کی نسبت کہتے ہیں۔ اس کی کوئی اکائیاں اور ابعاد نہیں ہیں۔

14.8 کلیدی الفاظ(Key Words)

- **غیر لچکی(Plasticity)** : مادے کی وہ خاصیت وہ مادہ اپنی بگڑی ہوئی حالت میں ہی رہ جائے
- **زور(Stress)** : عائد کردہ قوت سے جسامت میں تبدیلی
- **لچک کی حد(Elastic Limit)** : کھینچنے والی قوت کو ہٹا دیا جائے تو تار اپنے اصلی طول پر واپس نہیں آے گا اور تار میں ایک مستقل بگاڑ پیدا ہو جاتا ہے
- **بگاڑ(Strain)** : جسم میں آیا ہوا مجموعی بگاڑ

14.9 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

14.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. استوار جسم(Rigid Body) کا لچک کا معیار کیا ہے؟
2. کیا گیس استواری زور کی مزاحمت کرتے ہیں؟
3. حجمی معیار کی لچک کی اکائی..............ہے۔
4. پائی سان کی نسبت کی نظریاتی حدود لکھو۔
5. استواری معیار کا ابعادی ضابطہ..............ہے۔
6. ینگ کے معیار(Y) اور حجمی معیار(K) میں رشتہ..............ہے۔

7. ینگ کے معیار (Y)اور استواری کے معاری η میں رشتہ..............ہے۔

8. پچکاؤ(Compressibility)سے کیا مراد ہے؟

9. ہوکس کا کلیہ بیان کرو۔

10. ینگ کا معیار لچک کا ضابطہ =..............ہے۔

14.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. لچک کے ہک کے کلیہ کو بیان کرو۔
2. لچک کے معیار کے اقسام بیان کرو۔
3. ینگ کے معیار لچک، حجمی معیار لچک کے درمیان رشتہ واضح کیجیے۔
4. پائی سان کی نسبت پر نوٹ لکھو۔

14.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. ینگ کے معیار لچک، حجمی معیار لچک اور استواری معیار لچک کو بیان کرو اور ان کے درمیان رشتے کو اخذ کیجیے۔
2. (a) لچک کے ہک کے کلیے کو بیان کرو۔ معیار لچک کے اقسام کو بیان کرتے ہوئے ان کے درمیان رشتہ اخذ کیجیے۔
   (b) پائی سان کی نسبت پر نوٹ لکھو۔

14.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات(Solved Answer Type Questions)

1. ایک Copper کے تار کا قطر 1mm ہے اور طول 2m ہے۔ 10N قوت سے تان دیا گیا ہے۔ اگر اس کے طول میں 0.5mm اضافہ ہو تب (i) زور (ii) بگاڑ (iii) تار کا ینگ کا معیار لچک معلوم کرو۔
2. ایک دو مکعب سمر والے ایک جسم کی اوپری سطح کو 0.15cm مماسی قوت 0.3N کے ذریعے سرکایا گیا ہے جب کہ نچلی سطح مستقل ہے۔ تب استواری معیارے لچک معلوم کرو۔
3. ایک دھاتی کرے کا حجم $100cm^3$ پر ہوا کا دباؤ ڈالا گیا ہے۔ جس سے اس کے حجم میں $10^{-8}cm^3$ تغیر پیدا ہوتا ہے اگر کرہ لوہا(Iron) کا بنا ہوا ہے تب اس کا حجمی معیار لچک معلوم کرو۔(کرہ ہوا کا دباؤ $1x10^5Nm^{-2}$)
4. پانی کے حجم میں 2٪ کمی کرنے کے لیے درکار دباؤ کی مقدار معلوم کرو۔ جب کہ پانی کے حجمی معیار لچک $2.2x10^9Nm^{-2}$۔
5. ایک دھاتی تار کا طول 2.5m ہے اور عرضی تراش کا رقبہ $1.5x10^{-6}m^2$ کو 2mm تانا گیا ہے ۔ اگر ینگ کا معیار لچک $1.25x10^{11}Nm^{-2}$ ہے۔ تب تار میں تناؤ معلوم کرو۔

14.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. College Physics by Sears.F.W.& Zemansky.M.W. Wesley Publishing Co.Inc.London
2. Deformation and Integrity of Materials,Volume-1: Fundamentals and Elasticity by De with Gijsbertus (2006), Structure
3. Elasticity Theory, Applications and Numerics by Sadd. Martin H. (2005). Oxford. Elsevies
4. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta Dhanpat Rai Publications
5. Mechanics by Mathur .D.S,S.Chand Publication
6. Physics by Zafiratos.C, John wesiey &Sons. Inc. New York
7. Physics Part I by Resnik.R &Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi
8. Physics of Rubber Elasticity Oxford by Treloar, L.R.G (1975), Clarendom Press
9. Technical Physics by Bueche.F ,Harper &Row Publication,New York
10. Unified Physics Vol-I,Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath &Co.Meerut

اکائی 15۔ جمود کا معیار اور استواری کا معیار

(Moment of Inertia and Rigidity Modulus)

اکائی کے اجزا

15.0 تمہید

15.1 مقاصد

15.2 تناؤ تار اور مروڑی تار میں کیا گیا کام

15.2.1 تناؤ تار میں کیا گیا کام

15.2.2 مروڑی تار میں کیا گیا کام

15.3 استوانی پر مروڑی جفتہ

15.4 مروڑی رقاص

15.5 سرل کا طریقہ

15.6 حل شدہ مثالیں

15.7 اکتسابی نتائج

15.8 کلیدی الفاظ

15.9 نمونہ امتحانی سوالات

15.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

15.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

15.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

15.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

15.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

15.0 تمہید(Introduction)

سائنس اور ٹکنالوجی دونوں میں ٹھوس اجسام کی لچک کے خواص کی بہت اہمیت ہے۔ چونکہ مادی اجسام کے میکانی یات کو ان کی لچک کے خواص کی مدد سے بیان کیا جاتا ہے اس لیے انجینئرنگ اور ڈیزائنگ میں ان کی پیمائش اہمیت کی حاصل ہوتی ہے۔ سرل(Searle) نے تجربے سے تار کے مادے کی ینگ کے معیار لچک کی تخمین کی ہے اور ٹارسن رقاص کے ذریعے مروڑی تار کے استواری معیار کو تخمین کیا ہے۔

15.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی میں:

i. تناؤ تار میں اور مروڑی تار میں کام کے ضابطے کو محسوب کیا گیا ہے۔

ii. سرل کے تجربے سے تار کے ینگ کے معیاری لچک کو محسوب کریں گے۔

iii. ٹارسنل رقاص کے ذریعے مروڑی تار کا استواری معیار لچک کو محسوب کریں گے۔

15.2 تناؤ تار اور مروڑی تار میں کیا گیا کام (Work Done in Stretching and Twisting a Wire)

15.2.1 تناؤ تار میں کیا گیا کام(Work Done in Streching Wire)

فرض کرو کہ ایک پتلا ہموار تار جس کا طبعی طول 'L' اور عرضی تراش کا رقبہ 'A' ہے۔ تار کے ایک سرے کو مستقل رکھ کر دوسرے سرے پر بیرونی قوت عائد کی جائے تب تار میں تناؤ ہوگا۔ یہ بیرونی قوت ہمیشہ اس تار کے تناؤ کے مساوی ہوگی اور اسراع(Accelaration)صفر ہوگا۔

اندرونی لچک کی قوت 'f' اور تار میں اضافہ 'x' ہو تو ینگ کا معیار لچک Y

$$Y = \frac{\text{(Stress)زور}}{\text{(Strain)بگاڑ}}$$

$$Y = \frac{f/A}{x/L} \qquad (15.1)$$

$$Y = \frac{fL}{Ax} \qquad (15.2)$$

$$f = \frac{YAx}{L} \qquad (15.3)$$

تناسبی حد کے اندر طول میں اضافہ ہو جائے تب دو قوتیں راست تناسب ہوں گی۔ بیرونی قوت 'f' عائد کی جائے تب تار میں تناؤ 'dx' ہو گا۔

تار میں ہوا کام

$$dw = fdx \qquad (15.4)$$

مساوات (15.3) اور (15.4) سے

$$dw = \frac{YAx}{L}dx \qquad (15.5)$$

'L' تار میں کل کام کے لیے x=o , x=l حد کے اندر مجموعی اظہار (Integrating Expression) ہو گا۔

$$\int dw = \int_o^l \frac{YAx}{L}dx \qquad (15.6)$$

$$W = \frac{YA}{L}\int_o^l xdx \qquad (15.7)$$

$$W = \frac{YA}{L}\int_o^l xdx \qquad (15.8)$$

$$W = \frac{YA}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_o^l \qquad (15.9)$$

$$W = \frac{YA}{L}\left[\frac{l^2}{2} - \frac{o^2}{2}\right] \qquad (15.10)$$

$$W = \frac{YA}{L}\frac{l^2}{2} \qquad (15.11)$$

$$W = \frac{YAl}{L}\frac{l}{2} \qquad (15.12)$$

مساوات(15.3) سے

$$f = \frac{YAx}{L} \qquad (15.13)$$

تار میں کل تناؤ ہو تب x=1اور f=mg

$$mg = \frac{YAl}{L} \qquad (15.14)$$

مساوات(15.12)اور(15.14)سے

$$W = mg.\frac{l}{2} \qquad (15.15)$$

$$W = \frac{1}{2}mgl \qquad (15.16)$$

$$W = \frac{1}{2}F.l \qquad (\because F = mg) \qquad (15.17)$$

یہ مساوات ہی تناؤ والے تار میں کام کو ظاہر کرتی ہے۔

15.2.2 مروڑی تار میں کیا گیا کام(Work Done in Twisting Wire)

فرض کرو کہ ایک استوانی(Cylindrical) تار کا طول ’L‘ اور نصف قطر(Radius) ’r‘ ہے۔ تار کے ایک سرے کو مستقل رکھ کر دوسرے سرے پر ٹارک(Torque) لگایا جائے تب تار کی مروڑی زاویہ ’θ‘ ہو گا۔

مروڑی تار میں کیا کل کام توانائی بالقوہ کی شکل میں محفوظ ہو گی۔ یعنی

$$e = c\theta \qquad (15.18)$$

مروڑی تار کا زاویہ 'θ' ہو تب تار میں ہوا کام

$$ed\theta = c\theta d\theta \qquad (15.19)$$

Lمروڑی تار میں کل کام کے لیے x=θ, x=0حد کے اندر تکمیل کیا جائے تب

مروڑی تار میں ہوا کل کام

$$W = \int_o^\theta c\theta d\theta \quad (15.20)$$

$$W = c\int_o^\theta \theta d\theta \quad (15.21)$$

$$W = C\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_o^\theta \quad (15.22)$$

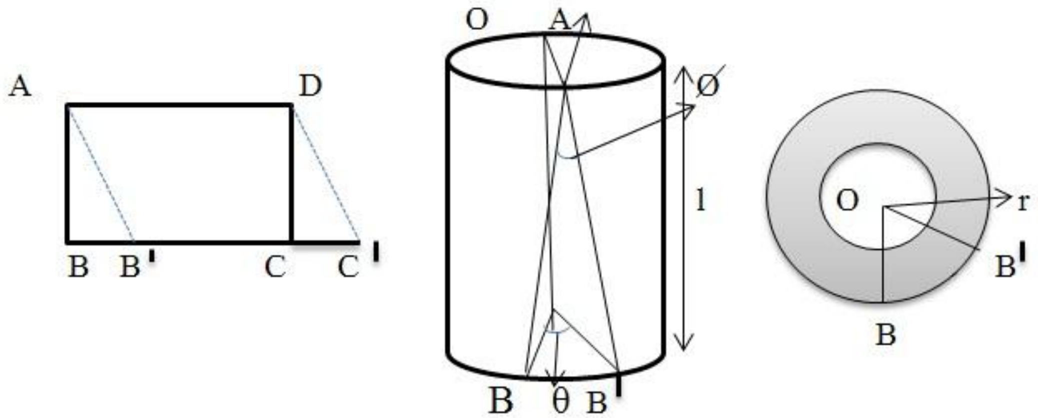
$$W = C\left[\frac{\theta^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] \quad (15.23)$$

$$W = \frac{1}{2}.c\theta^2 \quad (15.24)$$

یہ مساوات(15.24)ہی مروڑی تار میں کام کو ظاہر کرتی ہے۔

15.3 استوانی پر مروڑی جفتہ(Twisting Couple on a Cylindrical)

جزی معیار(ShearingModulus)کی ایک خاص اہمیت ہی مروڑی (Twisting)ہے۔جیسے شکل(15.1)میں استوانی(Cylindrical) مروڑی کے ایک رخہ کا مستطیل (Rectangular) ABCD ہے۔ اس مستطیل پر ایک قوت ٹارک (Torque) عمل کرتی ہے جس کی وجہ سے سطح ABCD بگڑ کر $AB'C'D$ ہو جاتی ہے۔



شکل(15.1)

فرض کرو کہ ایک استوانی سلاخ(Rod)کا طول 'l' اور نصف قطر(Radius) 'r' ہے۔ ایک سرے کو مستقل رکھ کر دوسرا سرا سلاخ کی طول مستوی عمود پر مروڑی جفتہ(Twisting Couple)عائد کیا جائے تب تار میں طولی مروڑی زاویہ 'θ' ہو گا۔ اس سلاخ کے دوسرے سرے پر بحالی مروڑی جفتہ(Twisting Restoring Couple) متضاد(Opposite) کی وجہ سے مساوی ہوں گے۔ اس جفتہ کو معلوم کرنے کے لیے ٹھوس استوانی(Solid Cylindrical) میں بڑی تعداد پر ہم مرکز (Concentric) مہین والڈ(Thin Walled)استوانی بنتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک کھوکھلے استوانی کا نصف قطر 'x' اور ریڈیل موٹائی(Radial Thickness) 'dx' ہے۔ سلاخ کو مروڑنے پر زاویہ 'θ' اور رم(Rim)کا استوانی جزی زاویہ 'θ' ہو گا۔ جیسے شکل میں دکھایا گیاہے۔

$$BB' = l\emptyset \qquad \text{i.e}$$

$$x\theta = l\emptyset \qquad (BB' = x\theta)$$

$$\emptyset = \left(\frac{x}{l}\right)\theta \qquad (15.25)$$

اس مساوات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ 'x' اگر اعظم(Maximum)ہو تو θ اعظم قدر ہو گا اور استوانی کی سب سے باہری حصہ کی بگاڑ اعظم ہو تو اندرونی حصہ اقل طرین(Minimum) ہو گا۔ جزی زور (Shearing Stress) یکساں ہو تب استواری معیار(Rigidity Modulus) N

یعنی

$$N = \frac{\text{جزی زور (Shearing Stress)}}{\text{جزی زاویہ (Shearing angle)}}$$

$$N = \frac{F}{\emptyset}$$

$$F = N\emptyset \qquad (15.26)$$

مساوات(15.17)اور(15.18)سے

$$F = \frac{Nx\theta}{l} \tag{15.27}$$

کھوکھلا استوانی کا رقبہ = $2\pi x dx$

رقبہ کے اوپر کل جزی قوت = $F \times Area$ (رقبہ)

کل جزی قوت = $2\pi x dx . \frac{Nx\theta}{l}$

= $2\pi N \frac{\theta}{l} x^2 dx$

OO' محور (axis) پر معیار حرکت (Momentum) کی قوت

= $2\pi N \frac{\theta}{l} x^2 dx . x$

= $2\pi N \frac{\theta}{l} x^3 dx$

کل مروڑ جفتہ استوانی کے لیے x=0, x=r حد میں مجموعی اظہار (Integration Expression) کو اس طرح لکھا جائے گا۔

$$C = \int_o^r 2\pi N \frac{\theta}{l} x^3 dx \tag{15.28}$$

$$C = \frac{2\pi N\theta}{l} \int_o^r x^3 dx \tag{15.29}$$

$$C = \frac{2\pi N\theta}{l} \left[\frac{x^4}{4}\right]_o^r \tag{15.30}$$

$$C = \frac{2\pi N\theta}{l} \frac{r^4}{4} \tag{15.31}$$

$$C = \frac{\pi N\theta r^4}{2l} \quad (15.32)$$

اگر θ=1 (radian) ریڈین ہو تو مروڑی جفتہ فی اکائی C یعنی۔

$$C = \frac{\pi N r^4}{2} \quad (15.33)$$

اس مروڑی جفتہ فی اکائی تار کو ہی ٹارزینل استواری (Torsional Rigidity) کہلاتی ہے۔

کھوکھلا استوانی کا طول یکساں ہو اور اندرونی نصف قطر 'r' اور بیرونی نصف قطر r_2 ہو تب استوانی مروڑنی جفتہ

$$C = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{2\pi N\theta}{l}\right) x^3 dx \quad (15.34)$$

$$C = \frac{2\pi N\theta}{l}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{r_1}^{r_2} \quad (15.35)$$

$$C = \frac{\pi N\theta}{2l}\left[{r_2}^4 - {r_1}^4\right] \quad (15.36)$$

اگر θ=1 radian ہو تب مروڑنی جفتہ فی اکائی

$$C = \frac{\pi N}{2}\left[{r_2}^4 - {r_1}^4\right] \quad (15.37)$$

15.4 مروڑی رقاص (Torsional Pendulum)

مروڑی رقاص کے ذریعے کسی تار کے مادے کی استواری کا معیار

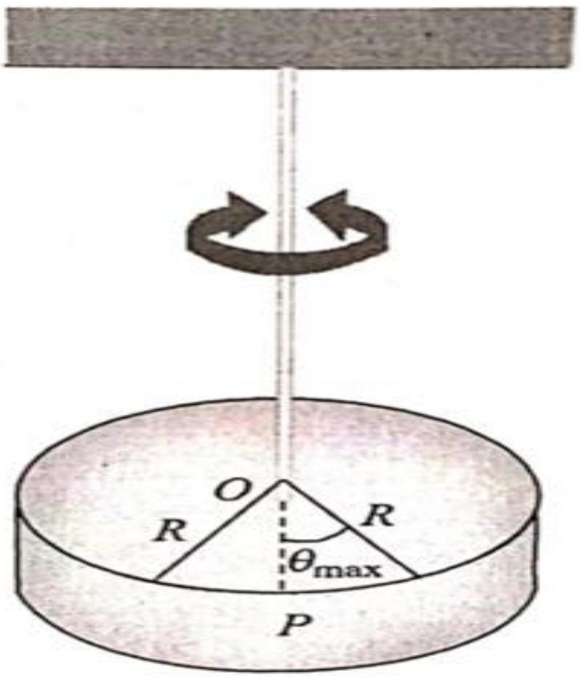
(Regidity Modules of the Material of a Wire by Torsional Pendulum)

اصول (Principle)

ایک انتصابی تار کے نچلے سرے پر قرص (Disc) کو ایک استواری سہارے سے لٹکا دیا جائے اور قرص کو ایک سمت میں موڑ دیا جائے اور پھر دوسرے سرے کو افقی مستوی (Horizontal Plane) کی معکوس سمت کو ہی مروڑی رقاص (Torsional Pendulum) کہا جاتا ہے۔

پہلی مروڑر قاص(Torsion Pendulum) کو1793ء میں رابرٹ لیسلی(Robert Leslie) نے تیار کیا ہے۔

فرض کرو کہ ایک انتصابی تار کے نچلے سرے سے قرص(Disc) کو اس طرح ملحق کیا گیا ہے کہ تار تشاکل قرص کے مرکز کمیت سے گزرتا ہے اور اس کی مستوی کے علی القوائم بھی ہے۔ تار کے اوپری سرے کو ایک استوار سہارے کے ذریعے جکڑ دیا گیا ہے۔



شکل(15.2)

(Source:R.K.Gaur &S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

قرص(Disc) کو اس کی اپنی مستوی میں تار کے گرد ایک ہلکی سی گردش دے کر چھوڑ دیں تو یہ ایک چھوٹے سے زاویے میں افقی مستوی اہتزاز(Oscillation) کرنا شروع کرے گا اسی اہتزاز(Oscillation) کو مروڑی اہتزاز(Torsion Oscillation) کہتے ہیں۔

قرص اور تار کی یہ ترتیب مروڑی رقاص کے طور پر مانی جاتی ہے۔ اس کے یہ مروڑی اہتزاز، سادہ موسیقی نوعیت کے ہوتے ہیں اور ان کا وقت دوران T ہوتا ہے۔

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \qquad (15.38)$$

تعلقی محور کے گرد قرص کے جمود کا معیار اثر(Moment of Inertia) ہے اور 'C' اکائی مروڑ کے لیے درکار جفت ہے اس جفت کی قیمت ہوتی ہے۔

$$C = \frac{\pi \eta r^4}{2l} \qquad (15.39)$$

یہاں پر η: تار کے مادے کے استواری کا معیار

r: اس تار کی تراش عمودی کا نصف قطر

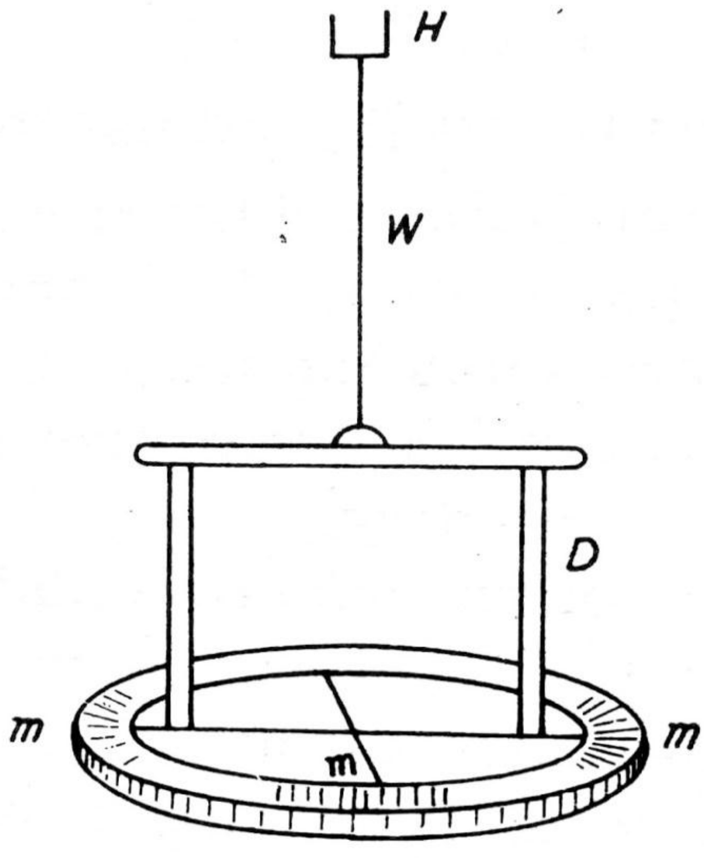
l: مروڑی کا طول

مساواتوں (15.38) اور (15.39) سے تار کے مادے کی استواری معیار ہو گا۔

$$\eta = \frac{8\pi I l}{r^4 T^2} \qquad (15.40)$$

طریقہ عمل (Procedure)

خردہ پیما کو استعمال کرتے ہوئے نمونہ تار کی تراشیں عمودی کا قطر (2r) معلوم کیجیے۔ تار کے طول کے ساتھ مختلف وضعتوں میں قطر کے کم سے کم دس مشاہدات لیجیے اور اوسط قطر محسوب کرے۔



شکل (15.3)

(Source:R.K.Gaur &S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

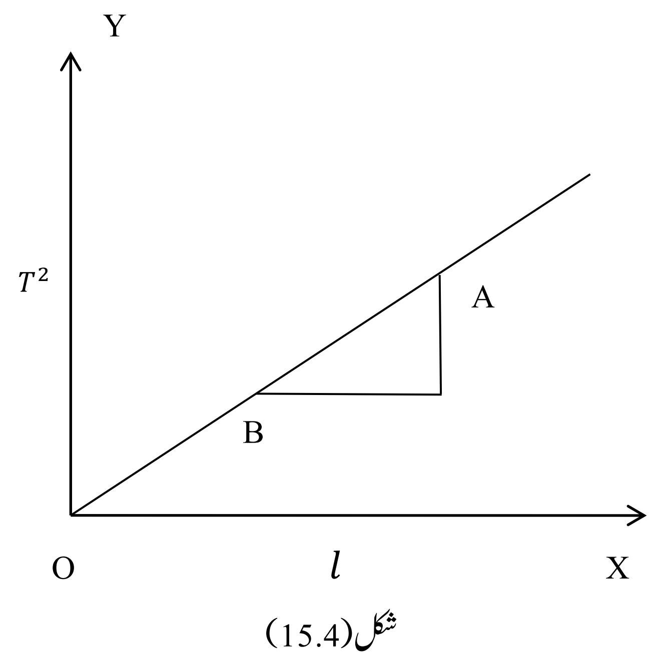
معمولی ترازوں اور معیاری وزان کو استعمال کر کے قرص کی کمیت معلوم کریں۔ دھاگے کو قرص کے گرد لپٹ کر اس کا محیط 2πR معلوکیاجائے ۔ اور قرص کے نصف قطر (R) کو محسوب کیاجائے ۔ اب تعلقی محور کے گرد قرص کے محور کے معیار اثر کو معلوم کیاجاسکتاہیں۔ مدور قرص کے لیے I کی قیمت ہو گی۔

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

شکل(15.3) کے مطابق مروڑی رقاص کو ترتیب دیجیے۔A اور B نقاط درمیان کے طول l کی پیائش کی جائے۔ ایک چھوٹی پن کو موم کے ذریعے قرص کے کنارے کے مقابل عموداً جھوڑ اجائے۔ معمل کی جز پر ایک ایستادہ حوالے کے انتصابی پن کو مروڑی رقاص سے اس طرح رکھاجاتاہے کہ رقاص کی سکونی حالت میں قرص پر جڑی ہوئی چھوٹی پن اس حوالے کی پن پر عین منطبق ہے۔ قرص کو اس کی اپنی مستوی میں ایک چھوٹے زاویہ (Angle) میں گردش دے کر چھوڑ دیں تاکہ نظام میں مروڑی اہتزازی کا آغاز ہو جائے۔20 اہتزازوں (Oscillations) کے لیے درکار وقت 't' معلوم کریں ۔اس طرح تجربے کو دہرایئے اور 't' کی دو آزمائشوں کا اوسط معلوم کیجیے۔ اوسط وقت 'T' کو محسوب کیجیے۔ تار کے طول کو بدل کر l کی تین یازائد قیمتوں کے لیے تجربے کو دہرایئے۔

$\frac{l}{T^2}$ کی اوسط قیمت کے ذریعے η کی قیمت کو محسوب کیاجائے ۔

l کو x– محور اور اس کے متناظر T^2 کو y– محور پر لے کر ایک ترسیم کھینچیے۔ آپ کو ایک خط مستقیم حاصل ہو گا۔ یہ مبدا سے گزرتا ہے۔ خط مستقیم کے ڈھلان کے مقلوب کو محسوب کیجیے۔ ڈھلان کے مقلوب کی مدد سے بھی تار کے مادے کے استواری کا معیار محسوب کر سکتے ہیں اس طرح:



شکل(15.4)

$$\eta = \frac{8\pi I}{r^4}\frac{l}{T^2} Nm^{-2}$$

احتیاطی تدابیر (Precautions)

1. تار کے تراش عمودی کے نصف قطر کی پیائش بہت زیادہ صحت کے ساتھ کرنا چاہیے ۔ مروڑی رقاص کا طول "l" حقیقت میں تار کا طول ہے۔
2. قرص کے اہتزاز (چھوٹے حصے کے ساتھ) اس کی اپنی مستوی میں ہوں۔ کسی اور سمت میں اس کی حرکت نہ ہونے پائے۔

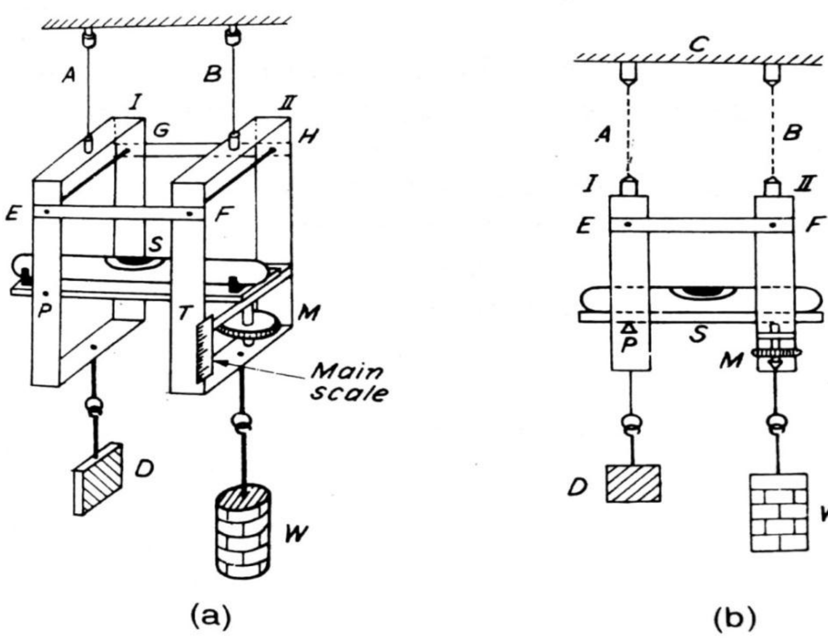
رقاص کا اطلاق (Application of Torisonal)

1. رقاص (Torsional) کو Clock میں استعمال کیا جاتا ہے۔
2. پالیمر (Polymer) کے خصوصیات کو معلوم کرنے کے لیے بھی رقاص (Torsional) کا استعمال کیا جاتا ہے۔
3. رقاس کے مدد سے قوت رگڑ (Frictional Forces) سخت رگڑ اور محلول کے درمیان قوت رگڑ (Frictional Forces) کو معلوم کیا جاسکتا ہے۔

15.5 سرل کا طریقہ (Searle's Method)

سرل کے طریقے سے کسی تار کے مادے کی جمود کا معیار اثر اور استواری کا معیار

(Determination of Rigidity Modulus and Moment of Inertia by Searle's Method)



شکل (15.5)

((Source: R.K.Gaur& S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

سرل کا طریقہ (Searle's Apparatus)

دو ایک ہی مادہ تار A اور B جن کے طول 'l' اور عرضی تراش کا رقبہ 'a' مساوی ہو گا۔ ایک استواری (Rigidity) سہارے سے لٹکا دیا گیا ہے۔ ان کے نچلے سرے پر دو مستع طیلی دھات کا فریم 'F' جیسا کہ شکل (15.5) میں لٹکا یا جاتا ہے۔ ایک تار A کو تجرباتی تار جب کہ دوسرے B کو حوالہ تار کہا جاتا ہے۔ جس میں T تار کی مروڑی اہتزازی حرکتے وقت ہے۔ ایک افق نما (Spirit Level) فریم کے ایک حصہ پر لگا رہتا ہے جس کا دوسرا فریم میں لگئے ہوئے خردہ پیا پیچ نوں پر لٹکا رہتا ہے۔ جو زیر تجربہ تار پر انتصابی پڑی جس پر کہ mm ملی میٹر درجہ بندی کی گئی اور مروڑی تار اہتزازی حرکت کرتا ہے۔

طریقہ عمل (Working)

ایک مناسب سلاخ (Bar) کو تجروباتی تار پر لٹکا یا جائے تا کہ تار میں کسی قسم کا جھول نہ رہے۔ خردپیا کے پیچ کو اس طرح آگے پیچھے کی جانب گھمائیں کہ افق نما میں پایا جانے والا بُلبُلا درمیان میں آجائے۔ اس کے مشاہدوں کو قلم بند کیا جائے۔ دو میٹر (2m) کی درمیانی پر دوربین (Microscope) کی کراس تار کے ذریعے سلاخ (Bar) کے نچلے سروں پر فوکس کیا جائے اور سلاخ کو اس کی اپنی مستوئی میں ایک چھوٹے زاویے میں گردش دے کر چھوڑ دیا جائے تا کہ نظام میں مروڑی اہتزاز کا آغاز ہو جائے۔ 20 اہتزازوں کے لیے درکار وقت t_1 معلوم کیا جائے۔ تجربے کو دھرایا جائے اور 't_2' کی دو آزمائشوں کا اوسط (Average) معلوم کیا جائے۔ وقت دوران T کو محسوب کیا جائے۔ اس تجربے کو 25،30 اہتزازوں کے لیے درکار وقت T معلوم کیا جائے۔

اب حوالہ تار پر سلاخ (Bar) کو لٹکایا جائے۔ سلاخ کو چھوٹے زاویے میں گردش دے کر چھوڑدیا جائے۔ دوربین (Microscope) کی کراس تار (Crosswire) کے ذریعے سلاخ (bar) کے 20, 25 اور 30 اہترازوں کے لیے درکار وقت T معلوم کیا جائے۔

زیر تجربہ تار کا نصف قطر (r) خردہ پیا کی مدد سے تار کے 6 تا 7 مقامات پر پیائش کی جائے میٹری پٹری (Meter Scale) سے زیر تجربہ تار کے طول 'L' کی پیائش کی جائے۔ معمولی ترازو اور معیاری اوزان کو استعمال کر کے سلاخ (Bar) کمیت معلوم کیا جائے اور Vernier scale کے ذریعے سلاخ کا طول معلوم کیا جائے۔

اب تعلقی محور کے جمود کا معیار اثر کی تحسیب کر سکتے ہیں۔ I کی قیمت ہو گی

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

جمود کا معیار اثر (Moment Inertia) I، طول 'L'، قطر (r) اور وقت 'T' جو ترسیم سے حاصل ہو۔

ینگ کے معیار 'Y' (Young Modulus)

$$Y = \frac{8\pi lI}{T_1^2 r^4}$$

استواری کا معیار 'η' (Rigidity Modulus):

$$\eta = \frac{8\pi lI}{T_2^2 r^4}$$

جدول (15.1)

نمبر	اہتزازات	nارتاش کے لیے وقت			nارتاش کے لیے وقت			دوری وقت
		Min	Sec	کل وقت t_1 sec	Min	Sec	کل وقت t_2 sec	T
1	20							
2	25							
3	30							

15.6 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

فولادی تار کے سرے سے کتنی کمیت لٹکائی جائے کہ اس کا طول 4m قطر 2m اور اس میں پھیلاؤ mm1 ہو۔
($F=2Kgwt, Y=2\times10^{11}Nm^{-2}$)

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$D = 2mm \text{ قطر}$$

$$\text{نصف قطر } r = \frac{2}{2}mm = 1\times10^{-3}m$$

$$L = 4m \quad , F = 2Kgwt = 2\times9.8\,N$$

$$Y = 2\times10^{11}Nm^{-2}$$

$$\text{ینگ معیار} = Y = \frac{F/A}{e/L}$$

$$F = \frac{YAe}{L}$$

$$Mg = \frac{Y(\pi r^2)e}{Lg}$$

$$\text{کمیت} \; M = \frac{2 \times 10^{11} \times 3.14(1 \times 10^{-3})^2 \times 1 \times 10^{-3}}{9.8 \times 4} = 16.06kg$$

حل شدہ مثال2

ایک1500N والی مماس قوت ایک جسم جس کے سطح رقبے $2x10^{-6}m^2$ پر عائد کی گئی ہے جس سے اوپری سطح4mm بڑھ جاتی ہے۔ اگر مستقل سطح سے اوپری سطح کا فاصلہ2m ہو تب مادے کا استواری معیارے لچک معلوم کرو۔

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$F = 1500\ N \quad , A = 2 \times 10^{-6} m^2$$
$$L = 2m \quad , l = 4 \times 10^{-3} m$$

استواری معیارے لچک

$$\eta = \frac{FL}{Al}$$

$$\eta = \frac{1500 \times 2}{2 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-3}}$$

$$\eta = 3.75 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$$

حل شدہ مثال3

ایک فولاد کی تختی جس کا رقبہ $4cm^2$ ہے اور موٹائی2.0cm ہے۔ استواری طور پر نچلی سطح مستقل رکھی گئی ہے۔ ایک مماسی قوت 20N اس کے اوپری سطح پر عائد کی گئی ہے۔ اوپری سطح کا نقل مقام نچلی سطح کے مقابلے میں معلوم کرو۔ فولاد کے استواری کی معیاری لچک $8x10^{10}Nm^{-2}$۔

حل: حل میں دی گئی قیمتیں:

$$F = 20\ N \quad , A = 4cm^2 = 4 \times 10^{-4} m^2$$
$$L = 2cm = 2 \times 10^{-2} m \quad , l = \cdots.$$
$$\eta = 8 \times 10^{10}\ Nm^{-2}$$

استواری کی معیارے لچک

$$\eta = \frac{FL}{Al} \Longrightarrow l = \frac{FL}{A\eta}$$

$$l = \frac{20 \times 2 \times 10^{-2}}{4 \times 10^{-4} \times 8 \times 10^{10}}$$

$$l = 0..125 \times 10^{-7} m$$

$$l = 12.5 \times 10^{-9} m$$

حل شدہ مثال4

ایک فولاد کے تار کا قطر2mm اور طول 4m کو 4kgwt سے تانا گیا ہے تب معلوم کرو تار کا اضافہ طول دیا گیا ہے کہ
g=9.8ms^{-2},$Y = 2 \times 10^{11} Nm^{-2}$)

حل: حل میں دے گئے قیمتیں

قطر =1mm؛radius،$r = \frac{2}{2} mm = 1 \times 10^{-3} m$؛L=4m

F=4kg wt=4x9.8 N; Y=2x10^{11} N m^{-2},

$Y = \frac{F}{\pi r^2} \frac{L}{e}$ اضافہ طول e=?

$$e = \frac{FL}{\pi r^2 Y} = \frac{4 \times 9.8 \times 4}{\pi(1 \times 10^{-3})^2 \times 2 \times 10^{11}} = 2.496 \times 10^{-4} m = 0.2496 mm.$$

حل شدہ مثال5

فولادی تار کے سرے سے کتنی کمیت لٹکائی جائے کہ اس کا طول3m قطر2mm اور اس میں پھیلاؤ2mm ہو($Y = 2 \times$
$10^{11} Nm^{-2}$اور F=2kgwt

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

قطر=2mm،نصف قطر $= 1mm = 1 \times 10^{-3} m$؛L=3m

F=2kg wt=2x9.8 N; Y=2x10^{11} N m^{-2},

$Y = \frac{F}{\pi r^2}\frac{L}{e}$ اضافہ طول e=?

$$\therefore F = \frac{YAe}{L} = Mg \Rightarrow M = \frac{YAe}{Lg} = \frac{Y(\pi r^2)e}{gL}$$

$$M = \frac{2 \times 10^{11} \times \pi(1 \times 10^{-3})^2 \times 2 \times 10^{-3}}{9.8 \times 3} = \frac{\pi \times 4 \times 10^2}{9.8 \times 3} = \frac{400\pi}{29.2}$$

$$M = 43.014kg$$

حل شدہ مثال 6

اگر ینگ کا معیار لچک ایک سادہ تار کا $1.2x10^{11} Nm^{-2}$ ہے تب تار کو جس کا طول 1.5m اور عرضی تراش کا رقبہ $2mm^2$ کو 4kg بوجھ جو اس کے نچلے سرے سے لٹکایا گیا ہے، تب تار پر کیا گیا کام معلوم کرو۔

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$Y=1.2x10^{11}\ N\ m^{-2}$; L=1.5m ; $A=2mm^2 = 2x10^{-6}\ m^2$; M= 4 Kg

اضافہ طول x تناؤ قوت $\frac{1}{2}$ = کام W

لیکن $e = \frac{FL}{AY}$

$$w = \frac{1}{2} \times \frac{F^2L}{AY} = \frac{1}{2} \times \frac{(Mg)^2L}{AY} = \frac{1}{2} \times \frac{(4 \times 9.8)^2 \times 1.5}{2 \times 10^{-6} \times 1.2 \times 10^{11}} = 0.0096J$$

15.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- سرل کے تجربے سے تار کے ینگ کا معیار لچک معلوم کیا جاتا ہے۔ جہاں F=mg عائد کردہ قوت F جسم پر لگائی گئی کمیت M ہے۔ تار عرضی تراش کا رقبہ $A = \pi r^2$ ہے۔ ینگ کا معیار لچک $Y = \frac{Mg}{\pi r^2}\left(\frac{L}{e}\right)$ ہے۔ جہاں 'e' اضافی طول ہے جو تار کے ہینگر پر کمیت کے اضافے پر حاصل ہوا ہو۔
- جب ایک تار کو کھینچا جائے تب اس میں سالمات میں اندرونی قوت کی وجہ سے کام ہو گا۔

- ٹارسنل رقاص کے ذریعے مروڑی تار کے استواری کا معیار لچک η معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\eta = \frac{8\pi lI}{T^2 r^4}$$ معایر استواری $= \eta$

15.8 کلیدی الفاظ(Key Words)

- **نقطہ شگفتگی(Yeild Point):** ایک نقطے کے بعد فساد میں زیادہ اضافہ ہو جب کہ بوجھ میں اضافہ نہ کرے۔
- **لچکی حد(Elasticity Limit):** اعظم ترین زور جس پر کہ جسم بگاڑ پیدا کرنے والی قوت کو ہٹانے کے بعد اپنی اصلی حالت پر لوٹ آئے۔
- **لچک کی تھکان(Elastic Fatigue):** تار پر مسلسل زور لگایا جائے یوں تار میں پیدا ہونے والا عارضی نقصان۔

15.9 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

15.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. کس طرح سے سرل کے تجربے میں بگاڑ کو ختم کیا جاسکتا ہے۔
2. فسادی توانائی فی اکائی حجم کو زور 'بگاڑ' ینگ کے معیار لچک میں لکھو۔
3. ینگ کے معیار لچک کی اکائی......................ہے۔
4. استواری معیار لچک کا ابعادی ضابطہ......................ہے۔
5. رقاص(Torsional) کے اطلاق لکھیے۔
6. مروڑی تار میں ہوا کام کا ضابطہ......................ہے۔
7. ٹارزینل استواری سے کیا مراد ہے؟
8. پہلی مروڑی رقاص کو...................... ءمیں رابرٹ لیسلی(Robert Leslie) نے تیار کیا ہے۔
9. مروڑی اہتزاز سے کیا مراد ہے؟
10. سرل کا طریقہ سے...................... معلوم کیا جاتا ہے۔

15.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. تناؤ تار اور مروڑ تار میں کیے گئے کام کی مساوات کو اخذ کیجیے۔
2. استوانی(Cylindrical) پر مروڑی جفتہ کی مساوات اخذ کیجیے۔

15.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. سرل کے طریقہ(Searle's Method)سے کسی مادے(تار)کے ینگ کے معیار لچک کی تخمین کرو۔
2. ٹارسنل رقاص(Torsion Pendulum) کے ذریعے کسی مروڑی تار کے استواری معیار لچک کی تخمین کرنے کے لیے تجربہ طریقے کو بیان کرو۔

15.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات(Solved Answer Type Questions)

1. ایک دھاتی تار کا طول 3m ہے اور عرضی تراش کا رقبہ $1x10^{-6}m^2$ کو 1mm تانا گیا ہے۔ اگر ینگ کا معیار لچک $2x10^{11}Nm^{-2}$ ہے۔ تب تار میں تناؤ معلوم کرو۔
2. 500N والی مماسی قوت عائد کر کے اوپری سطح میں جس کا رقبہ $1mm^2$ کو 0.02m مستقل سطح سے دور ہے۔ تب مستقل سطح پر سے اوپری سطح کتنی دور تک سرکے گی اگر اس کا استواری معیار $0.30x10^{11}Nm^{-2}$ ہے۔
3. لوہا(Iron) کے تار جس کا طول 100cm اور قطر 0.16mm ہے۔ 0.5mm اضافی طول ہونے کے لیے کتنی کمیت اس کے آزاد سرے سے لٹکائی جائے۔(Y Iron= $3.5x10^{11}Nm^{-2}$)

15.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں(Suggested Books for Further Readings)

1. College Physics by Sears.F.W.& Zemansky.M.W. Wesley Publishing Co.Inc.London
2. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta, Dhanpat Rai Publications, Oxford. Elsevies
3. Elasticity Theory Applications and Numerics by Sadd. Martin H
4. Hooke's Law Theory of Elasticity for Scientists and Engineers Boston Mass Atanackovi by Teodorm, Guran, Ardeshir (2000)
5. Physics by Zafiratos.C, John wesiey &Sons. Inc. New York
6. Physics Part I by Resnik.R &Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi
7. Technical Physics by Bueche.F ,Harper &Row Publication,New York
8. Theory of Elasticity by Landau LD,Lipshits.E.m ,3rd Edition

9. ThePhysicsof Rubber Elasticity by Treloar, L.R.G (1975) Oxford, Clarendom Press
10. Unified Physics Vol-I,Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath &Co.Meerut

اکائی 16۔ خصوصی نظریہ اضافیت

(Special Theory of Relativity)

اکائی کے اجزا

16.0 تمہید

16.1 مقاصد

16.2 حوالے کے فریم

16.2.1 جمودی حوالے کا فریم

16.2.2 غیر جمودی حوالے کا فریم

16.3 گیلی لین استحالہ

16.4 مطلق حوالے کے فریم

16.5 خصوصی نظریۂ اضافیت کے مفروضات

16.6 لورینز استحالہ

16.7 حل شدہ مثالیں

16.8 اکتسابی نتائج

16.9 کلیدی الفاظ

16.10 نمونہ امتحانی سوالات

16.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

16.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

16.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

16.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

16.11 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

16.0 تمہید(Introduction)

اس اکائی میں حالت سکون(State of Rest) اور حالت حرکت(State of Motion) کی اضافیت (Relativity)پر گفتگو کی گئی ہے۔

خصوصی نظریۂ اضافیت(Special Theory of Relativity) کی تشریح سے آپ کو اندازہ ہو جائے گا کہ ساکن اور ہموار رفتار سے متحرک اجسام(Rotating Bodies) یا نظاموں(Systems) میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے۔ اسی طرح عمومی نظریۂ اضافیت (General Theory of Relativity) آپ کو ایسے نظام کو سمجھنے میں مددگار ہو گا جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع (Acceleration) کے ساتھ حرکت کرتے ہوں۔ باڈیز کے اسٹیٹ آف ریسٹ(State of Rest)اور اسٹیٹ آف موشن (State of Motion) کے درمیان پائے جانے والے رشتے کو بیان کرنے کی تھیوری کو تھیوری آف ریلیٹی ویٹی(Theory of Relativity) کہا جاتا ہے۔ اس تھیوری کے دو اہم اجزا ہیں۔ اسپیشل اور جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی۔

اسپیشل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی(Special Theory of Relativity) ایسے باڈیز یا نظاموں کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے حالت سکون میں ہوں یا ہموار رفتار سے حرکت کر رہے ہوں۔

جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی اسے اجسام کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع کے ساتھ حرکت کر رہے ہوں۔ اسپیشل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی 'نوٹن کی میکانیات(Mechanics) کی عام شکل ہے جو تیز رفتار حرکت کی صورت میں ناکام ہو جاتی ہے۔

جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی اس میں اس طرح کی تبدیلی لاتا ہے کہ رفتار نور(Velocity of Light)کے قریب تر رفتاروں سے حرکت پر بھی اس کا اطلاق(Application) ممکن ہو جاتا ہے۔ کسی جسم کی حرکت کا بیان اس وقت تک بے معنی ہے جب تک کہ اس کو آرڈینیٹ سسٹم کی وصاحت نہ کی جائے جس میں پیائش کی گئی ہو' حوالے کا فریم' کہلاتا ہے۔

گیلی لین استحالہ میں مقام اور وقت کی حدود کو ایک جمودی حوالے کے فریم سے دوسرے جمودی حوالے کے فریم میں تبدیل کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

خصوصی نظریۂ اضافیت کے مفروضات کے مطابق ایک دوسرے کے لحاظ سے اضافی حرکت کرنے والے دو حوالے کے فریموں کے زماں و مکاں کی حدود کے درمیان پائی جانے والی مساواتیں لوریز استحالہ کہلاتی ہیں۔

16.1 مقاصد(Objectives)

یہ اکائی اضافیت کے نظریے کے تصور کو سمجھاتی ہے۔ اس اکائی میں ہم:

i. حوالے کے فریم، مطلق حوالے کے فریم، کی تعریف کریں گے۔

ii. گیلی لین استحالہ کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

iii. گیلی لین استحالہ کی اہمیت کو سمجھ سکیں گے۔

iv. لورینز استحالہ کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

16.2 حوالے کے فریم (Frame of Reference)

ایک چلتی ہوئی ٹرین میں اچھالا گیا پتھر ٹرین میں بیٹھنے والے شخص کو ایک خط مستقیم (Straight Line) میں حرکت کرتا ہوا دکھائی دیتا ہے جب کہ زمین پر واقع ایک شخص کو پتھر کی حرکت کا راستہ ناقصی (Curved) دکھائی دیتا ہے۔ اسی واقعہ سے یہ بات ثابت ہوتا ہے کہ کسی باڈی کی حرکت کا بیان اس وقت تک بے معنی ہے جب تک کہ اس آرڈینیٹ سسٹم کی وضاحت نہ کی جائے جس میں پیمائش کی گئی ہے وہ کو آرڈینیٹ جس کے لحاظ سے کسی جسم کی حرکت کا اظہار کیا جاتا ہے 'فریم آف ریفرینس کہلاتا ہے۔

16.2.1 جمودی حوالے کا فریم (Inertial Frame of Reference)

حوالے کے ایسے فریم جن میں متحرک اجسام نیوٹن کے کلیات اور میکانیات کے دیگر کلیات کی پابندی کرتے ہیں جمودی حوالے کے فریم کہلاتے ہیں۔ ان فریموں میں ایسے اجسام جو بیرونی قوتوں کے زیر اثر نہ ہوں یا تو حالت سکون میں ہوں یا پھر ہموار رفتار سے متحرک ہوں گے۔

فرض کرو کہ m کمیت کا ایک جسم ایک جمودی حوالے کے فریم میں محدد (x, y, z) سے بیان کیا جاتا ہے۔ اگر اس جسم پر کوئی بیرونی قوت عمل نہ کرتی ہو تو

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0; m\frac{d^2y}{dt^2} = 0; m\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \qquad (16.1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \frac{d^2y}{dt^2} = 0; \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \qquad (16.2)$$

لہٰذا $\frac{dx}{dt} = u_x; \frac{dy}{dt} = u_y$ اور $\frac{dz}{dt} = u_z$ مستقل ہیں جہاں u_x, u_y اور u_z جسم کی رفتار کے بالترتیب $x. y$ اور z اجزاء ہیں۔ اگر یہ اجزا مستقل ہیں تو یقیناً ان کا حل u مستقل ہو گا۔

یعنی جمودی حوالے کے فریم میں بیرونی قوت کی غیر موجودگی میں ایک جسم حالت سکون میں ہو گا $(u = 0)$ ہموار رفتار سے خط مستقیم میں متحرک (مستقل $= u$) ہو گا۔

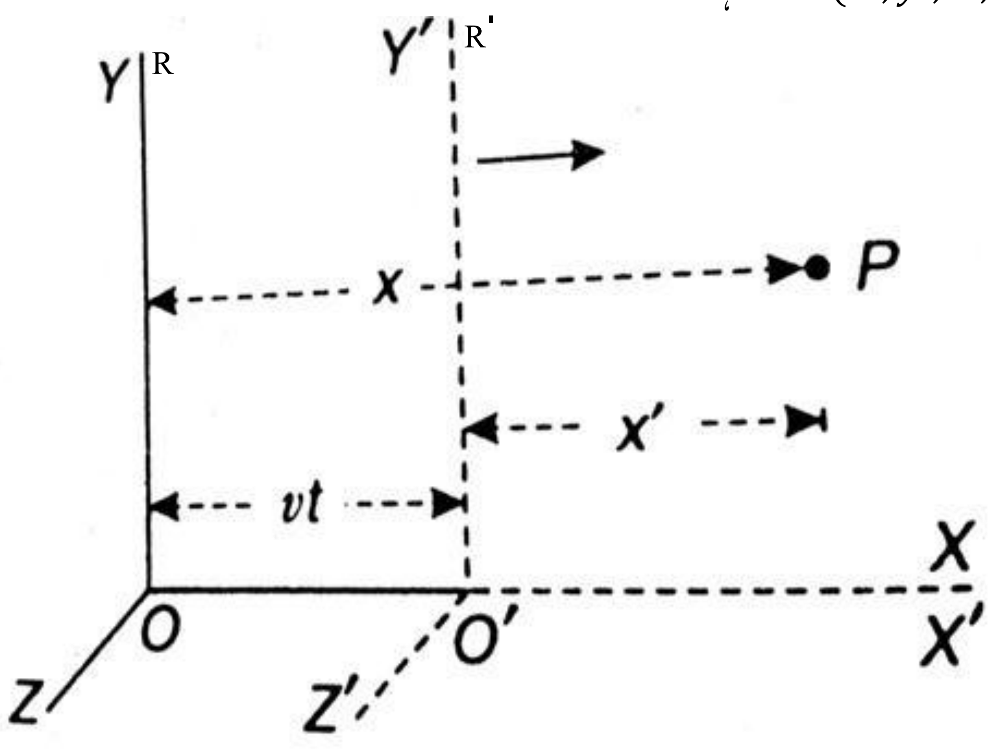
16.2.2 غیر جمودی حوالے کا فریم (Non-Inertial Frame of Reference)

حوالے کا ایسا فریم جس میں ایک جسم بلا کسی بیرونی قوت کے عمل آوری کے اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے' غیر جمودی حوالے کا فریم کہلاتا ہے۔ ایسے کسی حوالے کے فریم میں نیوٹن کے کلیات حرکت کی پابندی نہیں ہوتی۔

16.3 گیلی لین استحالہ (Galilean Transformations)

گیلی لین استحالہ کو مقام اور وقت کے coordinators محدد کو ایک جمودی حوالے (Inertial Reference) کے فریم سے دوسرے انرشیل کے فریم میں تبادلے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

شکل (16.1) کے مطابق فرض کرو کہ R اور R' حوالے کے فریم ہیں جن میں فریم R' فریم R کے لحاظ سے ہموار رفتار "V" سے حرکت کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ ایک نقطہ 'P فریم R میں کو آرڈی نیٹر ہیں x, y, z, t سے ظاہر ہوتا ہے اور فریم R' میں اس کا اظہار کو آرڈی نیٹر (x', y', z', t') سے ہوتا ہے۔



شکل (16.1)

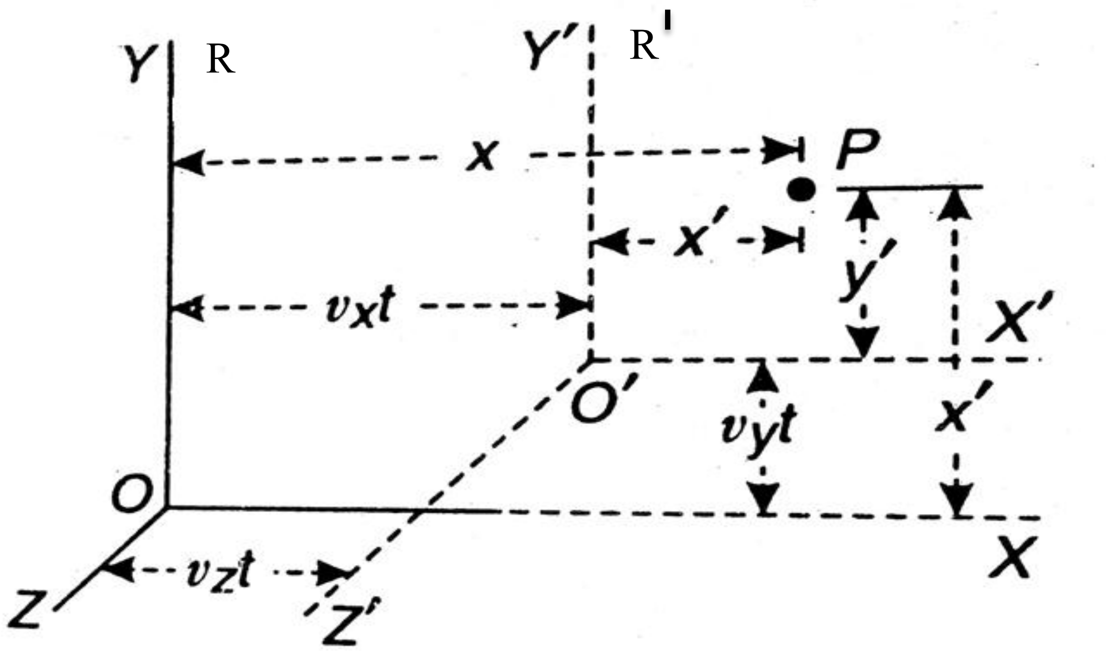
تبادلے کے عمل کو آسان بنانے کے لیے x اور x' محور رفتار v کے متوازی (Parallel) ہیں۔ پیمائش وقت کی ابتدا میں مبدا (Source) o, o' ایک دوسرے پر منطبق (Coincide) رہتے ہیں۔ تب

$t' = 1$ اور $x' = x - vt, y' = y, z' = z,$ (16.3)

اوپر کی مساواتوں کو گیلی لین استحالہ کہا جاتا ہے جن کی مدد سے ایک انٹر نیشنل فریم کی پیائشات (Measurements) کو دوسرے انٹر نیشنل فریم کی پیائشات میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

شکل (16.2) میں فریم R' فریم R کے لحاظ سے تمام محوروں کے متوازی خط مستقیم میں حرکت کرتا ہوا دکھلایا گیا ہے۔ اسی صورت میں فریم R' کی اضافی رفتار بلحاظ فریم R ہو گی۔

$$\vec{V} = iV_x + jV_y + kV_z \quad (16.4)$$



شکل (16.2)

(Source: Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta.Unified Physics Vol–I,Mechanics Jai Prakash Nath &Co.Meerut)

اسی طرح ہمیں حاصل ہو گا

$$x' = x - v_x t; y' = y - v_y t \quad (16.5)$$

$$z' = z - v_z t \,; t' = t \quad (16.6)$$

مساوات (16.5) کو تفریق کرنے سے حاصل ہو گا

$$dx' = dx - V_x dt \,; dy' = dy - V_y dt \quad (16.7)$$

$$dz' = dz - V_z dt \; ; dt' = dt \qquad (16.8)$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V_x \; ; \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} - V_y \; ; \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} - V_z \qquad (16.9)$$

یعنی ان دونوں فریموں میں رفتار میں $U'_x = U_x - V_x \; ; U'_y = U_y - V_y \; ; U'_z = U_z - V_z$

اگر $\vec{a}$ $\vec{U'}$ اور $\vec{K}$ تینوں محوروں کی سمت میں اکائی سمتیے ہوں تب

$$iu'_x + ju'_y + ku_z' = iu_x + ju_y + ku_z - iv_x - jv_y - kv_z$$

$$u' = \vec{u} - \vec{v} \qquad (16.10)$$

مساوات (16.10) رفتار کی گیلی لین استحالہ مساوات ہے۔

اوپر کی مساوات کے تفرق سے اسراع ہو گا جو

چونکہ 'V' مستقل ہے $\frac{du'}{dt} = \frac{du}{dt} = 0$ یعنی $a' = a$

اس کا مطلب یہ ہوا کہ ایک دوسرے کے لحاظ سے مستقل رفتار V سے متحرک جمودی حوالے کے فریموں میں ذرات کا اسراع یکساں ہوتا ہے۔

نیوٹن کے دوسرے کلیے کے مطابق $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$

گیلی لین حوالے کے فریم میں $\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$

اس لیے $\therefore \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$

چونکہ $m' = m$ ہے

فریم R میں $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$

فریم R' میں $F' = m'\frac{d^2x'}{dt^2}$

یعنی $F' = F$

اس کا مطلب یہ ہوا کہ گیلی لین استحالہ میں نیوٹن کے کلیات غیر متبدلہ ہوتے ہیں۔ اگر m_1اور m_2 دو ذرات کی کمیت ہوں تو فریم R میں کلیہ بقائے معیار حرکت کے مطابق

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \qquad (16.11)$$

فریم R'میں

$$u'_1 = u_1 - v \; ; u'_2 = u_2 - v$$

$$v'_1 = v_1 - v \; ; v'_2 = v_2 - v$$

مساوات(16.11)میں درج کرنے پر

$$m_1(u'_1 + v) + m_2(u'_2 + v) = m_1(v'_1 + v) + m_2(v'_2 + v)$$

$$m_1u'_1 + m_1v + m_2u'_2 + m_2v = m_1v'_1 + m_1v + m_2v'_2 + m_2v \qquad (16.12)$$

یا

$$m_1u'_1 + m_2u'_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ کلیہ بقائے معیار حرکت گیلی لین استعمالہ میں غیر متبدل رہتا ہے۔

16.4 مطلق حوالے کے فریم(Absolute Frame of Reference)

موجی حرکت کے لیے واسطہ لازمی ہے اور نور جیسے ہائجن نے موجی حرکت کو قرار دیا تھا۔ اس حقیقت کی توضیح کے لیے ہائجن نے ایتھر کا نظریہ دیا جو تمام خلا میں پھیلی ہوئی ہے۔ ایتھر کے بارے میں اس نے فرض کیا کہ وہ شفاف 'بے وزن' انتہائی لچک دار اور اقل ترین کثافت کا واسطہ ہے جو مطلق حالت سکون میں پایا جاتا ہے۔ اس نے یہاں تک فرض کر لیا تھا کہ ایتھر کا وہ حصہ جو متحرک اجسام کے اندر موجود ہوتا ہے حالت سکون میں رہتا ہے۔ اس نظریے کے فروغ کے ساتھ ہی ایک ایسے حوالے کے فریم کے وجود کو تسلیم کیا گیا جو مطلق سکون میں ہے۔ اسے ہم ایک مطلق حوالے کا فریم قرار دے سکتے ہیں جس کے لحاظ سے تمام متحرک اجسا کی حرکت کا مطالعہ کیا جاسکتا ہے۔

اس تصور کے ساتھ اگر رفتار نور کی پیائش ایک جمودی حوالے کے فریم میں کی جائے جو مطلق حوالے کے ساتھ اضافی رفتار 'V' سے حرکت کر رہا ہو تو نور کی رفتار متحرک جمودی فریم میں C+V یا C−V حاصل ہوگی لیکن مائیکلس اور مورلے نے انہی خطوط پر اپنے تجربات سے یہ ثابت کیا کہ رفتار نور میں ایسی کوئی تبدیلی نہیں دیکھی جاسکتی۔ اسی بنا پر یہ نتیجہ اخذ کیا گیا کہ کوئی مطلق حوالے کا فریم اسی کائنات میں نہیں پایا جاتا اور تمام حرکتیں اضافی ہی ہیں۔

16.5 خصوصی نظریہ اضافیت کے مفروضات (Postulate of Special Theory Relativity)

آئن اسٹائن نے اپنے خیالات کو خصوصی نظریہ اضافیت (Special Theory of Relativity) کی شکل میں پیش کیا جس کی بنیاد دو مفروضات پر ہے۔

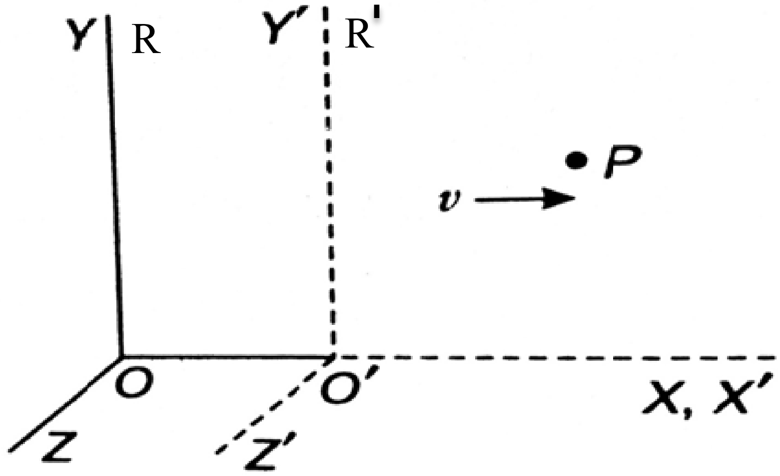
1. کلیات طبیعیات تمام جمودی فریموں میں یکساں ہیں۔
2. خلا میں نور کی رفتار تمام جمودی فریموں میں مستقل ہوتی ہے اور یہ اس کائنات کی اعظم ترین قابل حصول رفتار ہے۔

پہلے مفروضے کے اصول مساوات (Principle of Equivalence) کے طور پر تسلیم کیا گیا ہے جس کے مطابق تمام طبیعیاتی عمل جو چند بنیادی مساواتوں کی شکل میں ظاہر کیے جاتے ہیں' تمام جمودی فریموں میں نافظ (Apply) ہوں گے۔

دوسرے مفروضے کی بنیاد پر رفتار نور کی تمام کائنات میں بلالحاظ مبدا اور شاہد مستقل مانا گیا ہے جو اس کائنات میں قابل حصول اعظم ترین رفتار ہے۔

ان مفروضات کی روشنی میں مختلف جمودی حوالے کے فریموں کے مشاہدات کے تبدل کی مساواتیں اخذ کی گئی ہیں جنہیں لورینز استحالہ کہا جاتا ہے۔

16.6 لورینز استحالہ (Lorentz Transformation)



شکل (16.3)

(Source: Dr.S.L.Gupta &Sanjeev Gupta.Unified Physics Vol-I, Mechanics Jai Prakash Nath & Co.Meerut)

خصوصی نظریہ اضافیت کے مفروضات کے مطابق ایک دوسرے کے لحاظ سے اضافی حرکت کرنے والے دو حوالے کے فریموں کے زماں و مکان کے محددوں کے درمیان پائی جانے والی مساواتیں لورینز استحالہ کہلاتی ہیں۔

مطابق شکل (16.3) فرض کرو کہ دو حوالے کے فریموں R اور R' کے مبدا O اور O' پر دو شاہد واقع ہیں۔ فریم R ساکن ہے

جس کے لحاظ سے فریم R' محور X کے متوازی ہموار رفتار 'V سے حرکت کر رہا ہے۔ دونوں شاہد اپنے ساتھ ایک میٹری سلاخ اور گھڑی رکھتے ہیں جو ایک دوسرے سے مماثلت (Synchronous) رکھتے ہیں۔ نقطہ P پر وقوع پذیر ایک واقعہ (Event) کے محدد مبدا O کے لحاظ سے (x, y, z, t) اور o' کے لحاظ سے (x', y', z', t') ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{رفتار کی نور} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}}$$

یعنی

$$C = \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{t}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \qquad (16.13)$$

اگر شاہد فریم R' سے مشاہدہ کریں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

چونکہ C (مستقل ہے)

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \qquad (16.14)$$

اور آگے $y = y'$ اور $z = z'$ (16.15)

مساوات (16.13) اور (16.14) کو مساوات (16.15) میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 \qquad (16.16)$$

مگر x اور t محدد کی قیمتیں x' اور t' پر منحصر ہوں گی اس انحصار کو سادہ تناسب مساواتوں کی شکل میں ظاہر کیا جائے تو لورینز استحالہ کے لیے

$$x' = k(x - vt) \qquad (16.17)$$

جہاں k ایک مستقل ہے اور وہ x اور t پر منحصر ہیں۔

اگر ہم مان لیں کہ فریم R متحرک ہے بہ لحاظ فریم R' جس کی رفتار v محور $-x$ کی سمت میں ہے اس لیے

$$x = k(x' + vt') \qquad (16.18)$$

x'کی قدر مساوات(16.17)سے لے کر مساوات(16.18)میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x = k[(x - vt) + vt'] \qquad (16.19)$$

$$\frac{x}{k} = [(x - vt) + vt'] \qquad (16.20)$$

یا

$$\therefore vt' = \frac{x}{t} - k(x - vt)$$

$$t' = \frac{x}{kv} - \frac{k}{v}(x - vt) = \frac{x}{kv} - \frac{kx}{v} + kt \qquad (16.21)$$

$$t' = k\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right] \qquad (16.22)$$

اسی طرح x'کی قدر مساوات(16.17)سے اور t'کی قدر مساوات(16.22)سے لے کر مساوات(16.16)میں درج کرنے سے

$$x^2 - c^2t^2 = k^2(x - vt)^2 - c^2k^2\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right]^2 \qquad (16.23)$$

یعنی

$$x^2 - c^2t^2 - k^2(x - vt)^2 + c^2k^2\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right]^2 = 0 \qquad (16.24)$$

یعنی

$$x^2 - c^2t^2 - k^2\big((x - 2xvt + v^2t^2)\big) + c^2k^2 = 0 \qquad (16.25)$$

$$[t^2 + \frac{x^2}{v^2}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^2 - \frac{2xt}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)] = 0$$

t^2 کے اجزاء کو صفر کے مساوی کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$-c^2 - k^2v^2 + c^2k^2 = 0 \tag{16.26}$$

$$k^2(c^2 - v^2) - c^2 = 0 \tag{16.27}$$

$$k^2(c^2 - v^2) = c^2 \tag{16.28}$$

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{16.29}$$

اس لیے

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{16.30}$$

k کی قدر مساوات (16.30) سے لے کر مساوات (16.17) میں درج کرنے پر ہمیں خلا کے لیے لورینز استحالہ حاصل ہوتا ہے جیسے

$$x' = k(x - vt) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x - vt) \tag{16.31}$$

اسی طرح k کی قدر مساوات (16.30) سے لے کر مساوات (16.22) میں درج کرنے پر ہمیں وقت کے لیے لورینز استحالہ حاصل ہوتا ہے جیسے

$$\therefore k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{16.32}$$

$$\frac{1}{k} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{1}{k^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$ یا

$$\frac{1}{k^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2} \tag{16.33}$$

$$t' = k\left[t - \frac{u}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{c^2 - v^2}{c^2}\right)\right]$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{c^2 - c^2 + v^2}{c^2}\right)\right]$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left[t - \frac{xv^2}{vc^2}\right] = \frac{t - \left(\frac{vx}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{16.34}$$

مساوات(16.31)اور(16.34) لوریںز استحالہ کی مساواتیں کہلاتی ہیں۔

جب V کی قیمتیں رفتار نور سے بہت کم ہوں تو $\frac{v}{c^2}$ اور $\frac{v^2}{c^2}$ کی قیمتیں صفر کے قریب ہو جاتی ہیں۔ لوریںز استحالہ گیلی لین استحالہ میں تبدیل ہو جائیں گے۔

مساواتیں(16.31)اور(16.34) کچھ اس طرح بدل جائیں گی۔

$$x' = x - vt \text{ اور } t' = t \tag{16.35}$$

معکوس لوریںز استحالہ:

فرض کرو کہ فریم R متحرک ہے جس کی رفتار v — بلحاظ فریم R' x — محور کی سمت میں ہے تو پھر لوریںز استحالہ مساواتیں کچھ اس طرح سے رکھ سکتے ہیں۔

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \; ; y = y' ; z = z' \text{ اور } t = \frac{t' + \frac{vx'}{v^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (16.36)$$

مساوات (16.36) کو معکوس لورینز استحالہ کہا جاتا ہے۔

گیلی لین استحالہ	لورینز استحالہ	اِنورس لورینز استحالہ
$x' = x - vt$ $y' = y$ $z' = z$ $t' = t$	$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $y = y'$ $z = z'$ $t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $y = y'$ $z = z'$ $t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

16.7 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

لورینز استحالہ کو استعمال کرتے ہوئے $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ کو ثابت کریں۔

حل:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]}} \quad , y = y' \, , Z = Z'$$

$$t = \frac{t' + \left(\frac{x'v}{c^2}\right)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]}}$$

$$\frac{(x' + vt')^2}{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)} + y'^2 + z'^2 = \frac{c^2\left[t' + \left(\frac{vx'}{c^2}\right)\right]^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$y'^2 + z'^2 = \frac{1}{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\left[c^2t'^2 + \frac{v^2x'^2}{c^2} - x'^2 - v^2t'^2\right]$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\left[\left(c^2t'^2 - x'^2\right)\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]\right] = c^2t'^2 - x'^2$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

حل شدہ مثال2

لوریز استحالہ کو استعمال کرتے ہوئے dxdydz تین جسامتی حجم میں تبدیلی نہیں ہوتے ہیں۔ لیکن چار جسامتی حجم میں تبدیلی ہوتے ہیں۔ ثابت کیجیے۔

حل:

$$dx' = dx\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \qquad , dy' = dy \quad dz' = dz$$

$$dx'dy'dz' = dx\, dy\, dz\, \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \neq dx\, dy\, dz$$

$$dt' = \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$dx'dy'dz'dt' = dx\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\, dy \times dz \times \frac{dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= dx\, dy\, dzdt$$

$$dx'dy'dz'dt' = dx\, dydzdt$$

حل شدہ مثال3

لورینز استحالہ کے تحت متغیرں $E^2 - p^2c^2 = m^2{}_0c^4$ کو ثابت کیجیے۔

حل:

$$E'^2 - P'^2C^2 = E^2 - P^2C^2$$

$$E' = \frac{E - Pv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad P' = \frac{P - E\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E'^2 - P'^2C^2 = \frac{E - Pv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{(P - E\frac{v}{c^2})c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{(E^2 + 2PEv + P^2v^2) - \left(P^2 - \frac{2PEv}{c^2} + \frac{E^2v^2}{c^2}\right)C^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= \frac{(E^2 + 2PEv + P^2v^2) - P^2C^2 + 2PEv - E^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= \frac{E^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - P^2C^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= E^2 - P^2C^2$$

$$\therefore E^2 - P^2C^2 = {m_0}^2C^2$$

16.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- حوالے کے ایسے فریم جن میں متحرک اجسام نیوٹن کے کلیات اور میکانیات کے دیگر کلیات کی پابندی کرتے ہیں جمودی حوالے کے فریم کہلاتے ہیں۔
- حوالے کا ایسا فریم جس میں ایک جسم بلا کسی بیرونی قوت کی عمل آوری کے اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے، غیر جمودی حوالے کا فریم کہلاتا ہے۔
- $F^1 = F$ یعنی گیلی لین استحالہ میں نیوٹن کے کلیات غیر متبدلہ ہوتے ہیں۔
- تبدیل مساوات اس وقت حاصل کیے جاسکتے ہیں جب کہ ایک حوالے کے فریم (Frame of Reference) دوسرے حوالے کے فریم کے لحاظ سے مستقل رفتار v سے حرکت کر رہا ہو۔

16.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **حوالے کے فریم** (Frame of Reference) : وہ کو آرڈی نیٹ سسٹم جس کے لحاظ سے کسی جسم کی حرکت کا اظہار کیا جاتا ہے۔
- **جمودی حوالے کے فریم** (Inertial Frame of Reference) : حوالے کے ایسے فریم جن میں متحرک اجسام نیوٹن کے کلیات اور میکانیات کے دیگر کلیات کی پابندی کرتے ہیں۔
- **غیر جمودی حوالے کا فریم** (Non-Inertial Frame of Reference): حوالے کے ایسے فریم جن میں ایک جسم بلا کسی بیرونی قوت کی عمل آوری کے 'اسراع' کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔
- **نظریہ اضافیت** (Theory of Relativity): اجسام کے حالت سکون اور حالت حرکت کے درمیان پائے جانے والے رشتے کو بیان کرنے کو نظریہ اضافیت کہا جاتا ہے۔
- **خصوصی نظریہ اضافیت** (Special Theory of Relativity): ایسے باجسام یا نظام کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے حالت سکون میں ہوں یا ہموار رفتار سے حرکت کر رہے ہوں۔
- **عمومی نظریہ اضافیت** (General Theory of Relativity): ایسے اجسام یا نظام کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع کے ساتھ حرکت کر رہے ہوں۔
- **گیلی لین استحالہ** (Galilean Transformation): ان کی مدد سے ایک انرشیل فریم کی پیمائشات کو دوسرے انرشیل فریم کی پیمائشات میں تبدیل کیا جاتا ہے۔
- **لورینز استحالہ** (Lorentz Transformations): ایک دوسرے کے لحاظ سے اضافی حرکت کرنے والے دو حوالے کے فریموں کے زماں و مکاں کے محددوں کے درمیان پائی جانے والی مساواتیں۔

16.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

16.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. فریم آف ریفرینس سے کیا مراد ہے؟
2. .... سائنسداں نے اپنے خیال کو خصوصی نظریہ اضافیت (Special theory of Relativity) کی شکل میں پیش کیا۔
3. گیلی لین استحالہ کو.............. اور.............. کے ایک جمودی حوالے کے فریم سے دوسرے انرشیل کے فریم میں تبادلے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔
4. مطلق حوالے کے فریم سے کیا مراد ہے؟
5. خلا میں نور کی رفتار تمام جمودی فریموں میں.............. ہوتی ہے۔
6. غیر جمودی حوالے کا فریم کیا مراد ہے؟
7. لورینز استحالہ سے کیا مراد ہے؟
8. جمودی حوالے کا فریم سے کیا مراد ہے؟
9. نظام کے رشتے کا مطالعہ جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع کے ساتھ حرکت کر رہے ہوں وہ نظریہ کو.................. کہتے ہیں۔

16.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. خصوصی نظریہ اضافیت کے بنیادی مفروضات بیان کیجیے۔
2. ثابت کرو کہ گیلی لین استحالہ میں کلیہ بقائے معیار حرکت غیر تبادل ہوتا ہے۔
3. حوالے کے فریم (Frame of Reference) پر ایک نوٹ لکھیے۔

16.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. گیلی لین استحالہ پر تفصیلی بحث کیجیے۔
2. لورینز استحالہ پر تفصیلی بحث کیجیے۔

16.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. کس رفتار سے حرکت کرنے والے نظام میں ایک گھڑی دو گھنٹے یومیہ (روزانہ) سست ہو جائے گی جب کہ وہ ساکن نظام میں صحیح

وقت دکھلاتی ہے۔$(1.199 \times 10^8\ ^{m}/_{sec})$

16.11 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Concept Problems and Solutions in General Physics by Serwary.R.A W.P.Sunders
2. Introduction to special relativity by Ran sick. R of Wiley Eastern Ltd. New Delhi
3. Engineering Physics of Gaur & Gupta of Dhanpat Rai Publications,New Dehli
4. Modern Physics by Murugeshan R. of S. Chand & Co. New Delhi
5. Physics Part– I Resnik.R &Halliday.D by Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi
6. Special Relativity by Shadowitz. A of W.B. Shaunder & Co. London
7. Theory of Relativity by Pauli. W of BI Publications, Bombay
8. Unified Physics Vol–I,Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath & Co.Meerut

اکائی 17۔ لورینز استحالہ

(Lorentz Transformation)

اکائی کے اجزا

17.0 تمہید

17.1 مقاصد

17.2 مدت اتساع

17.3 طولی انقباض

17.4 رفتاروں کی جمع

17.5 کمیت۔توانائی مساوات

17.6 حل شدہ مثالیں

17.7 اکتسابی نتائج

17.8 کلیدی الفاظ

17.9 نمونہ امتحانی سوالات

17.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

17.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

17.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

17.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

17.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

17.0 تمہید (Introduction)

خصوصی نظریہٗ اضافیت (Special Theory of Relativity) کی تشریح سے آپ کو اندازہ ہو جائے گا کہ ساکن اور ہموار رفتار سے متحرک اجسام (Rotating Bodies) یا نظاموں (Systems) میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے۔ اسی طرح عمومی نظریہٗ اضافیت (General Theory of Relativity) آپ کو ایسے نظام کو سمجھنے میں مددگار ہوگا جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع (Acceleration) کے ساتھ حرکت کرتے ہوں۔ باڈیز کے اسٹیٹ آف ریسٹ (State of Rest) اور اسٹیٹ آف موشن (State of Motion) کے درمیان پائے جانے والے رشتے کو بیان کرنے کی تھیوری کو تھیوری آف ریلیٹی ویٹی (Theory of Relativity) کہا جاتا ہے۔ اس تھیوری کے دو اہم اجزا ہیں۔ اسپیشل اور جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی۔

اسپیشل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی (Special Theory of Relativity) ایسے باڈیز یا نظاموں کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے حالت سکون میں ہوں یا ہموار رفتار سے حرکت کر رہے ہوں۔

جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی اسے اجسام کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع کے ساتھ حرکت کر رہے ہوں۔ اسپیشل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی' نوٹن کی میکانیات (Mechanics) کی عام شکل ہے جو تیز رفتار حرکت کی صورت میں ناکام ہو جاتی ہے۔

جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی اس میں اس طرح کی تبدیلی لاتا ہے کہ رفتار نور (Velocity of Light) کے قریب تر رفتاروں سے حرکت پر بھی اس کا اطلاق (Application) ممکن ہو جاتا ہے۔ کسی جسم کی حرکت کا بیان اس وقت تک بے معنی ہے جب تک کہ اس کو آرڈینیٹ سسٹم کی وضاحت نہ کی جائے جس میں پیمائش کی گئی ہو' حوالے کا فریم' کہلاتا ہے۔

1905ء میں آئین اسٹائین نے اضافیت کا نظریہ خاص پیش کیا جس میں اس سے بحث کی جاتی ہے کہ دو مشاہد جو ایک دوسرے سے اضافہ حرکت میں ہیں وہ کس طرح پیمائش کریں۔ اس کے لیے انہیں لورینز استحالہ مساوات کی مدد لینی ہوگی۔ ان تبدیل مساوات میں خاص طور پر تین بنیادی اشیاء یعنی زماں (Time)، مکان (Space) اور کمیت سے بحث کی گئی۔

17.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم لارنژ کی تبدیلی کے ذریعے خاص طور پر تین بنیادی اشیاء پر غور کریں گے۔ یعنی

i. طولی القباض (Length contraction)، مدت اتساع (Time Dialation)، کی تعریف کریں گے۔
ii. رفتاروں کی جمع (Addition of velocity) کے تبدیل مساوات کے اہم نتائج کا مطالعہ کریں گے۔
iii. کمیت توانائی کے درمیان رشتے کو اخذ کریں گے۔

17.2 اتساع مدت (Time Dilation)

فرض کرو کہ دوواقعات (Events) کی وقوع پذیری کے وقت کو فریموں R اور R' کے مبدا O اور O' پر واقع دو شاہد نوٹ کرتے ہیں جب کہ فریم R ساکن اور فریم R' محور X کے متوازی رفتار V سے حرکت کر رہا ہے۔ ان دوواقعات کی درمیانی مدت

فریم R میں $\Delta t = t_2 - t_1$

فریم R' میں $\Delta t' = t'_2 - t'_1$

لارینٹز استحالہ کے مطابق

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; t'_1 = \frac{t_1 - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad (17.1)$$

$$\therefore t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (17.2)$$

چونکہ فریم R کے لحاظ سے دونوں واقعات ایک ہی مقام پر وقوع پذیر ہیں اس لیے $x_2 = x_1$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\Delta t' = t_2 - t_1 \quad \Delta t = t_2 - t_1) \quad (17.3)$$

اس لیے $\Delta t' = \Delta t$ ، $\Delta t^1 = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

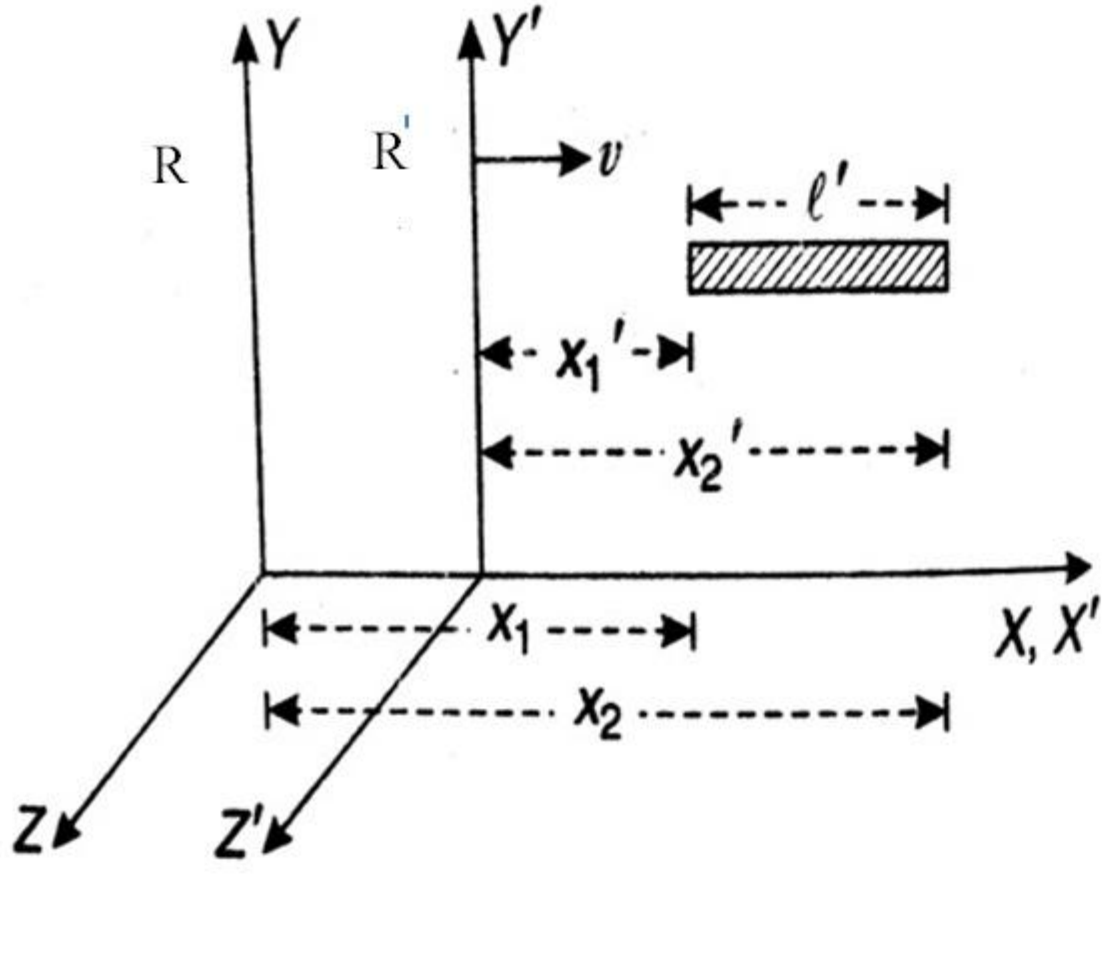
اس نتیجے سے ظاہر ہے کہ فریم R میں دوواقعات کی درمیانی مدت فریم R' کے مقابل کم ہوگی۔ دوسرے الفاظ میں فریم R کی گھڑی فریم R' کی گھڑی سے نسبتاً سست ہوگی جو پہلے فریم کے لحاظ سے حالت حرکت میں ہے۔ اس حقیقت کو اتساع مدت (Time Dilation) کہا جاتا ہے۔

اگر دونوں نظام ایک دوسرے کے لحاظ سے حرکت میں ہوں تو ہر شاہد دوسرے متحرک شاہد کی گھڑی کو سست سمجھے گا۔یعنی اتساع مدت (Reciprocate) ہو گا۔

17.3 طولی انقباض (Length Contraction)

فریم R' میں محور x کے متوازی واقع ایک سلاخ کے کناروں کے محدد اسی فریم میں x'_1 اور x'_2 ہوں تو اس فریم میں سلاخ کا طول

$$l' = x'_2 - x'_1 \qquad (17.4)$$



شکل (17.1)

(Source: Dr.S.L.Gupta & Sanjeev Gupta.Unified Physics Vol-I,Mechanics Jai Prakash Nath &Co.Meerut)

فریم R میں موجود شاہد سلاخ کے کناروں کے محدد اسی وقت t پر x_1 اور x_2 نوٹ کرنا ہو تو اس فریم میں سلاخ کا طول

$$l = x_2 - x_1 \qquad (17.5)$$

لورینز استحالہ کے مطابق

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \text{اور} \; x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (17.6)$$

شاہد کے لحاظ سے رفتار V سے حرکت کرنے والی سلاخ کا طول سمت حرکت میں بقدر جُز $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ کم ہو گا۔ اس حقیقت کو لورینز طول فٹزجیرالڈ انقباض (Length Fitzgerald Contraction) کہا جاتا ہے۔ یہ انقباض بھی (Reciprocal) ہو گا۔ اگر یکساں طول کی دو سلاخیں دونوں فریموں میں علاحدہ واقع ہوں تو ہر شاہد دوسری سلاخ کو اپنی سلاخ سے چھوٹی پائے گا۔

17.4 رفتاروں کی جمع (Addition of Velocities)

لورینز استحالہ ہمیں رفتاروں کی جمع کے لیے قدیم میکنیات سے مختلف ایک اضافیاتی ضابطہ (Relativistic Formula) تک رہنمائی کرتا ہے جسے مندرجہ ذیل طریقے سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ R میں ایک جسم x — محور کے متوازی ہموار رفتار v سے حرکت کر رہا ہے۔ مان لیجیے کہ وہ جسم حرکت کرتے ہوئے dx فاصلہ طے کرتا ہے dt وقت میں' اسی طرح فریم R' میں وہ جسم حرکت کرتے ہوئے dx' فاصلہ طے کرتا ہے۔ dt' وقت میں پھر ہم اس کی رفتاروں کو لکھتے ہیں۔

$$\frac{dx}{dt} = u \quad and \quad \frac{dx'}{dt'} = u' \qquad (17.7)$$

لورینز استحالہ مساواتوں سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = k(x' + vt') \qquad (17.8)$$

$$t = k\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \qquad (17.9)$$

مساوات(17.8)اور(17.9)کی مختلف شکلیں

$$dx = k(dx' + vdt') \qquad (17.10)$$

$$dt = k\left(dt' + \frac{vdx'}{c^2}\right) \qquad (17.11)$$

مساوات(17.10)کو مساوات(17.11)سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k(dx' + vdt')}{k\left(dt' + \frac{vdx'}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} \qquad (17.12)$$

$$\therefore u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'} \qquad (17.13)$$

مساوات(17.13)کو رفتاروں کی جمع کا اضافیاتی قانون کہا جاتا ہے۔اس مساوات میں u کی قیمت حقیقی ہو گی جب کہ u'اور v دونوں کی قیمتیں 'c' سے کم ہوں۔

اگر $u' = c$درج کریں تو

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{vc}{c^2}} = \frac{c + v}{\frac{c+v}{c}} = \frac{v + c}{v + c}.c = c \qquad (17.14)$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ فریم R'سے پیمائش کی گئی جسم کی رفتار u'رفتار نور cکے مساوی ہو گی۔

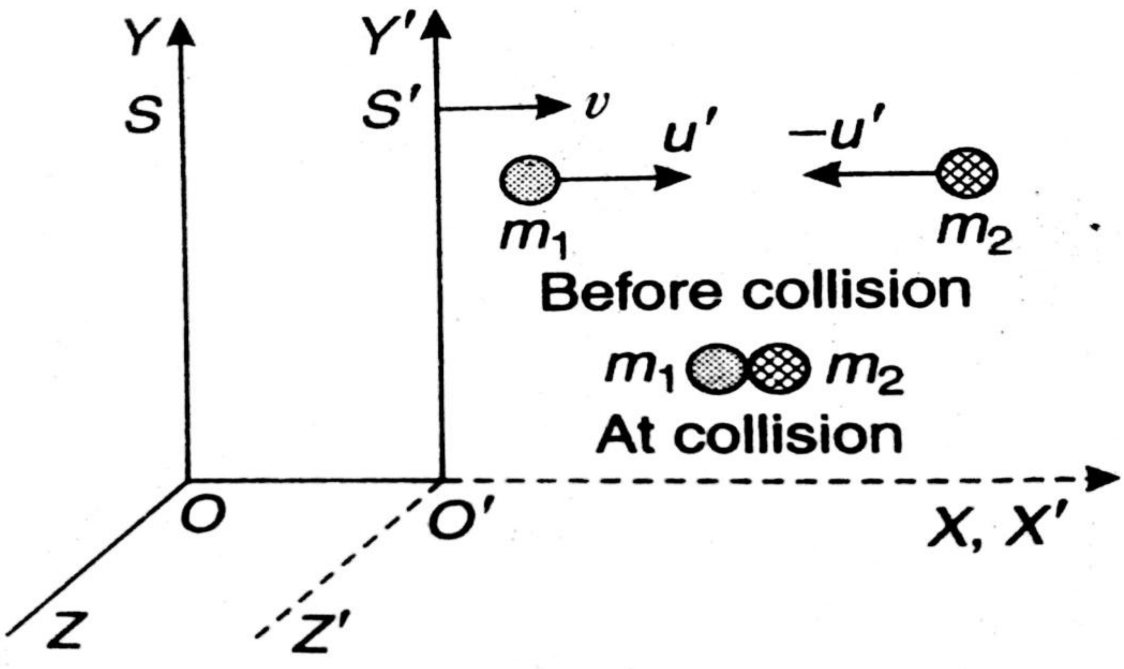
اگر $v = c$درج کریں تو

$$u = \frac{u' + c}{1 + \frac{u'c}{c^2}} = \frac{u' + c}{\frac{c+u'}{c}} = \frac{u' + c}{u' + c}.c = c \qquad (17.15)$$

اس سے ظاہر ہے کہ رفتاروں کی جمع 'c' سے زائد نہیں ہو سکتی۔جس سے ثابت ہوتا ہے کہ رفتار نور حوالے کی فریموں سے مستقل ہے اور کائنات کی اعظم ترین قابل حصول رفتار ہے۔

17.5 کمیت۔توانائی مساوات(Mass-Energy Equation)

طبیعیات(Physics)کے لحاظ سے قوت شرح تبدیلی معیار حرکت(Rate of change of Momentum) ہوتی ہے یعنی



شکل(17.2)

(Source: Dr.S.L.Gupta &Sanjeev Gupta.Unified Physics Vol-I,Mechanics Jai Prakash Nath &Co.Meerut)

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \qquad (17.16)$$

چونکہ ریلیٹی ویٹی(Relativity)کے لحاظ سے کمیت (Mass) ' رفتار(Velocity) 'دونوں متغیر(Variable) ہیں۔اس لیے

$$F = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} \qquad (17.17)$$

فرض کرو کہ فاصلہ dx تک عمل کر کے ایک قوت F جسم کی توانائی بالحرکت میں اضافہ dE کرتی ہے

تو $dE = F.dx$

$$dE = m\frac{dv}{dt}.dx + v\frac{dm}{dt}.dx \qquad (17.18)$$

چونکہ $v = \frac{dx}{dt}$ اس لیے $dE = mvdv + v.v.dm$

$$dE = mvdv + v^2dm \qquad (17.19)$$

کمیت کے تغیر کے اضافیاتی ضابطے کے لحاظ سے جسم کی کمیت mاس کی سکونی کمیت m_0 پر اس طرح انحصار کرتی ہے۔

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad (17.20)$$

اوپر کی مساوات کو مربع کرنے پر

$$m^2 = \frac{m^2{}_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{m^2{}_0 c^2}{c^2 - v^2}$$

$$m^2(c^2 - v^2) = m_0{}^2 c^2 \quad (17.21)$$

$$m^2c^2 - m^2v^2 - m_0{}^2c^2 = 0 \quad (17.22)$$

مساوات(17.22)کے تفرقے سے

$$c^2.2mdm - v^2.2mdm - m^2.2vdv = 0 \quad (17.23)$$

چونکہ 'c' اور m_0 مستقل ہیں اس لیے مساوات(17.20)کو $2m$ سے تقسیم کرنے پر

$$c^2.dm - v^2.dm - m.vdv = 0 \quad (17.24)$$

یا

$$m.v.dv + v^2.dm = c^2dm \quad (17.25)$$

مساوات(17.19)اور(17.25)سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\therefore dE = c^2dm \quad (17.26)$$

جب ایک ساکن جسم کی رفتار کو v تک اسراع دیا جائے تو اس کی کمیت m_0 سے m تک ہو جاتی ہے اور جملہ توانائی بالحرکت اوپر کی مساوات کی تکملہ سے حاصل ہوتی ہے۔

$$\int dE = E = \int_{m_0}^{m} c^2dm = c^2(m - m_0) \quad (17.27)$$

$$\therefore E = (m - m_0)c^2 \quad (17.28)$$

یعنی جسم کی توانائی بالحرکت اس کی کمیت پر اثرانداز ہوتی ہے۔چونکہ متحرک جسم کی جملہ توانائی 'w' اس کی توانائی بالحرکت اور اس میں محفوظ اندرونی توانائی کا مجموعہ ہے۔

$$W = E + m_0c^2 \qquad (17.29)$$

$$W = (m - m_0)c^2 + m_0c^2 = mc^2 \qquad (17.30)$$

$$\therefore W = mc^2 \qquad (17.31)$$

اوپر کی مساوات آئن اسٹائن کی مشہور کمیت توانائی مساوات کہلاتی ہے۔ بعد میں اس مساوات کی تصدیق کئی تجربات سے ہوئی ہے۔

17.6 حل شدہ مثالیں(Solved Examples)

حل شدہ مثال1

اگر ایک ذرے کی جملہ توانائی اس کی سکونی توانائی کی 3 گنا ہو تو اس ذرے کی رفتار معلوم کرو۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $E = mc^2$ جہاں

$$E = 3m_0c^2$$

اس لیے $3m_0c^2 = mc^2$

یا $(m - 3m_0)c^2 = 0$

چونکہ $c \neq 0$ اس لیے $m - 3m_o = 0$

لیکن کمیت اور رفتار میں رشتے کو ظاہر کرسکتے ہیں

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3m_0$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{3}} \text{ or}$$

$$1-\frac{1}{9}=\frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{8}{9}=\frac{v^2}{c^2}$$

$$v=\sqrt{\frac{8}{9}}\,c=\frac{\sqrt{8}}{3}\,c=\frac{2.828}{3}\times 3\times 10^{10}$$

$$v=2.828\times 10^{10}\,{}^{cm}/_{sec}$$

حل شدہ مثال2

ایک الکٹران کی کمیت اور رفتار معلوم کریں جب کہ اس کی توانائی بالحرکت 1.5MeV ہے۔ الکٹران کی سکونی کمیت $9.11\times 10^{-31}kg$: نور کی رفتار= $3\times 10^8\,{}^{m}/_{sec}$

حل: ہم جانتے ہیں کہ

$$E=1.5MeV=1.5\times 10^6\times 1.6\times 10^{-19}$$
$$m_0=9.11\times 10^{-31}kg^2$$

توانائی بالحرکت

$$K.E=(m-m_0)c^2$$

$$\therefore (1.5\times 10^6)\times(1.6\times 10^{-19})=(m-9.11\times 10^{-31})(3\times 10^8)^2$$

اس کے حل پر ہمیں کمیت حاصل ہو گی

$$\mathrm{m}=\frac{9.1\times 10^{-31}}{0.141}=64.5\times 10^{-31}\mathrm{kg}(\because \mathrm{mc}^2=\mathrm{E})$$

$$m=35.8\times 10^{-31}kg$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad or \quad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0}{m}$$ لیکن

$$\therefore 1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2$$

$$v^2 = \left[1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right] \times c^2$$

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = 3\times 10^8\sqrt{1-\left(\frac{9.11\times 10^{-31}}{35.8\times 10^{-31}}\right)^2}$$

$$v = 2.9\times 10^8\ {}^{m}/_{sec}$$

حل شدہ مثال3

ثابت کریں کہ اگر ایک ذرے کی رفتار کی وجہ سے اس کی کمیت میں تغیر ہو تو اس ذرے کی توانائی بالحرکت $k = m_0c^2\left\{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-1\right\}$ ہو گی۔ جہاں 'c' نور کی رفتار ہے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $k = c^2(m-m_0)$

جہاں $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$k = c^2\left[\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0\right] = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right]$$

$$k = m_0c^2\left\{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{-1}{2}} - 1\right\}$$

حل شدہ مثال4

ایک الکٹران جس کی سکونی کمیت 9.1×10^{-31}kg ہے'اگر وہ $0.99c$ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہو تو اس کی جملہ توانائی معلوم کریں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ جہاں $m_0 = 9.1 \times 10^{-31}$kg

$$c = 3 \times 10^8 \, m/_{sec}$$
$$v = 0.99c$$

$$= \frac{9.1 \times 10^{-31}\text{kg}}{\sqrt{1 - \frac{(0.99c)^2}{c^2}}} = \frac{9.1 \times 10^{-31}}{\sqrt{1 - \frac{0.99c^2}{c^2}}} = \frac{9.1 \times 10^{-31}}{\sqrt{1 - 0.99}}$$

$$m = \frac{9.1 \times 10^{-31} - 31}{0.141} = 64.5 \times 10^{-31}\text{kg} (\because mc^2 = E)$$
$$m = 64.5 \times 10^{-31}\text{kg}$$

17.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- جب کوئی جسم ایسی رفتار سے حرکت کرتا ہے کہ اس کی رفتار، نور کی رفتار سے قریب تر ہو تو اضافیت کے اثرات مثلاً تحدید مکان، کشید گی زمان اور اضافہ کمیت وغیرہ واقع ہوتے ہیں۔
- ایک محترک گھڑی ایک مشاہد کو جو حالت سکون میں ہے رفتار میں کم ہوتی نظر آتی ہے یعنی کسی واقعہ (Event) کے وقفے میں ایک مشاہد کے لیے جو حالت سکون میں ہے اضافہ ہوتا ہے جس کو کشیدگی زماں کہتے ہیں۔

جس کی مساوات $\Delta t^1 = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

- ایک جسم جس کا طول 'l' ہے اور جو v رفتار سے حرکت کر رہا ہو تو ایک مشاہد کو جو حالت سکون میں ہے یہ طول سکڑا ہوا نظر آئے گا۔

جس کی مساوات $l^1 = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

- رفتار میں اضافے سے ایک جسم کی کمیت 'm' میں اضافہ ہوتا ہے۔

جس کی مساوات $$m = \frac{mo}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- کمیت اور توانائی کو ایک دوسرے میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ کمیت توانائی کی مساوات جسے آئن اسٹائن نے اخذ کیا نظریہ اضافیت کا اہم کارنامہ یہ ہے جس کی مساوات $W = mc^2$ ہے۔

17.8 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **توانائی کمیت سکونی (Rest Mass Energy)**: ایک ذرے کی توانائی جب کہ وہ حالت سکون میں ہو۔
- **کمیت سکونی (Rest Mass)**: جسم کی وہ کمیت جس کی پیمائش اسے سسٹم میں کی گئی ہو جب کہ وہ حالت سکون میں ہو۔
- **حوالے کے فریم (Frame of Reference)**: وہ کو آرڈی نیٹ سسٹم جس کے لحاظ سے کسی جسم کی حرکت کا اظہار کیا جاتا ہے۔
- **جمودی حوالے کے فریم (Inertial Frame of Reference)** : حوالے کے ایسے فریم جن میں متحرک اجسام نیوٹن کے کلیات اور میکانیات کے دیگر کلیات کی پابندی کرتے ہیں۔
- **غیر جمودی حوالے کا فریم (Non–Inertial Frame of Reference)**: حوالے کے ایسے فریم جن میں ایک جسم بلا کسی بیرونی قوت کی عمل آوری کے 'اسراع' کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔
- **نظریہ اضافیت (Theory of Relativity)**ء: باڈیز کے اسٹیٹ آف ریسٹ اور اسٹیٹ آف موشن کے درمیان پائے جانے والے رشتے کو بیان کرنے کو نظریہ اضافیت کہا جاتا ہے۔
- **خصوصی نظریہ اضافیت (Special Theory of Relativity)** ایسے باڈیز یا نظام کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے حالت سکون میں ہوں یا ہموار رفتار سے حرکت کر رہے ہوں۔
- **عمومی نظریہ اضافی (General Theory of Relativity)** ایسے اجسام یا نظام کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع کے ساتھ حرکت کر رہے ہوں۔
- **استاع مدت (Time Dilation)**: اگر دو نظام ایک دوسرے کے لحاظ سے حرکت میں ہوں تو ہر شاہد دوسرے متحرک شاہد کی گھڑی کو سست سمجھے گا۔
- **طولیانقباض (Length Contraction)**: اگر یکساں طول کی دو سلاخیں دونوں فریموں میں علاحدہ واقع ہوں تو ہر شاہد دوسری سلاخ کو اپنی سلاخ سے چھوٹی پائے گا۔

17.9 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

17.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. رفتار میں سے ایک جسم کی کمیت m میں اضافہ ہو تا ہے جس کی مساوات..............ہے۔

2. کشادگی زماں کی مساوات..............ہے۔

3. طولی القباض(Length Contraction) کی مساوات..............ہے۔

4. گاڑی کا طول 10m ناپتا ہے تو دوسرے شخص کے لحاظ سے اس خلائی گاڑی کا طول معلوم کرو جو کہ بہ لحاظ پہلی گاڑی میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔

a) 6.8m　b) 7.8m　c) 8m　d) 8.8m

5. آئن اسٹائن کی مشہور کمیت توانائی کی مساوات..............ہے۔

6. کس سال میں آئین اسٹائین نے اضافیت کا نظریہ پیش کیا؟

7. اتساع مدت(Time Dilation) سے کیا مراد ہے؟

8. طولیانقباض سے کیا مراد ہے؟

9. غیر جمودی حوالے کا فریم سے کیا مراد ہے؟

10. کمیت سکونی سے کیا مراد ہے؟

17.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. اتساع مدت سے کیا مراد ہے؟ وضاحت کیجیے۔

2. طولی انقباض سے کیا مراد ہے؟ وضاحت کیجیے۔

3. ائن اسٹائن کی کمیت۔توانائی مساوات اخذ کیجیے۔

17.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. خصوصی نظریہ اضافیت کی بناپر اتساع مدت اور طولی انقباض کی وضاحت کیجیے۔

2. نظریہ اضافیت کی بناء پر رفتاروں کی جمع کا اضافیاتی ضابطہ اخذ کیجیے۔

3. آئن اسٹائن کی کمیت ۔ توانائی مساوات اخذ کیجیے۔ اس مساوات کی تجرباتی تصدیق سے قدیم طبیعات کے کن بنیادی اصول پر ضرب پڑتی ہے؟

17.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک ذرے کی رفتار معلوم کرو جب کہ اس کی توانائی بالقوہ اس کے حالت سکون کی توانائی کے برابر ہو۔

(جواب: 0.98c)

2. ایک الکٹران 0.98c کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ اس کی کمیت معلوم کرو۔

(جواب: $1.5x10^{-3}$kg)

3. اس ذرے کی رفتار معلوم کرو جس کی کمیت اس کی سکونی کمیت کی 3 گنا ہو۔

(جواب: 0.943c)

4. کسی رفتار سے حرکت کرنے والے نظام میں ایک گھڑی دو گھنٹے یومیہ (روزانہ) سست ہو جائے گی جب کہ وہ ساکن نظام میں صحیح وقت دکھاتی ہے۔ $(1.199 \times 10^8 \, m/_{sec})$

5. ایک میٹر طول کی خلائی گاڑی ایک ساکن شاہد کے لحاظ سے 0.8c کی رفتار سے حرکت کر رہی ہو تو ساکن شاہد کے لحاظ سے خلائی گاڑی کا طول معلوم کیجیے۔ (1.2 میٹر)

6. جب ایک الکٹران یا پازیٹران سے متصادم ہو کر فنا ہو جاتا ہے تو خارج ہونے والی توانائی کی مقدار محسوب کیجیے۔ الکٹران کی کمیت 9.1×10^{-31}kg ہے۔ (1.01MeV)

7. پروٹان کی سکونی کمیت 1.67×10^{-27}kg ہو تو کس رفتار سے حرکت کرنے پر اس کی کمیت دوگنی ہو جائے گی؟ $(0.86 \times 10^8 \, m/_{sec})$

17.10 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Concept Problems and Solutions in General Physics by Serwary.R.A& W.P.Sunders
2. Engineering Physics of Gaur& Gupta of Dhanpat Rai Publications, New Delhi
3. Introduction to special relativity by Ran sick. R of Wiley Eastern Ltd. New Delhi
4. Modern Physics by Murugeshan R. Of S. Chand & Co. New Delhi
5. Physics Part−I by Resnik.R& Halliday.D, Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi
6. Physics Matter Energy and Univers by Hruwell G.P& Legge.G.J.F. East West Press Pvt.Ltd.New Delhi
7. Technical Physics by Bueche.F, Harper &Row Publication,New York

8. Theory of Relativity by Pauli. W of BI Publications, Bombay
9. Special Relativity by Shadowitz. A of W.B. Shaunder & Co. London
10. Unified Physics Vol-I,Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath &Co.Meerut

Maulana Azad National Urdu University

B.Sc. (MPC/MPCs) I Semester Examination

(Physics)

BSPH101CCT:میکانکس(Mechanics)

Time : 3 hrs — Marks : 70

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارۃ ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1۔ حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہوں پُر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ (10x1=10 Marks)

2۔ حصہ دوم میں 8 سوالات ہیں، اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دو سو(200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبر مختص ہیں۔ (5x6=30 Marks)

3۔ حصہ سوم میں 5 سوالات ہیں۔ ان میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبا پانچ سو(500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ (3x10=30 Marks)

حصہ اول

سوال(1)

(i) ویکٹر $\vec{A} = i - 3j + k$ کی قدر(Magnitude) معلوم کیجیے۔

(ii) ثابت کیجیے کہ $\vec{A} = 2i - 2j + 4k$ اور $\vec{B} = 3i - 11j + 4k$ عمودی(Perpendicular) ویکٹر ہیں۔

(iii) مرکزی کمیت(Centre of Mass) کی تعریف کیجیے۔

(iv) دیے گئے Differential Equation کا (Order) رتبہ ________ ہے۔

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{t} = Esin\omega t$$

(v) Newton کے تجاذبی کلیہ (Law of Gravitation) کو بیان کیجیے۔

(vi) ایک Simple Harmonic Oscillator کے لیے توانائی بالحرکت کی عظیم ترین (Maximum) مقدار ________ $= x$ پر ہوتی ہے۔

(vii) Stress کی اکائی ________ ہے۔

(viii) بقاء معیار حرکت (Conservation of linear momentum) کے کلیہ کو بیان کرو۔

(ix) Galilean Transformation کی خامیوں کو بیان کیجیے۔

(x) اگر زمین اور سورج کے درمیان کی دوری دگنی ہو جائے تو ایک سال میں کتنے دن ہوں گے۔

حصہ دوم

(2) ایک Rigid Body ایکسس (Axis) $\overrightarrow{OR}$ کے اطراف 2rad/sec کی زاویائی رفتار (Angular Velocity) سے گردش کر رہا ہے۔ جہاں 'O' origin اور $\overrightarrow{OR} = 2i - 2j + k$ ہیں۔ Body پر ایک point $3i - 2j - k$ پر رفتار (Velocity) معلوم کرو۔

(3) ایک ذرے کے لیے Centre of Mass Frame of Reference اور Laboratory Frame of Reference میں رفتاروں کے درمیان رشتے کو اخذ کیجیے۔

(4) کام توانائی مسئلہ (Work Energy Theorem) کو بیان کیجیے اور ثابت کیجیے۔

(5) Torque سے کیا مراد ہے اور بقاء زاویائی معیار حرکت کے ضابطہ کو حاصل کیجیے۔

(6) Global Positioning System پر ایک نوٹ لکھیں۔

(7) ثابت کیجیے ایک مرکزی قوت کے تحت گردش کرنے والے جسم کے لیے زاویائی معیاری حرکت (Angular Momentum) اور Areal Velocity مستقل ہوتے ہیں۔

(8) ایک تار کو کھینچنے کے لیے لگنے والی قوت (Work Done) کو حاصل کیجیے۔

(9) Time Dilation پر بحث کیجیے۔

حصہ سوم

(10) ٍVariable Massوالے نظام کے لیے حرکتی مساوات(Equation of Motion)اخذ کیجیے۔

(11) اس Differential Equation $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{x2+y-3}$ کو حل کیجیے۔

(12) ایکSimple Hormonic Oscillatorکے لیے جملہ توانائی کے ضابطہ کو اخذ کیجیے۔

(13) ایکSatelliteکی حرکت پر بحث کیجیے۔

(14) لچک کے مستقلوں(Elastic Constants)کے درمیان رشتہ اخذ کیجیے۔

☆☆☆

BSPH150CCP

لیب مینول

(Lab Manual)

اکائی 18۔ اڑن پہیے کے جمود کا معیار اثر

(Moment of Inertia of a Flywheel)

اکائی کے اجزا

18.0	تمہید	(Introduction)
18.1	مقصد	(Objectives)
18.2	آلات	(Apparatus)
18.2.1	تشریح آلات	(Apparatus Explanation)
18.3	نظریہ	(Theory)
18.4	طریقۂ عمل	(Proccedure)
18.5	مشاہدہ اور تحسیب	(Observation and Analysis)
18.6	احتیاطی تدابیر	(Precaution)
18.7	روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت	(Significance of Experiment in Domestic Life)
18.8	تجربی نتائج	(Experimental Result)
18.9	کلیدی الفاظ	(Key Words)

18.0 تمہید (Introduction)

اس تجربے میں آپ کو اڑن پہیے سے واقف کرایا جائے گا۔ اڑن پہیہ دراصل نسبتاً ایک جسیم پہیہ ہوتا ہے جس کی کمیت زیادہ تر اس کے گکر (Rim) میں مرتکز رہتی ہے۔ اس کے ساتھ ایک لمبا دھرا ہوتا ہے جیسے بیرنگس کے ذریعے سہارا دیا جاتا ہے۔ اس کی وجہ سے پہیہ کسی بھی پوزیشن میں ساکن رہ سکتا ہے۔

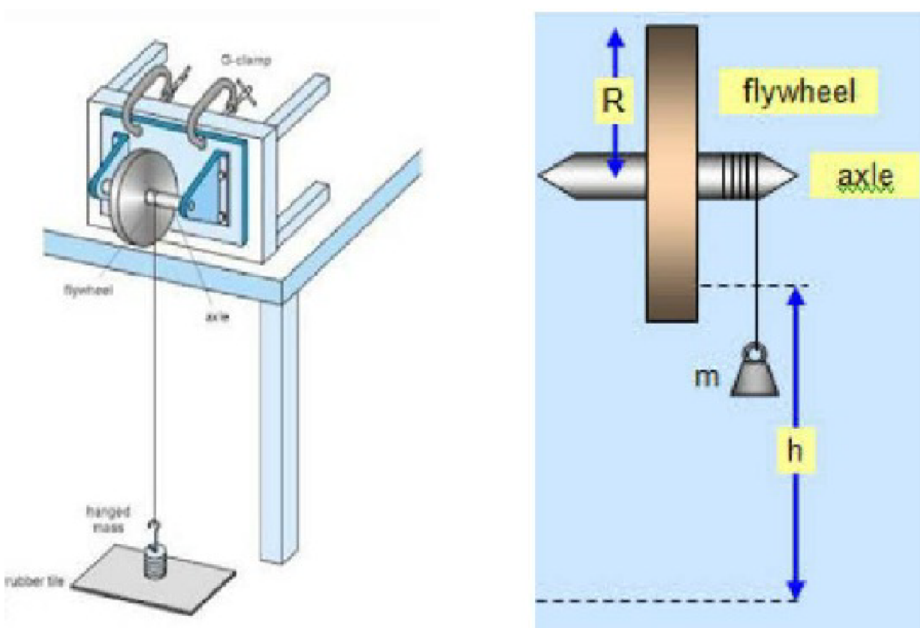
18.1 مقاصد (Objectives)

اس تجربے کا مقصد اُڑن پہیے کی دائرگی حرکت سے جمود کا معیار اثر (گردشی قیمت) کی تخمین کرنا ہے۔

18.2 آلات (Apparatus)

اڑن پہیہ	اسٹاپ واچ	
وزن آویزیہ اور شگاف دار اوزان	میٹر اسکیل	
مضبوط سوتی دھاگا	سرلچاپ	خرد پیما

18.2.1 تشریح آلات (Explanation Apparatus)



شکل (18.1)

اُڑن پہیے کی ترتیب کوشکل (18.1) میں دکھایا گیا ہے۔اس کو اس طرح نصب کیا جاتا ہے کہ اس کا افقی محور بریلٹس BB میں جڑے ہوئے بال بیرنگس میں جما(Fix) رہے۔ بریکٹس کے قاعدے کوایک استوار ومضبوط سہارے سے مربوط کردیا جاتا ہے۔ دھرے پراس سے باہر کی جانب نکلی ہوئی ایک چھوٹی کھونٹی ہوتی ہے۔مضبوط سوتی دھاگے کے ایک سرے سے باندھ دیا جاتا ہےاور دوسرے سرے کوگول حلقے کی شکل کی گرہ دے کرکھونٹی میں پہنادیا جاتا ہے۔اڑن پہیے کوگھمانے سے دھا گا دھرے سے لپیٹیں کھا کرکمیت m کوزمین سےاوپراٹھاتا ہے۔دھاگے کے طول کواس طرح ترتیب دیا جاتا ہے کہ جب کمیت زمین سے تماس میں آتی ہے عین اسی لمحے دھاگے کا گول حلقہ ازخودکھونٹی سے باہرآجاتا ہے۔

18.3 نظریہ (Theory)

دھاگے کے ایک سرے سے کمیت m سے باندھ کراس کو پہیے کے دھرے پر لپیٹ دیا گیا۔کمیت کواس کی حالت سکون سے معلوم فاصلے 'h' تک گرایا گیا۔کمیت جوں جوں نیچے آتی ہے دھاگے کی لپیٹیں کھلتی جاتی ہیں اور پہیے میں اسراعی گردشی حرکت شروع ہوتی ہےاوراس کی زویائی رفتارصفر سے بڑھتے ہوئے اس لمحہ 'w' ہوجاتی ہے جب کہ کمیت عین زمین سے تماس میں آتی ہےاوراس کے ساتھ ہی دھاگا اپنا تعلق دھیرے سے چھوڑ دیتا ہے۔فرض کروکہ کمیت کے زمین کوچھو لینے سے عین قبل پہیے 'n' چکرمکمل کرتا ہے۔گرنے والی کمیت کی توانائی بالقوہ میں نقصان mgh ہوگا جہاں 'g' زمین کا تجاذبی اسراع ہے۔درج ذیل تین طریقوں سےاس توانائی کا استعمال کیا جاتا ہے۔

1۔گرتی ہوئی کمیت کی توانائی بالحرکت میں اضافہ ہوتا جاتا ہےاوراگرکمیت کی رفتار جب کہ وہ فرش کوچھورہی ہو 'v' ہوتوپہیے کی توانائی بالحرکت کے مساوی ہوگی۔

2۔پہیے کی توانائی بالحرکت میں اضافہ ہوتا جاتا ہےاوراس توانائی بالحرکت کی قیمت $\frac{1}{2}I\omega^2$ ہوگی جہاں I پہیے کے گردشی محور کے گرداس کے جمود کا معیار ہے۔

3۔پہیے کی گردشی حرکت کے دوران رگڑ کی مزاحمتی قوت کے خلاف کیا ہوا کام۔فرض کروکہ ایک چکر میں رگڑ کے خلاف ہوا کام ω_f ہے۔فرض کروکہ دھرے سے جدا ہونے سے عین قبل پہیہ n_1 چکرمکمل کرتا ہے۔تب ان n_1 چکروں کے دوران رگڑ کے خلاف کیا ہوا کام $n_1\omega_f$ ہوگا۔
لہٰذااصول بقائے توانائی کے بموجب ہم لکھتے ہیں کہ

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + n_1\omega_f \qquad 18.1$$

فرض کروکہ وزن کے فرش سے تماس میں آنے کے عین بعد سے حالت سکون میں آنے تک اڑن پہیہ اپنی n_2 گردشیں مکمل کرتا ہے۔
اڑن پہیہ چوں کہ حاصل کردہ توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}I\omega^2$ کو اپنی متاثر n_2 گردشوں میں منتشر کرتا ہے۔اس لیے ہم لکھتے ہیں کہ

$$n_2W_f = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad 18.2$$

لہٰذا

$$w_f = \frac{I\omega^2}{2n_2} \qquad 18.2a$$

کمیت اور اس سے ملحق دھاگے کی خطی رفتار جب کہ وہ فرش پر پہنچتی ہے۔ 'V' ہے۔اس رفتار کو زاوئی رفتار سے ملانے والی مساوات ہوگی۔

$$v = r\omega \qquad 18.3$$

جہاں 'r' دھرے کے نصف قطر کو تعبیر کرتا ہے۔

مساواتوں (18.3) اور (a)18.2 کو مساوات 18.1 میں درج کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$mgh = \frac{r^2\omega^2}{2}\left[m + \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)\right] \qquad 18.4$$

کمیت کی اڑن پہیے سے علاحدگی کے بعد پہیے کو اپنی ابتدائی زاوئی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے حالت سکون میں آنے تک فرض کرو کہ 't' سکنڈس کا وقت درکار ہے۔اسی عرصے میں ہم فرض کرسکتے ہیں کہ وہ ایک اوسط زاوئی رفتار $\frac{\omega}{2}$ سے حرکت کرتے ہوئے 'n_2' چکر مکمل کرتا ہے۔تب اس عرصہ 't' میں مجموعی زاویائی $2\pi n_2$ ہوتا ہے (کیوں کہ ایک چکر میں زاوئی گھماؤ کی تعداد 2π ہوتی ہے۔)

لہٰذا تعریف کی رو سے

$$\frac{\omega}{2} = \frac{2\pi n_2}{t}$$

$$\omega = \frac{4\pi n_2}{t} \qquad 18.5$$

مساوات (18.4) سے ہم لکھ سکتے ہیں کہ

$$I = \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2}\right) m\left[\frac{2gh}{\omega^2} - r^2\right] \qquad 18.6$$

18.4 طریق عمل (Procedure)

دھرے پر دھاگے کو لپیٹے ہوئے کمیت 'm' کو زمین سے کسی معلوم بلندی 'h' پر رکھیے۔اس کے بعد کمیت کو آزادانہ طور پر چھوڑ دیجیے۔ کمیت نیچے اترتے ہوئے اپنی رفتار میں اضافے کے ساتھ زمین سے تماس میں آتی ہے۔دھاگے کے طول کو ایسا ترتیب دیتے ہیں کہ جب کمیت زمین تماس میں آتی ہے بالکل اسی لمحے دھاگے کا حلقہ کھونٹی سے علاحدہ ہوجاتا ہے۔کمیت کے زمین کو چھونے سے عین قبل پہیے کے کٹے ہوئے چکروں کی تعداد 'n' کو نوٹ کرلیا جاتا ہے اور یہ دھرے کے اطراف لپٹے ہوئے دھاگے کے چکروں کی تعداد ہوتی ہے جو ہے۔ جب کمیت زمین کو چھوتی ہے تو عین اسی وقت دھاگا کھونٹی سے علاحدہ ہوجاتا ہے اور یہ اپنی حاصل کردہ زاوئی رفتار کی وجہ سے مزید گھومتا رہتا ہے۔اسٹاپ واچ عین اسی لمحے چلائیے جب کہ حلقہ کھونٹی سے باہر نکلے اور جب پہیہ رُک جائے تو گھڑی کو بھی روک دیا جائے اور وقت کے وقفے 't' کو نوٹ کرلیا جائے۔اس وقفے 't' میں پہیے کے لگائے گئے چکروں کی تعداد کو بھی نوٹ کرلیجیے۔کسی ایک ہی بلندی 'h' کے لیے دو یا تین مرتبہ تجربے کو دہرائیے اور 't' کی اوسط قیمتیں معلوم کیجیے۔

سرلچاپ کی مدد سے دھرے کے اس حصے کے مختلف مقامات کے قطروں کی پیائش کی جائے جس پر دھاگا لپٹا ہوا تھا۔قطر کی اوسط قیمت

'd' کو حاصل کیجیے اور پھر اسی سے دھرے کے نصف قطر r کو محسوب کیجیے۔ گرنے والے وزن کی کمیت کو بھی نوٹ کر لیجیے۔
دوسری بلندی 'h' یا دوسری کمیت 'm' کے لیے تجربے کو دھاریئے اور ہر صورت میں اور 't' کو حسب صراحت بالا معلوم کیجیے اور مساوات (18.6) کو استعمال کر کے I کو محسوب کیجیے۔

18.5 مشاہدات اور تحسیب (Observation and Analysis)

دُھرے کے قطر کی اوسط قیمت d= _____m

دُھرے کے تراش عمودی کا اوسط نصف قطر m _______= $\left(r=\frac{d}{2}\right)$ ، گرنے والے وزن کی کمیت Kg _______ = m

جدول 18.1

I	$V=rw$ m/sec	$\omega=\frac{4\pi n_2}{t}$ rad/sec	وقت t sec			چکروں کی تعداد n_2			n_1	h in m	سلسلہ نشان
			اوسط t	آزمائش 2	آزمائش 1	اوسط n_2	آزمائش 2	آزمائش 1			

اڑن پہیے کے جمود کا معیار اثر $I=\left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right)m\left[\frac{2gh}{\omega^2}-r^2\right]$

اوسط I=

18.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

1. گرنے والے وزن کی کمیت انتہائی چھوٹی ہونی چاہیے تا کہ گرتے وقت کی بہت ہی صحیح تخمین ہو سکے۔
2. آپ کو اس کا اطمینان کر لینا چاہیے کہ اڑن پہیے کے بیرنگس میں چکنائی دار تیل موجود ہو۔
3. پہیے کو محض گرنے والے وزن ہی سے گھومنا چاہیے۔ اس پر کوئی بیرونی دھکا نہیں لگانا چاہیے۔
4. پہیے کے چکروں کے شمار کو آسان بنانے کے لیے اس پر ایک حوالے کا نشان بنانا چاہیے۔
5. اسٹاپ واچ کو اس ہی لمحے چلا دینا چاہیے جب کہ دھاگے کا حلقہ کھونٹی سے علاحدہ ہو جاتا ہے۔
6. دھاگے کے طول کو اڑن پہیے کے دھرے کی فرش سے بلندی کے مقابلے میں کسی قدر کم ہونا چاہیے۔
7. دھرے کے قطر کے مقابلے میں دھاگے کا قطر قابل نظر انداز حد تک چھوٹا ہونا چاہیے۔

18.7 روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

اس تجربے کو انجام دینے کے بعد روزمرہ کی زندگی میں آپ کسی بھی گردشی جسم (پہیا) کے جمودی معیار اثر کو معلوم کر سکتے ہیں۔

18.8 تجربی نتائج (Experimental Result)

☆ اس تجربے میں اُڑن پہیے کے تشریحی آلات سے واقف کرایا گیا ہے۔

☆ اُڑن پہیے کے جمود کے معیار اثر کا ضابطہ $I = \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2}\right) m \left[\frac{2gh}{\omega^2} - r^2\right]$

18.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

گردشی پہیہ (Fly Wheel) : توانائی بالحرکت کو ذخیرہ کرنے کے لیے استعمال کیا جانے والا وزنی گردشی قرص (Disc)

جمود (Inertia) : خط مستقیم میں حرکت کرنے والے جسم کا مخالف

جمود کا معیار اثر (Moment of Inertia) : گردشی حرکت میں کسی جسم کی وہ خاصیت جو کسی سکون میں رہنے والے جسم کو یا حرکت کرنے والے جسم کی حرکت کی ایک خاص محور میں مخالفت کرے۔

گردشی محور (Axis) : دائروں کا خطی مرکز

زاویائی نقل مکان (Angular Displacement) : وہ زاویہ ہے جو کسی ذرہ کے نصف قطر (Radius) کے مقام کو ظاہر کرے

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check your Information Questions)

1. اڑن پہیے کی اصولی افادیت کیا ہے؟

2. اس تجربے میں پہیے کو گھمانے والی توانائی کا مبداء کیا ہے؟ اور پہیے کیوں کچھ وقت کے بعد ساکن ہو جاتا ہے؟

3. مساوات (18.6) کی مقدار $\frac{n_2}{n_1+n_2}$ کی کیا اہمیت ہے؟

Rough Work

اکائی 19۔ دوریشی تعلیق کے جمود کا معیار اثر

(Moment of Inertia of Bifilar Suspension)

اکائی کے اجزا

19.0		تمہید	(Introduction)
19.1		مقصد	(Objectives)
19.2		آلات	(Apparatus)
	19.2.1	تشریح آلات	(Apparatus Explanation)
19.3		نظریہ	(Theory)
19.4		طریقۂ عمل	(Procedure)
19.5		مشاہدہ اور تحسیب	(Observation and Analysis)
19.6		احتیاطی تدابیر	(Precautions)
19.7		روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)	
19.8		تجربی نتائج	(Experimental Result)
19.9		کلیدی الفاظ	(Key Words)

19.0 تمہید(Introduction)

جمود کے معیاراثر کے مفہوم سے آپ واقف ہیں۔کسی محور کے گرد جسم کے جمود کا معیاراثر خطی حرکت میں کمیت کا گردشی مماثل ہے۔ اس کی قیمت کا انحصار محور کے گرد کمیت کی تقسیم پر ہوتا ہے۔گردشی حرکت کے ساتھ ساتھ بعض اوقات اہتزازی حرکت بھی ہوا کرتی ہے۔جب اہتزاز کا محور بدلتا ہے تو محور کے گرد کمیت کی تقسیم میں بھی تبدیلی ہوجاتی ہے اور جمود کے معیاراثر کی مختلف قیمت حاصل ہوتی ہے۔(بجز اس کے کہ گردشی محور ایک یکساں کرے کے مرکز سے گزرتا ہولیکن یہاں یہ صورت زیر مطالعہ نہیں ہے) آپ یہاں ایک ایسا تجربہ انجام دیں گے جس کے ذریعے انتصابی محور کے گرد ایک باقاعدہ جسم کے معیاراثر کے مفہوم کو سمجھ سکیں گے اور اس کو محسوب کرسکیں گے۔

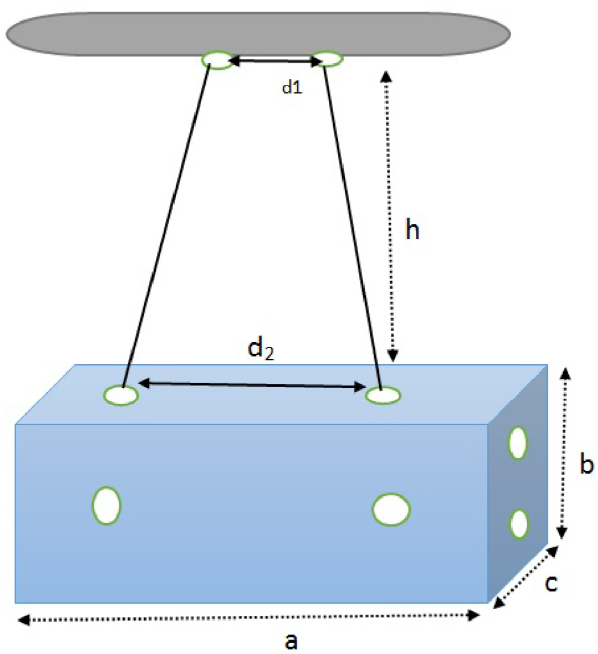
19.1 مقاصد(Objectives)

اس تجربے کا مقصد دوریشی تعلیق(Bifilar Suspension) کی مدد سے جمود کے معیاراثر کی تخمین کرنا ہے۔

19.2 آلات(Apparatus)

مستطیلی دھاتی یا چوبی کندہ	دھاگا	شکنجہ
نمائندہ	اسٹاپ واچ سرلچاپ	اسپرٹ لیول ڈنڈی کمپاس(Beam Compass)

19.2.1 تشریح آلات(Explanation Apparatus)



شکل(19.1)

بموجب شکل (19.1) دوریشی رقاص ایک مستطیلی دھاتی (یا چوبی) کندے پر مشتمل ہوتا ہے جس کے باہم علی القوائم سطحوں میں سے ہر ایک پر دو سوراخ ہوتے ہیں۔ یہ سوراخ سطح کے مرکز سے متشکل مقامات پر بنائے جاتے ہیں۔ ایک افقی سلاخ میں موجود دو ہکوں (Hooks) سے مساوی طول کے دھاگوں کے ذریعے اس کندے کو لٹکایا جاتا ہے۔ جب جسم آزادانہ طور پر لٹکا ہوتا ہے۔ تو یہ دھاگے افقی سطح سے مساوی زاویوں پر مائل رہتے ہیں۔ افقی سلاخ میں دھاگوں کے درمیانی فاصلے کو بدلنے کا انتظام بھی رہتا ہے۔

19.3 نظریہ (Theory)

فرض کرو کہ ایک دوریشی رقاص کو دو متوازی یا غیر متوازی دھاگوں سے لٹکایا گیا ہے۔ اب اگر جسم کو انتصابی محور کے گرد خفیف سی مروڑ دے کر چھوڑ دیا جائے تو یہ جسم اس کے مرکز سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد اہتزاز کرنا شروع کرتا ہے۔ اس اہتزاز کا وقت دوران T ہوگا۔

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{Ih}{Mgd_1d_2}} \qquad 19.1$$

جہاں I سے مراد جسم کے جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد جو جسم کی کمیت کے مرکز سے گزرتا ہے اور جو افقی سطح یا ابعاد کے عموداً بھی ہے۔

h۔ دھاگے کے اوپری اور نچلے سروں سے گزرنے والی افقی مستوئیوں کے درمیان کا عمودی فاصلہ ہے۔

M۔ جسم کی کمیت ہے۔

d_1۔ افقی ڈنڈے پر کے نقاط تعلیق کا درمیانی فاصلہ ہے۔

d_2۔ جسم کی سطح پر واقع دو ہکوں کا درمیانی فاصلہ جس سے دھاگے کے سرے بندھے ہوئے ہیں۔

g۔ تجاذبی اسراع ہے۔

مساوات (19.1) کے طرفین کا مربع لیجیے اور مساوات ریکوترتیب دیجیے اس طرح کہ

$$I = \frac{Mg}{16\pi^2} \times \frac{T^2 d_1 d_2}{l} \qquad 19.2$$

اس مساوات سے I کو معلوم کیا جاسکتا ہے۔ جسم کی قسم کو گردشی محور کو بدلا جاسکتا ہے۔ ایک استوانہ نما سلاخ کا طول 'l' اس کی تراش عمودی کا نصف قطر r اور کمیت m ہے۔ اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر طول کے علی القوائم ایک متشاکل محور کے گرد قرص کے جمود کا معیار اثر ہوگا۔

$$I = m\left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right) \qquad 19.3$$

ایک مدور قرص کی کمیت m اور قطر R ہیں۔ اس کی سطح کے علی القوائم ایک متشاکل محور کے گرد قرص کے جمود کا معیار اثر ہوگا۔

$$I = m\left(\frac{R^2}{2}\right) \qquad 19.4$$

اور ایک مستطیلی کندے کے لیے

$$I = m\left(\frac{x^2 + y^2}{12}\right) \qquad 19.5$$

جہاں x اور y علی الترتیب طول اور عرض ہیں۔

19.4 طریقِ عمل (Procedure)

ایک مستطیلی کندے کو کسی افقی سہارے سے دو ایک ہی طول رکھنے والے دھاگوں کے سروں کو رخ (فرض کرو کہ ac) پر واقع اسکروز A اور B سے ملحق کر کے اس طرح لٹکائیے کہ یہ سطح بالکل افقی مستوی میں رہیں۔ ایک نمائندے کو کندے کے کونے کے کنارے پر انتصابا جوڑ دیجیے تا کہ اہتزازوں کی گنتی کی خاطر یہ حوالے کے نقطے کا کام دے سکے۔ کندے کے مرکز ثقل سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد کندے کو ایک چھوٹے زاویئے میں گھما کر چھوڑ دیجیے۔ چلر کنی گھرطی سے 20/30 اہتزازوں کے لیے وقت معلوم کیجیے۔ 20/30 اہتزازوں کے لیے تجربے کو پھر سے دہرایئے اور وقت دوران T کا اوسط معلوم کیجیے۔ اسپرٹ لیول اور پٹری کی مدد سے سہارے پر واقع نقاط تعلیق کے درمیان فاصلے اور دھاگے کے نچلے سروں کے درمیانی فاصلہ d_2 (یعنی قرص یا کندے پر موجود اسکروز A اور B کا درمیانی فاصلہ) معلوم کیجیے۔ دھاگے کے نچلے اور اوپری سروں سے گزرنے والی افقی مستوئیوں کے درمیان کا انتصابی فاصلہ 'h' پٹری سے معلوم کیجیے۔ فاصلوں 'd_1' 'd_2' اور h کو بدلتے ہوئے تین مرتبہ تجربے کو دہرایئے اور اپنے نتائج کو ذیل کے جدول میں درج کیجیے۔ اس کے بعد اس طرح سے کندے کی سطحوں bc اور ac کو افقی حالت میں یکے بعد دیگرے لٹکا کر تجربے کو دہرایئے اور مشاہدات کو جدول میں درج کیجیے۔

دھاگے نکال دیجیے کندے کی کمیت معمولی ترازو کے ذریعے معلوم کیجیے اور اس کے طول a عرض b اور دبازت c کو ناپ لیجیے۔ جسم کے مرکز ثقل سے گزرنے والے سطح ab کے علی القوائم محور کے گرد اس کے جمود کا معیار اثر I ہوگا۔

$$I_1 = M\left(\frac{a^2 + b^2}{12}\right) \qquad 19.6$$

اس طرح سطح bc کے عموداً محور کے گرد I_2 ہوگا۔

$$I_2 = M\left(\frac{b^2 + c^2}{12}\right) \qquad 19.7$$

اور سطح ca کے عموداً محور کے گرد I_3 ہوگا۔

$$I_3 = M\left(\frac{c^2 + a^2}{12}\right) \qquad 19.8$$

مذکورہ الصدر ضابطوں سے ان تینوں محوروں کے گرد معیار اثروں کو محسوب کر کے اپنے تجربی نتائج سے ان کا مقابلہ کیجیے۔

19.5 مشاہدات اور تحسیب (Observation and Analysis)

جسم کی کمیت	M = ______ Kg
مستطیلی کندے کا طول	a = _______ m
مستطیلی کندے کا عرض	b = _______ m
مستطیلی کندے کی دبازت	c = _______ m

جدول (19.1)

رقاص کے مشاہدات جب کہ سطح ab افقی ہو

$I_1 = \frac{Mg}{16\pi^2} \times \frac{T^2 d_1 d_2}{h}$ in kg m^2	h in meters	d_2 in meters	d_1 in meters	$T^2 in\, s^2$	وقت دوران $T = \frac{t}{20}$ in sec	(20) اہتزازوں کے لیے درکار وقت t sec اوسط t	آزمائش 2	آزمائش 1	نشان سلسلہ
اوسط $I_1 =$									

جدول (19.2)

رقاص کے مشاہدات جب کہ سطح bc افقی ہو

نشان سلسلہ	(20) اہتزازوں کے لیے درکار وقت t sec آزمائش 1	آزمائش 2	اوسط t	وقت دوران $T = \frac{t}{20}$ in sec	$T^2 in s^2$	d_1 in meters	d_2 in meters	h in meters	$I_2 = \frac{Mg}{16\pi^2} \times \frac{T^2 d_1 d_2}{h}$ in $kg\ m^2$
									اوسط $I_2 =$

جدول (19.3)

رقاص کے مشاہدات جب کہ سطح ca افقی ہو

نشان سلسلہ	(20) اہتزازوں کے لیے درکار وقت t sec			وقت دوران $T = \frac{t}{20}$ in sec	$T^2 in\, s^2$	d_1 in meters	d_2 in meters	h in meters	$I_3 = \frac{Mg}{16\pi^2} \times \frac{T^2 d_1 d_2}{h}$ $in\ kg\ m^2$
	آزمائش 1	آزمائش 2	اوسط t						
									اوسط $I_3 =$

19.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

1. تعلیق کو بالکل متشاکل ہونا چاہیے۔ دھاگوں کو یا تو بالکل انتصابا یا انتصابی سمت سے مساوی زاویوں پر مائل ہونا چاہیے۔
2. نظام کو عمودی محور کے گرد گھومنا چاہیے۔ اس کو ایک سادہ رقاص کی طرح ایک جانب سے دوسری جانب حرکت نہیں کرنی چاہیے۔

19.7 روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

اس تجربے کو انجام دینے کے بعد روزمرہ کی زندگی میں کسی بھی باقاعدہ جسم کے (گردشی حرکت کے ساتھ بعض اوقات اہتزازی حرکت) کے جمود کے معیار اثر کو معلوم کر سکتے ہیں۔

19.8 تجربی نتائج (Experimental Result)

☆ گردشی حرکت کے ساتھ ساتھ بعض اوقات اہتزازی حرکت بھی ہوا کرتی ہے۔

☆ اہتزاز کا محور بدلتا ہے تو محور کے گرد کمیت کی تقسیم میں بھی تبدیلی ہو جاتی ہے۔

☆ گردشی جسم کے مرکز سے گزرنے والے انتسابی محور کے گرد اہتزاز کا وقت دوران T ہوگا۔ $T = 4\pi\sqrt{\frac{Ih}{Mgd_1d_2}}$

☆ ایک مستطیلی کندے (Rectengular Rod) کے لیے جمود کا معیار اثر $I = m\left(\frac{x^2 + y^2}{12}\right)$

19.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

وقت دوران (Time Period)	:	ذرے کے تعدیلی نقطے (Fixed Point) کے گرد ایک مرتبہ آگے پیچھے کی جانب حرکت
نقطۂ تعلیق (Suspension of Point)	:	جس نقطے سے رقاص لٹکایا جاتا ہے

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check your Information Questions)

1. ایک درویشی رقاص، مستطیلی کندے پر مشتمل ہے۔ انتصابی بلندی h 0.6m ہے۔ اوپری اور نچلی نقاط تعلیقی کے درمیان فاصلے علی الترتیب 5 اور 7 سمر ہیں۔ نظام کا وقت دوران 2.72 سکنڈ ہے کندے کے مرکز سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد اس کے جمود کا معیار اثر معلوم کیجیے جب کہ کندے کی کمیت lg ہے۔
2. اوپر کے سوال میں مستطیل کے بازو 15cm اور 10cm ہیں۔ مستطیل کے ابعاد کو استعمال کرتے ہوئے پلیٹ کے مرکز سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد اس کے جمود کا معیار اثر محسوب کیجیے۔
3. اگر دھاگوں کو بالکلیہ انتصابی کر دیا جائے تو وقت دوران کے لیے ضابطہ کیا ہوگا۔

4. وقت دوران محسوب کرنے کی خاطر اہتزازوں کی ایک بڑی تعداد کے لیے وقت کا معلوم کرنا کیوں ضروری ہے؟

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check your Information Answers)

.1 $$M = 1kg, \quad g = 9.8ms^{-2}, \quad T = 2.72\,s$$
$$d_1 = 0.05m \; d_2 = 0.07m, \quad h = 0.6m$$

$$I = \frac{Mg}{16\pi^2} \times \frac{T^2 d_1 d_2}{h} = \frac{1 \times 9.8}{16\pi^2} \times \frac{(2.72)^2 \times 0.05 \times 0.07}{0.6} = 2.68 \times 10^{-3}\, kg\, m^2$$

.2 یہاں پر

$$M = 1kg, \qquad a = 0.15m \qquad b = 0.1m$$

$$I = M\left(\frac{a^2 + b^2}{12}\right) = 1 \times \left(\frac{(0.15)^2 + (0.1)^2}{12}\right) = 2.71 \times 10^{-3}\, kgm^2$$

.3 فرض کرو کہ اوپری اور نچلی نقاط تعلیق کے درمیانی فاصلے مساوی ہیں اور ہر ایک d کے مساوی ہے تب $T = \frac{2\pi}{d}\sqrt{\frac{Ih}{Mg}}$

.4 اسٹاپ واچ کا سکنڈ کا کانٹا مسلسل جھٹکوں کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ (ایسی حرکت دانت والے پہیے کے دانتوں اور ان کے درمیان کے شگاف کے یکے بعد دیگرے متحرک ہونے سے پیدا ہوتی ہے) ان جھٹکوں کو یکے بعد دیگرے وقوع میں آنے کے لیے تقریباً $\frac{1}{5}$ سکنڈ (یا اس سے زیادہ) کا وقفہ درکار ہے۔ اس طرح اگر گھڑی کو اسی لمحے روکا جائے جب کہ دانت یا شگاف گزر رہا ہو تو وقت میں 0.02 سکنڈس کی غلطی سرزد ہوسکتی ہے۔ علاوہ ازیں گھڑی کو شروع کرنے اور روکنے کے دوران بھی شخصی غلطی کا امکان رہتا ہے۔ اسی طرح مجموعی غلطی معلوم کیے ہوئے وقت کے مقابلے میں کم ہونا چاہیے۔ لہٰذا بہتر یہی ہے کہ اہتزازوں کی کثیر تعداد کے لیے درکار وقت نوٹ کیا جائے جس سے صحیح وقت دوران معلوم کیا جاسکتا ہے۔

Rough Work

اکائی 20۔ مرکب رقاص کے ذریعے اسراع بہ وجہ زمینی کشش

(Acceleration Due to Gravity by Compound Pendulum)

اکائی کے اجزا

20.0	تمہید	(Introduction)
20.1	مقصد	(Objectives)
20.2	آلات	(Apparatus)
20.3	نظریہ	(Theory)
20.4	طریقہ عمل	(Procedure)
20.5	مشاہدہ اور تحسیب	(Observation and Analysis)
20.6	احتیاطی تدابیر	(Precautions)
20.7	روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)	
20.8	تجربہ نتائج	(Experimental Result)
20.9	کلیدی الفاظ	(Key Words)

20.0 تمہید(Introduction)

آپ اسراع بہ وجہ جاذب زمین کے مفہوم سے واقف ہیں۔ اگر اجسام کو آزادانہ طور پر گرایا جائے تو وہ زمین کے مرکز کی طرف ایک مستقل اسراع "g" کے ساتھ گرتے ہیں۔ اسی اسراع کو زمین کا تجاذبی اسراع بھی کہا جاتا ہے۔ اس مستقل کی قیمت' بلندی' گہرائی' گردش اور عرض بلد کے ساتھ بدلتی رہتی ہے۔ اصولاً آپ 'g' کی پیائش ایک سادہ رقاص سے بھی کر سکتے ہیں لیکن عملی طور پر آپ 'g' کی صحیح قیمت معلوم نہیں کر سکتے کیوں کہ ایک کامل سادہ رقاص کو بنانا ناممکن ہے۔ مثلاً سادہ رقاص کے گولے کو آپ بے انتہا چھوٹا نہیں بنا سکتے۔ پھر آپ کو ایسا کوئی دھاگا مل نہیں سکتا جو بے وزن ہو اور ناقابل توسیع ہو۔ لہٰذا 'g' کے معلوم کرنے کے لیے تجربہ گاہ میں بنائے گئے مرکب قراص کو استعمال کرنا ہوگا۔

20.1 مقاصد(Objectives)

اس تجربے میں مرکب رقاص کے خواص کو استعمال کر کے اپنے مقام کے جاذب زمین g(Gravity) کی قیمت کو معلوم کرنا ہے۔

20.2 آلات(Apparatus)

مرکب رقاص	موزوں تعلیقی سہارا
دھاری دار کنارہ	دوربین جس کے چشمے میں صلیبی تار موجود ہوں
اسٹاپ واچ	میٹر اسکیل

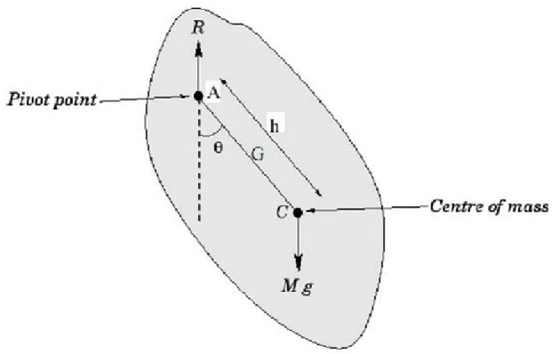
20.3 نظریہ(Theory)

ایک استوار جسم جو چول کے محور کے گرد انتصابی مستوئی میں آزادانہ طور پر بموجب شکل (20.1) جھولتا ہو۔ مرکب رقاص کہلاتا ہے۔ چول کے اس نقطے کو مرکز تعلیق کہتے ہیں۔ حرکت کے مستوئی کے علی القوائم اور نقطہ 'A' سے گزرنے والے ایک محور پر غور کیجیے۔ یہ 'A' سے گزرنے والا گردشی محور ہے۔ اس گردشی محور کے گرد جسم کے جمود کا معیار اثر I_A ہوگا۔ $I_A = I_G + Mh^2$ ۔

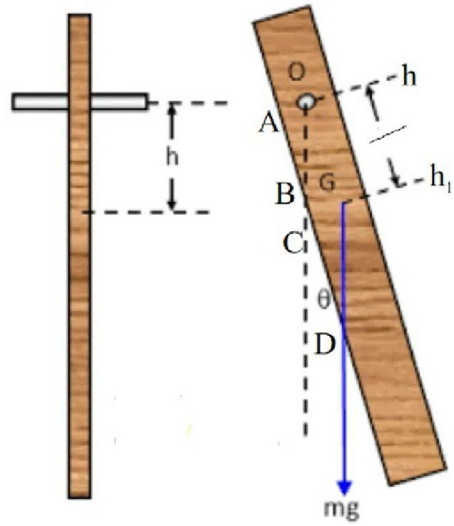
جہاں 'M' جسم کی کمیت ہے۔ 'h' کمیت کے مرکز G اور A کا درمیانی فاصلہ ہے اور I_G نقطہ 'G' سے گزرنے والے اور حرکت کی مستوئی کے عمود امحور کے گرد جسم کے جمود کا معیار اثر AG کو ایک نقطہ 'C' تک اس طرح بڑھایئے کہ

$$GC = h_1 = \frac{I}{(Mh)}$$

فاصلہ AC ہوگا۔ $'A''C' = l = h + h_1$ اس فاصلے کو اس مرکب رقاص کے معادل سادہ رقاص کا طول کہتے ہیں نقطہ C کو مرکز اہتزاز کہتے ہیں۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ A اور C یعنی مرکز تعلیق اور مرکز اہتزاز کے مقامات تبدل پذیر ہیں۔



شکل(20.1)



شکل (20.2)

اگر مرکب رقاص میں ایک متشاکل جسم جیسے ایک یکساں سلاخ ہو تو آپ دو اور اسی قسم کے نقاط D اور B کے بارے میں سوچ سکتے ہیں جو مرکزِ کمیت 'G' کے لحاظ سے متشاکل مقامات پر واقع ہوں گے۔ اس طرح چار نقاط D, C, A اور B کا ایک سیٹ حاصل ہوتا ہے جس میں سے ہر ایک کو مرکزِ اہتزاز بنانے کی صورت میں وقت دوران کی ایک ہی قیمت T حاصل ہوتی ہے۔ ملاحظہ ہو شکل (20.2)۔

لہٰذا AC اور DB میں سے ہر ایک فصل کی لمبائی l ہوتی ہے اور وقت دوران T ہوتا ہے۔

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

اور اسراع بہ وجہ جاذبِ زمین ہوتا ہے۔

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

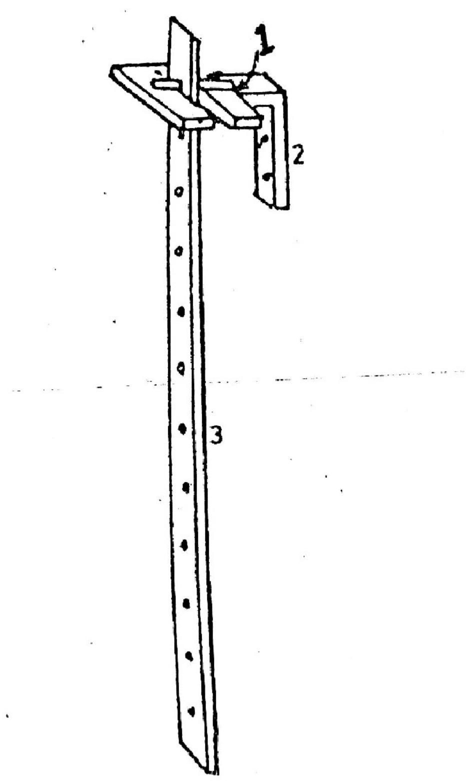
تجربہ گاہ میں جو رقاص استعمال کیا جاتا ہے وہ یکساں دھاتی سلاخ کی شکل کا ہوتا ہے جس کے طول کے ساتھ مساوی فاصلوں پر سوراخ بنا دیے جاتے ہیں۔ طریقِ عمل میں بتائے ہوئے طریقے کے مطابق ہر سوراخ کے لیے رقاص کے وقت دوران کو معلوم کیا جاتا ہے۔ وقت دوران T کو سلاخ کے کسی سرے سے سوراخوں کے ناپے گئے فاصلوں کے مقابل مرتسم کیا جائے تو ہمیں شکل (20.4) کے مطابق ایک ترسیم حاصل ہوتی ہے۔ آپ دیکھیں گے کہ ترسیم کے دونوں حصے ایک دوسرے کے بالکل متشاکل ہیں۔ اگر آپ کسی وقت دوران T_1 سے ایک افقی خط مستقیم کھینچیں تو یہ خط ان ترسیموں کو چار مقامات جیسے C, B, A اور D پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم سے حاصل ہونے والے طولوں AC اور BC کو معلوم کر کے ان کا اوسط l_1 محسوب کیا جاتا ہے تب

$$g = 4\pi^2 \frac{l_1}{T_1^2}$$

آپ تین دیگر اوقات دوران کے لیے تین افقی خطوط کھینچ کر مزید نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔آپ دو اقل ترین (Minima) فاصلوں کے درمیان فصل 'L' کو معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ گردشی نصف قطر (Radius of Gyration) 'K' ہوتا ہے۔ $k = \frac{L}{2}$

20.4 طریق عمل (Procedure)

کاغذ کے دو چھوٹے ٹکڑوں کو رقاص کے دوسروں پر چسپاں کر دیجیے۔ان پر کناروں کے متوازی اور کاغذ کے درمیان سے گزرنے والی لکیریں کھینچیے۔ یہ لکیریں حوالے کے نشان کا کام دیں گی۔ کسی ایک کاغذ کے ٹکڑے پر کوئی نشان بنا دیجیے۔اسی نشان سے سوراخوں کے فاصلوں کا ناپ کیجیے۔ ہر سوراخ میں یکے بعد دیگرے دھاری دار کنارے کو داخل کیا جا سکتا ہے۔اس دھاری دار کنارے کے دونوں جانب ایک ایک نٹ ہوتا ہے جسے گھما کر دھاری دار کنارے کو سلاخ کے ساتھ مضبوطی سے جوڑ دیجیے۔ دھاری دار کنارہ ارقی رہے اور اس کی دھار نیچے کی جانب ایک شیشے کے ٹکڑے کی سطح پر جمی رہے۔اس شیشے کے ٹکڑے کو دیوار یا لمبے اسٹینڈ سے منسلک بریکٹس (Brackets) پر رکھا جاتا ہے۔



شکل (20.3)

1. دھاری دار کنارا 2. دیوار گری (Wall Bracket) یا دیوار سے منسلک بریکٹ 3. سلاخ نما رقاص سلاخ کو آزادانہ طور پر لٹکایا جائے۔

دھاری دار کنارے اور نشان زدہ سرے کے درمیانی فاصلے کو نوٹ کر لیا جائے۔

رقاص سے دو یا تین میٹر کے فاصلے پر ایک دوربین کو رکھیے۔ دوربین کا رخ سفید دیوار کی طرف کر کے اس کے چشمے کو یہاں تک فوکس

کیجیے کہ دور بین کے اندر کے صلیبی تار واضح طور پر دکھائی دیں۔ اس کے بعد دور بین کو رقاص کے نچلے سرے پر کھینچتے ہوئے خطوط پر فوکس کیجیے۔ رقاص کو ایک چھوٹے زاویے میں اہتزاز کیا جائے اور اس امر کا یقین کرلیا جائے کہ یہ اہتزاز ایک ہی انتصابی مستوئی میں بغیر کسی جھٹکے کے ہو رہے ہوں۔ جب اہتزازی اچھی طرح قائم ہو جائیں تو دور بین سے ان کا مشاہدہ کیجیے اور حوالے کا نشان جب صلیبی تاروں کے نقطۂ تقاطع سے عین دائیں بائیں گزرے، اسٹاپ واچ چلا دیجیے۔ ایک اہتزاز اس وقت ہوگا جب کہ رقاص اس مقام سے اسی سمت میں جارہا ہو۔ اس طرح گنتے ہوئے بیس (20) اہتزازوں کے لیے وقت معلوم کیجیے۔ تجربہ دہرایئے اور وقت کا اوسط محسوب کیجیے۔ مشاہدات کو جدول 20.1 میں درج کیجیے۔ اس وقت سے رقاص کے دوران 'T' یعنی ایک اہتزاز کے لیے درکار وقت معلوم کیجیے۔ اس کے بعد دھاری دار کنارے کو دوسرے سوراخ میں منتقل کیجیے اور مشاہدات لینے کے عمل کو دہرایئے یہاں تک کہ سلاخ کا مرکز آجائے۔ ہر صورت میں دھاری دار کنارے اور سلاخ کے اسی نشان زدہ سرے کے درمیانی فاصلے کو ناپنا نہ بھولیے۔ اس کے بعد سلاخ کو اُلٹ دیجیے اور اب وقت دوران کو مرکز سے قریب کے سوراخ سے شروع کرتے ہوئے سلاخ کے سرے کے قریب کے سوراخ تک پہنچ کر معلوم کیجیے۔ (اگر آپ ایسا کریں گے تو آپ دیکھیں گے کہ نشان زدہ سرے سے سوراخ کے فاصلوں میں مسلسل اضافہ ہوتا جاتا ہے) مشاہدات کو نوٹ کیجیے۔

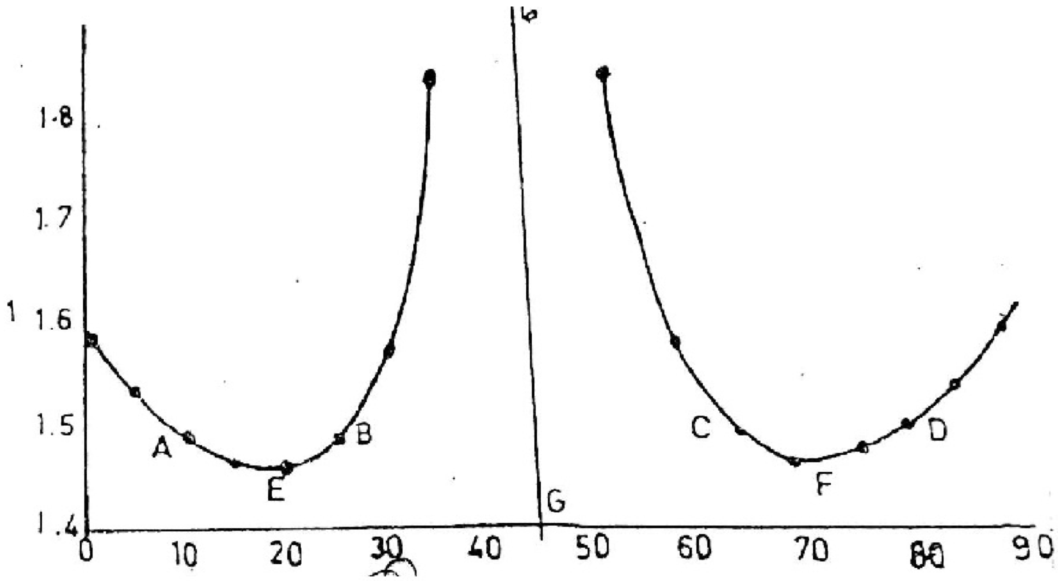
20.5 مشاہدات اور تحسیب (Observation and Analysis)

جدول (20.1)

سلسلہ نشان	نشان زدہ دوسرے سے نقطہ تعلیق کا فاصلہ X میٹر	(20) اہتزازوں کے لیے درکات وقت sec t			وقت دوران $T = \frac{t}{20}$ in sec
		آزمائش 1	آزمائش 2	اوسط t	

گراف یا ترسیم

فاصلہ x محور x پر اور اس کے تناظر وقت دوران T محور y پر لیجیے۔ حاصل ہونے والی ترسیم دو منحنیوں پر مشتمل ہوگی جو بلحاظ مرکز کمیت ایک دوسرے کے متشکل ہیں، ان میں کی ایک سلاخ کے ایک نصف اور دوسری سلاخ کے دوسرے نصف کے لیے ہوگی اسی کو شکل (20.4) میں دکھایا گیا ہے۔ رقاص کی سلاخ کو دھاری دار کنارے کے ذریعے افقی مستوئی میں متوازن کر کے اس کے مرکز کمیت کے مقام G کو معلوم کیجیے اور اس کا فاصلہ بھی نشان زدہ سرے سے ناپ لیجیے۔ اسی فاصلے پر گراف میں ایک عمودی خط GG^1 کھینچئے۔



شکل (20.4)

1. وقت دوران 2. نشان زدہ سرے سے فاصلہ $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2B_2C_2D_2, A_3B_3C_3D_3$

وقت دوران کی کوئی چار قیمتوں کو ترسیم کے مقصر حصے میں منتخب کر کے چار خطوط A_4, B_4, C_4, D_4 کھینچئے، ہر صورت میں AC اور BD کی قیمت معلوم کیجیے اور ان کے اوسط کا شمار کیجیے۔ ہر صورت میں $\frac{l}{T^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے اور جدول (20.2) کی خانہ پری کیجیے۔ $\frac{l}{T^2}$ کی اوسط قیمت معلوم کر کے ضابطہ $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$ سے اپنے مقام پر اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کی قیمت محسوب کیجیے۔

جدول (20.2)

سلسلہ نشان	وقت دوران T in sec	معادل سادہ رقاص کا طول AC	BD	اوسط قیمت $l=\frac{AC+BC}{2}$	$\frac{l}{T^2}$ ms^{-2}
1					
2					
3					
4					

اوسط $\frac{l}{T^2}=$

وقت دوران کی دو اقل ترین قدروں E اور F کا درمیانی فاصلہ (جو L کے مساوی ہے) ناپیے۔ مساوات $K=\frac{L}{2}$ کو استعمال کرتے ہوئے گردشی نصف قطر K کو معلوم کیجیے۔

20.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

1. رقاص کے اہتزاز کا حیطہ چھوٹا رہے۔
2. دھاری دار کنارے کو افقی ہونا چاہیے۔ رقاص کو دیوار کے متوازی مستوئی میں اہتزاز کرنا چاہیے۔
3. دوران تجربہ تمام فاصلوں کو صرف نشان زدہ سرے سے ناپنا چاہیے۔
4. ابتدائی اہتزازوں کو چھوڑ کر جب اہتزاز قائم اور بغیر کسی جھٹکوں کے ہو رہے ہوں عین اس وقت سے ان کی گنتی شروع کرنی چاہیے۔

20.7 روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

اس تجربے کو انجام دینے کے بعد آپ روزمرہ کی زندگی میں رقاص کو استعمال کر کے اپنے مقام کے لیے g کی قیمت کو معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کو گھنٹہ گھر (Clock Tower) مین بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

20.8 تجربی نتائج (Experimental Result)

☆ چوں کہ محور کے گرد آزادانہ طور پر انتصابی مستوئی میں آزادانہ طور پر چھولتا ایک استوار جسم مرکب رقاص کہلاتا ہے۔

☆ آزادنہ جسم پر تجاذبی قوت کے ذریعے اثر پیدا شدہ ہموار اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کہلاتا ہے۔

☆ مرکز اہتزاز کی صورت میں وقت دوران کی قیمت $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

☆ اسراع بوجاذبہ زمین $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$

20.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

رقاص کا طول	:	کرے کا مرکز جذبہ اور نقطہ تعلیق کے درمیان فاصلہ
وقت دوران	:	ذرے کے تعدیلی نقطے کے گرد مرتبہ آگے پیچھے کی جانب حرکت
تجاذبی کمیت	:	جسم کی وہ خاصیت جو تجاذبی قوت کو دوسرے اجسام پر عائد کرتی ہے

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check your Information Questions)

1. وقت کی پیمائش کے لیے چلر کنی گھڑی اور چلر کنی دستی گھڑی میں سے کس کو آپ ترجیحاً استعمال کریں گے اور کیوں؟
2. وقت دوران کی تعلیق میں طالب علم 'A' نے (20) اہتزازوں اور B نے (50) اہتزازوں کے لیے وقت نوٹ کیا۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ کس نے بہتر تجربہ کیا اور کیوں؟
3. رقاص کے اہتزازوں کے وقت معلوم کرنے کے لیے دوربین کو کیوں استعمال کیا گیا؟
4. کسی مقام پر اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کے تعین کے لیے آپ رقاص کو ترجیح دیں گے سادہ یا مرکب کو؟ اور کیوں؟
5. فرض کرو کہ تجربہ خانے کے مرکب رقاص کے ایک سرے کو وزنی بنا دیا گیا تو نشاہ زدہ سرے سے سوراخوں کے فاصلوں اور وقت کے مابین کھینچی ہوئی ترسیم پر اس کا کیا اثر ہوگا؟

Rough Work

اکائی 21۔ صوت پیما کے ذریعے تبادل رو کی طاقت کا تعداد

(The Frequency of A.C. Mains by A.C. Sonometer)

اکائی کے اجزا

21.0	تمہید	(Introduction)
21.1	مقصد	(Objectives)
21.2	آلات	(Apparatus)
21.3	نظریہ	(Theory)
21.4	طریقۂ عمل	(Procedure)
21.5	مشاہدہ اور تحسیب	(Observation and Analysis)
21.6	احتیاطی تدابیر	(Precautions)
21.7	روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)	
21.8	تجربہ نتائج	(Experimental Result)
21.9	کلیدی الفاظ	(Key Words)

21.0 تمہید(Introduction)

اس تجربے میں آپ کو سوت پیا سے واقف کرایا جائے گا۔سود پیا لکڑی کے مستطیلی کھو کھلے ڈبے پر مشتمل ہوتا ہے جیسے کہ شکل (21.1) میں دکھلا جائے گا۔سود پیا کے ذریعے ارتعاش تار کے کلیات کی تجرباتی تصدیق بھی کر سکتے ہیں اور رَو(Current) کو استعمال کرتے ہوئے رَو کی تعداد(Frequency of Current) کومعلوم کیا جاتا ہے۔

21.1 مقاصد(Objectives)

اس تجربے کا مقصد ایک صوت پیا کو استعمال کر کے گھریلو متبادل رو کی سپلائی کے تعدد(Frequency) کی پیائش کرنا ہے۔

21.2 آلات(Apparatus)

ایک صوت پیا	پیتل یا فولاد کا ایک تار	وزن آویزیہ مع شگاف دار اوزان
ایک مقوم (Rheostat)	دو عدد طاقتور سلاخی مقناطیس	ایک خرد پیا
ایک ترازو	واصل تار	گھڑیالی چٹکیاں

ایک تنزلی ٹرانسفارمر (Stepdown Transformer) (6 وولٹ یا 9 وولٹ)

21.3 نظریہ(Theory)

ایک یکساں مقناطیسی میدان میں میدان کے علی القوائم رکھے ہوئے ایک موصل تار سے جب ایک قائم رَو (Steady Current) i گزاری جاتی ہے تو موصل پر ایک مستقل قوت عمل کرتی ہے جسے کو F=iLB۸ سے ظاہر کیا جاتا ہے، جہاں L= موصل کا طول B= مقناطیسی امالے کو تعبیر کرتے ہیں۔

ایک موصل سے جب n تعدد والی ایک متبادل رو گزاری جاتی ہے تو موصل پر عمل پیرا قوت ایک سادہ موسیقی انداز میں اپنی مقدار اور سمت میں بدلتی رہتی ہے۔لہٰذا موصل سادہ موسیقی حرکت انجام دیتا ہے جس کا تعدد n کے مساوی ہوتا ہے۔یہی اس تجربے کا اصول ہے۔

اس تجربے میں ایک فولاد کے تار کو دو طاقتور سلاخی مقناطیسیوں کے غیر مشابہ قطبوں کے درمیان رکھا گیا ہے۔ جب تار سے n تعدد والی ایک متبادل رو گزاری جاتی ہے تو تار پر مقوی ارتعاش(Forced Vibration) ترتیب پائے جاتے ہیں۔ جب تنے ہوئے تار کا قدرتی تعدد، تعدد n کے مساوی ہوجاتا ہے تو کمک (Resonance) واقع ہوتی ہے اور ارتعاش کا حیطہ (Amplitude) اعظم ترین (Maximum) ہوجاتا ہے۔

اس حالت کے تحت ایک حلقے میں ارتعاش کرنے والے تار کا طول L اور تار میں تناؤ T ہے تب:

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

جہاں تنے ہوئے تار کی خطی کثافت یا فی اکائی طول کمیت ہے۔

مذکورہ بالا ضابطے سے T اور μ کی پیمائش سے n کو محسوب کیا جا سکتا ہے۔

21.4 طریق عمل (Procedure)

.1 شکل (21.1) کے بموجب صوت پیما کی دھاری دار کناروں A اور B پر ایک فولادی تار کو تان دیجیے۔ اس کے لیے تار کے آزاد سرے سے وزن آویزے کو ملحق کیجیے۔ ایک موزوں وزن 0.3 کلوگرام' کو منتخب کیجیے تاکہ تار کو تنا ہوا رکھا جا سکے۔

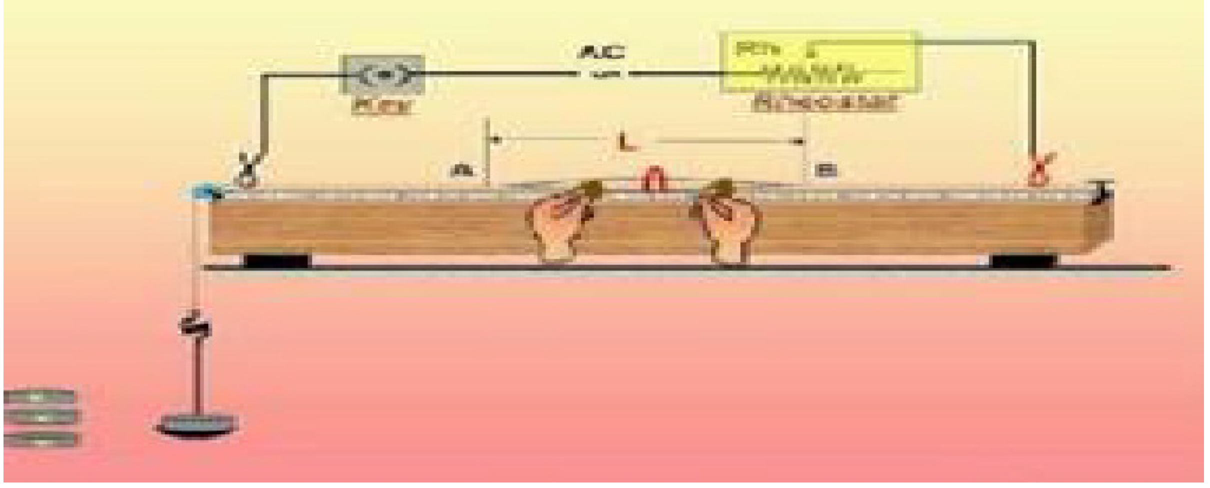
.2 لکڑی کے دو سہاروں پر دو سلاخی مقناطیس اس طرح ترتیب دیجیے کہ ان کے مخالف قطب ایک دوسرے کے سامنے ہوں اور ان کے درمیان سے ایک تار گزارا جا سکے۔

.3 گھڑیالی چٹکیوں کی مدد سے تار کے سروں کو ایک مقوم (Rheostat) اور ایک کنجی (Key) کے ذریعے ایک تنزلی ٹرانسفارمر کے سروں سے جوڑ دیجیے۔

.4 آویزے میں موجود وزن (M) کو نوٹ کیجیے۔ ذیل کے ضابطے سے تار میں تناؤ (T) کو محسوب کیجیے۔

T= Mg newtons

.5 دھاری دار کناروں A اور B کو ایک دوسرے سے جہاں تک ممکن ہو سکے قریب لائیے۔ اب کنجی کو بند کر دیجیے۔ دھاری دار کناروں کو بتدریج دور ہٹاتے ہوئے دھاری دار کناروں کے درمیان تار کے طول l کو بڑھاتے جائیے۔ کسی ایک مستقل پوزیشن میں تار ارتعاش کرنے لگتا ہے۔ اس نقطے پر دھاری دار کناروں کو کافی احتیاط سے اور آہستگی سے اس وقت تک ترتیب دیجیے جب تک کہ تار اعظم ترین حیطے میں ارتعاش نہ کرنے لگے۔ اب دھاری دار کناروں کے درمیان تار کے طول l کی پیمائش کیجیے۔



شکل (21.1)

6. وزن کو 0.1 کیلوگرام کے مرحلوں میں بڑھاتے جائیے اور مذکورہ بالا طریقے سے ہر بار گمکی طول (Resonance Length)l کی پیمائش کیجیے۔مشاہدات کی جدول بندی کیجیے۔

7. صوت پیما سے تار کو علاحدہ کر دیجیے۔ایک ترازو کی مدد سے اس کی کمیت (m) اور اس کے طول (l) کی پیمائش کیجیے۔
ذیل کے ضابطے سے اس کی خطی کثارت μ محسوب کیجیے

$$\mu = \frac{m}{L}$$

بہ صورت دیگر ایک خرد پیما کو استعمال کر کے تار کا نصف قطر r معلوم کیجیے۔طبعی جدولوں سے تار کے مادے کی کثافت (d) کی قیمت نوٹ کر لیجیے۔پھر تار کی خطی کثافت کو ذیل کے ضابطے سے محسوب کیجیے۔

$$\mu = \pi r^2 d$$

8. ہر صورت میں ضابطے کی مدد سے n کی قیمت محسوب کیجیے اور متبادل رو کی سپلائی کے تعدد n کی اوسط قیمت معلوم کیجیے۔

21.5 مشاہدات اور تحسیب (Observation and Analysis)

تار کی کمیت m=................gm = ... kg.

تار کا طول L=...............cm = ...meters

خطی کثافت $\mu = \frac{m}{L} =$ .... kg/m

جدول 21.1

سلسلہ نشان	وزن M کلوگرام	تناو $T = Mg$ (Newtons)	کمکی طول - l (m)	$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ Hz

اوسط n = ... ہرٹز(Hz)

21.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

1. مقوم کو ترتیب دیتے ہوئے فولادی تار کو زیادہ گرم ہو جانے سے روکنا چاہیے۔
2. تار کے ارتعاش کے اعظم ترین حیطے کو حاصل کرنے کے لیے دھاری دار کناروں کے درمیانی فاصلے کو بڑی احتیاط سے ترتیب دینا چاہیے۔
3. بہتر نتائج حاصل کرنے کے لیے یہ مشورہ دیا جاتا ہے کہ ایک صوت پیما کو استعمال کرنے کے بجائے ایک 2 میٹر لمبے فولادی تار کو ایک میز پر تان کر اس کے ایک سرے کو شکنجے سے جکڑ دیجیے اور دوسرے سرے کو میز کے کنارے پر نصب ایک چرخی پر سے گزاریے۔

21.7 روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

اس تجربے کو انجام دینے کے بعد آپ اپنی زندگی میں مختلف تاروں (Copper, Iron....) میں رو کی تعداد کی پیمائش کر سکتے ہیں۔

21.8 تجربی نتائج (Experimental Result)

☆ اس تجربے میں ہم ایک موصل تار سے ایک قائم رو i(Steady Current) گزاری جاتی ہے تو موصل پر ایک مستقل قوت عمل کرتی ہے جو F=iLB ہے۔

☆ تنے ہوئے تار کی قدرتی تعداد (T) تعداد (n) کے مساوی ہو جاتی ہے تو گمک (Resonance) واقف ہوتی ہے اور ارتعاش کا حیطہ (Amplitude) عظیم ترین ہو جاتا ہے۔

☆ ایک حلقے میں ارتعاش کرنے والے تار کا طول l اور تار میں تناؤ T ہے تب $n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

21.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

عقدہ (Nodes) : جہاں حیطہ ارتعاش صفر ہو جاتا ہے

صدعقدہ (Anti-Nodes) : جہاں حیطہ ارتعاش عظیم ترین ہو جاتا ہے

فریکوینسی (Frequency) : اکائی وقت میں سادہ موسیقی حرکت کے ارتعاش کی تعداد

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check your Information Questions)

1. گمک کیا ہوتی ہے؟

2. مقناطیسی میدان میں رکھے ہوئے تار سے جب متبادل رو گزرتی ہے تو کیا ہوتا ہے؟

3. متبادل رو راست رو سے کس طرح مختلف ہوتی ہے؟

4. تار کے تناؤ میں اضافے اور کمی سے کس طرح گمکی طول میں تبدیلی واقع ہوتی ہے؟

5. تجربے میں استعمال کیے جارہے تار کو اسی مادے سے بنے ایک دوسرے موٹے تار سے بدل جائے۔ تو ایک دیئے گئے وزن کے لیے گمکی طول کس طرح متاثر ہوتا ہے؟

6. ذیل کے لیے ایس۔آئی اکائیاں کیا ہیں؟

(a) خطی کثافت (Linear Density)

(b) تعدد (Frequency)

7. ایک مقناطیسی میدان میں رکھے ہوئے اور رو بردار تار پر عمل پیرا قوت کے سمت کو کس اصول کی مدد سے معلوم کیا جاسکتا ہے؟

Rough Work

اکائی 22۔ مروڑی رقاص کے ذریعے کسی تار کے مادے کی استواری کا معیار

(Regidity Modulus of the Material of a wire by Torsional Pendulum)

اکائی کے اجزا

22.0	تمہید	(Introduction)
22.1	مقصد	(Objectives)
22.2	آلات	(Apparatus)
22.3	نظریہ	(Theory)
22.4	طریقہ عمل	(Procedure)
22.5	مشاہدہ اور تحسیب	(Observation and Analysis)
22.6	احتیاطی تدابیر	(Precautions)
22.7	روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)	
22.8	تجربہ نتائج	(Experimental Result)
22.9	کلیدی الفاظ	(Key Words)

22.0 تمہید(Introduction)

اس تجربے میں آپ سیکھیں گے کہ ایک مروڑی رقاص کو کس طرح ترتیب دیں اور ایک تار کے مادے کی استواری کے معیار کی تخمین میں اس کو کس طرح استعمال کریں۔

22.1 مقاصد(Objectives)

اس تجربے کا مقصد مروڑی رقاص(Torison Pendulum) کا استعمال کرتے ہوئے ایک تار کے مادے کی استواری کے معیار کی تخمین کرنا ہے۔

22.2 آلات(Apparatus)

ایک اسٹینڈ یا دیوارگری (Wall bracket) جو چکر ڈھریوں(Chucknuts) کے ایک جوڑے سے موزونیت کے ساتھ مرتب ہو

نمونہ تار	ایک مدور(یا مستطیلی) پتلی قرص	اسٹاپ واچ
پن	خرد پیما	معمولی ترازو

22.3 نظریہ(Theory)

فرض کرو کہ ایک انتصابی تار کے نچلے سرے سے ایک قرص کو اس طرح ملحق کیا گیا ہے کہ تار متشاکل قرص کے مرکز کمیت سے گزرتا ہے اور اس کی مستوئی کے علی القوائم بھی ہے۔ تار کے اوپری سرے کو ایک استوار سہارے کے ذریعے جکڑ دیا گیا ہے۔ اگر قرص کو اس کی اپنی مستوئی میں تار کے گرد ایک ہلکی سی گردش دے کر چھوڑ دیں تو یہ ایک چھوٹی سی قوس میں افقی مستوی میں اہتزاز کرنا شروع کرے گا۔ ایسے اہتزاز، مروڑی اہتزاز کہلاتے ہیں۔ قرص اور تار کی یہ ترتیب (شکل 22.1) مروڑی رقاص کے طور پر مانی جاتی ہے۔ اس کے یہ مروڑی اہتزاز' سادہ موسیقی نوعیت کے ہوتے ہیں اور ان کا وقت دوران T ہوگا۔

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}} \qquad (22.1)$$

جہاں I تعلیقی محور کے گرد قرص کے جمود کا معیار اثر ہے اور C اکائی مروڑ کے لیے درکار جفت ہے اس جفت کی قیمت ہوتی ہے:

$$c = \frac{\pi n r^4}{2l} \qquad (22.2)$$

یہاں پر n تار کے مادے کے استواری کا معیار r اس کی تراش عمودی نصف قطر اور l مروڑی کا طول (جو استعمال کیے جا رہے تار کا طول بھی ہوتا ہے) ہیں۔

مساواتوں (22.1) اور (22.2) سے ہم بتا سکتے ہیں کہ تار کے مادے کی استواری کا معیار ہوگا۔

$$\frac{8\pi I}{r^4}\frac{l}{T^2} \qquad (22.3)$$

22.4 طریقِ عمل (Procedure)

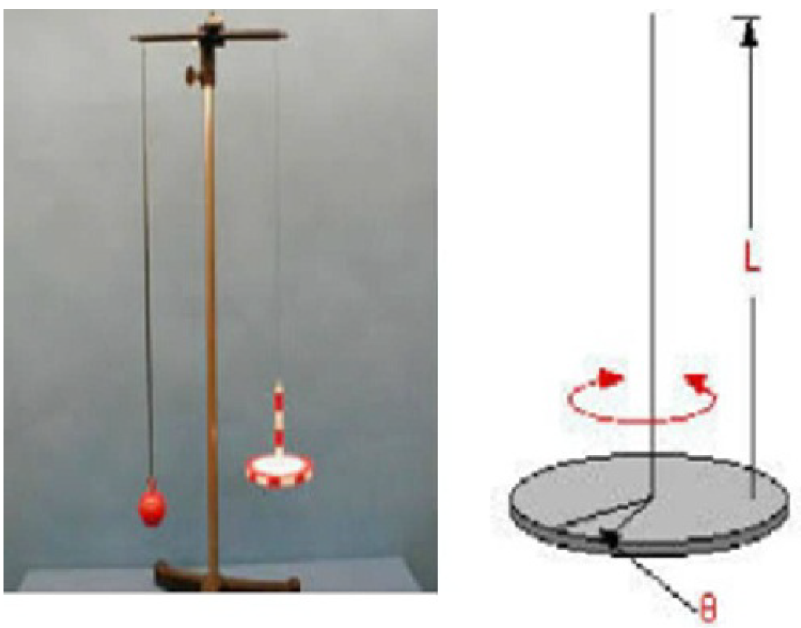
خرد پیما کو استعمال کرتے ہوئے نمونہ تار کی تراشیں عمودی کا قطر (2r) معلوم کیجیے۔ تار کے طول کے ساتھ مختلف وضعوں میں قطر کے کم سے کم دس مشاہدات کیجیے اور ان کو جدول (22.1) میں درج کر کے اوسط قطر محسوب کیجیے۔

معمولی ترازو اور معیاری اوزان کو استعمال کر کے قرص (دائروی) کی کمیت معلوم کیجیے۔ دھاگے کو قرص کے گرد لپٹ کر اس کا محیط $2\pi R$ معلوم کیجیے اور قرص کے نصف قطر (R) کو محسوب کیجیے۔ (قرص کے نصف قطر R کو متبادل طور پر سرلچاپ کے ذریعے بھی معلوم کیا جاسکتا ہے) اب آپ تعلیقی محور کے گرد قرص کے محور کے معیار اثر (I) کی تحسیب کر سکتے ہیں۔ مدور قرص کے لیے "I" کی قیمت ہوگی۔

$$I = \frac{MR^2}{2} \qquad (22.4)$$

نوٹ: اگر L اور B طول و عرض کی M کمیت والی مستطیلی پلیٹ استعمال کی جائے تو I کی قیمت ہوگی۔

$$I = \frac{M\left(L^2 + B^2\right)}{12} \qquad (22.5)$$



شکل (22.1)

جدول (22.1)

سلسلہ نشان	پیچ اسکیل کی ریڈنگ a(mm)	کسر پیما کی ریڈنگ مشاہدہ کردہ x	تصحیح کردہ b = x + c	پیاش کردہ کسر x(mm) =bxL	مجموعی قطر 2r(mm) (= a + x)

اوسط قطر 2r = -------- mm

اوسط نصف قطر r = ------mm

قرص کی کمیت M = ----------- g = ----------- Kg

قرص کا محیط $(2\pi R)$ cm=-------------- m

قرص کا نصف قطر R = ---------- cm = --------- m

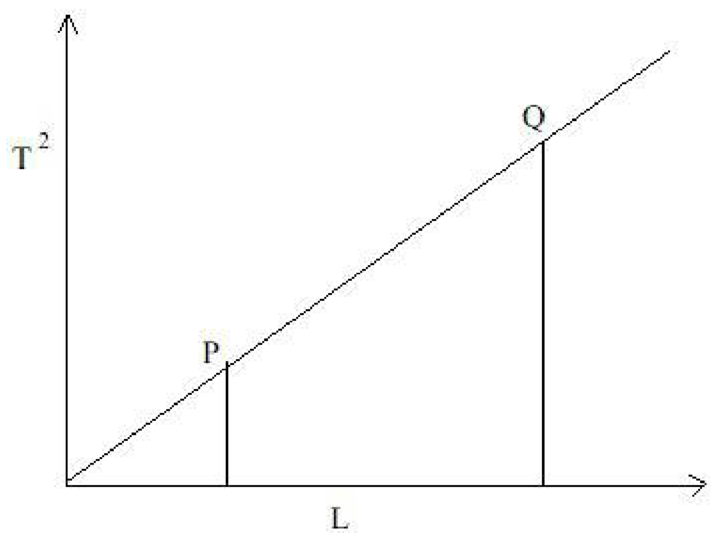
مشاہدات کو جدول (22.2) میں درج کیجیے۔ $\frac{l}{T^2}$ کی اوسط قیمت معلوم کر کے مساوات (22.3) سے 'n' کی قیمت کی تحسیب کیجیے۔

شکل (22.1) کے مطابق مروڑی رقاص کو ترتیب دیجیے۔ نقاط A اور B نے درمیان کے طول l کی پیائش کیجیے۔ شہد کی مکھی کے موم کے ذریعے ایک چھوٹی پن کو قرص کے کنارے کے مقابل عموداً جوڑ دیجیے۔ معمل کی میز پر ایک ایسادہ حوالے کے انتصابی پن کو مروڑی رقاص کے بالمقابل اس طرح رکھا جاتا ہے کہ رقاص کی سکونی حالت میں قرص سے جڑی ہوئی چھوٹی پن اس حوالے کی پن پر عین منطبق رہے۔ قرص کو اس کی اپنی مستوئی میں ایک چھوٹے زاویے میں گردش دے کر چھوڑ دیجیے تا کہ نظام میں مروڑی اہتزاز کا آغاز ہو جائے۔ (20) اہتزازوں کے لیے درکار وقت (t) معلوم کیجیے۔ تجربے کو دہرایئے اور (t) کی دو آزمائشوں کا اوسط معلوم کیجیے۔ وقت دوران T کو محسوب کیجیے۔ تار کے طول کو بدل کر 'l' کی تین یا زائد قیمتوں کے لیے تجربہ کو دہرایئے۔

'l' کو x- محور اور اس کے متناظر کو y- محور پر لے کر ایک ترسیم کھینچیے۔ آپ کو ایک خط مستقیم حاصل ہوگا۔ جو مبدا سے گزرتا ہے (شکل 22.2) خط مستقیم کے ڈھلان کے مقلوب 'b' کو محسوب کیجیے (جو مساوی ہوتا ہے PR) اور QR کو معلوم کرنے کے دوران منتخبہ پیمانوں کا لحاظ رکھیے۔

ڈھلان کے مقلوب کی مدد سے بھی آپ تار کے مادے کے استواری کا معیار محسوب کر سکتے ہیں اس طرح کہ

$$n = \frac{8\pi I}{r^4} \times b$$



شکل 22.2

22.5 مشاہدات اور تحسیب (Observation and Analysis)

پیچ کی گھائی 'P' ہوگی۔ $P = \frac{S}{N} = ------ mm$

خطا صفری E ہوگی۔ درجہ --------- = E

صفری تصحیح 'C' ہوگی۔ درجہ ----------- = (C = -E)

شماراقل 'L' ہوگا۔

جدول(22.2)

سلسلہ نشان	مروڑ رقاص کا طول l_m	آزمائش 1	آزمائش 2	اوسط t sec	وقت دوران d_1 in sec	T^2 in sec^2	$\frac{l}{T^2}\, ms^{-2}$

$\frac{l}{T^2}$ کی اوسط قیمت =

مدورقرص کے جمود کے معیاراثر کی مطلوبہ قیمت

$$\left[1 = M\frac{R^2}{2}\right] = \text{.............................}\quad kg\, m^2$$

جدول (22.2) سے معلوم کردہ $\frac{l}{T^2}$ کی اوسط قیمت........................ ms^{-2}

مساوات (22.3) کے استعمال سے تار کے مادے کی استواری کا معیار n ہوگا۔

$$Nm^{-2} = \text{..............}$$

خط مستقیم گراف کے ڈھلان کا مقلوب b :

$$b = \frac{PR}{QR} = \text{................................}\, ms^{-2}$$

گراف اور مساوات (22.3) سے استواری کا معیار ہوگا۔

$$n \quad = \quad Nm^{-2}\ \text{..........................}$$

22.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

1. تار کے تراش عمودی کے نصف قطر کی پیمائش بہت زیادہ صحت کے ساتھ کرنا چاہیے۔ چوں کہ ضابطے میں یہ چوتھی قوت کے طور پر استعمال ہورہا ہے۔
2. مروڑی رقاص کا طول l حقیقت میں تار کا طول ہے۔
3. اس امر کا یقین کرلیں کہ رقاص (Pendulum) کے اہتزاز (چھوٹے حیطے کے ساتھ) اس کی اپنی مستوئی ہی میں ہوں۔ کسی اور سمت میں اس کی حرکت نہ ہونے پائے۔

22.7 روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

اس تجربے کی تکمیل کے بعد آپ روزمرہ کی زندگی میں :

(الف) پالیمر (Polymer) کی خصوصیات کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کرسکتے ہیں۔

(ب) سخت رگڑ اور محلول کے درمیان قوت رگڑ (Frictional Force) کو معلوم کرسکتے ہیں۔

22.8 تجربی نتائج (Experimental Result)

☆ اگر قرص کو چھوٹے سے زاویہ میں چھوڑ دیا جائے تو یہ اہتزاز کرنا شروع کرے گا۔ اس اہتزاز یہ کو مروڑی اہتزاز کہا جاتا ہے۔

☆ مروڑی رقاص کا وقت دوران $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}}$

☆ تار کے مادے کے استواری کا معیار n ہوگا $\frac{8\pi I}{r^4}\times b$

22.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

استواری کا معیار : تناسبی حد کے اندر شکلی فساد کی نسبت

جفت (Couple) : دو مساوی ومختلف سمتوں والی قوتیں جو غیر ہم خط ہوں

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check your Information Questions)

1۔ جمود کے معیار اثر سے کیا مراد ہے؟

2۔ جمود کے معیار اثر کی ایس آئی اکائی کیا ہے؟

3۔ مروڑی اہتزاز کو بیان کرو۔

4۔ استورای کے معیار سے کیا مراد ہے؟

5۔ استورای جسم کی لچک کا معیار کیا ہوگا؟

6۔ کیا گیس استورای زور کی مزاحمت کرتی ہے؟

Rough Work

اکائی 23۔ گمک کا رحجم کے ذریعے ہوا میں آواز کی رفتار

(Velocity of Sound in Air by Volume Resonator)

اکائی کے اجزا

23.0	تمہید	(Introduction)
23.1	مقصد	(Objectives)
23.2	آلات	(Apparatus)
23.2.1	تشریحی آلات	(Apparatus Explanation)
23.3	نظریہ	(Theory)
23.4	طریقہ عمل	(Procedure)
23.5	مشاہدہ اور تحسیب	(Observation and Analysis)
23.6	احتیاطی تدابیر	(Precautions)
23.7	روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)	
23.8	تجربہ نتائج	(Experimental Result)
23.9	کلیدی الفاظ	(Key Words)

23.0 تمہید (Introduction)

اس تجربے میں آپ سیکھیں گے کہ والیوم ریزونیٹر (Volume Resonator) کو کس طرح ترتیب دیں اور اس کے ذریعے ہوا میں آواز کی رفتار کو معلوم کرنے کے لیے اس کو کس طرح استعمال کریں۔

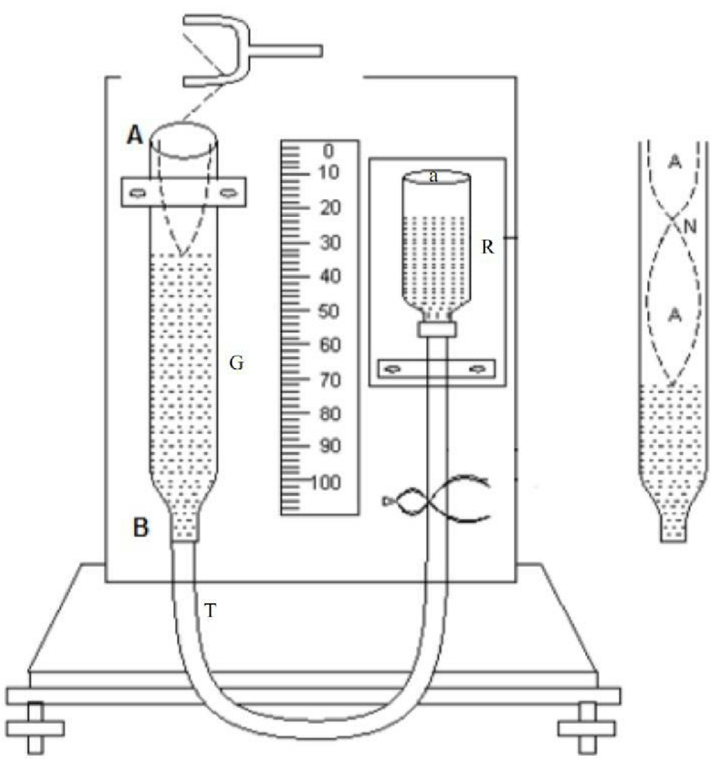
23.1 مقصد (Objectives)

ہوائی کالم کے گمک کے طریقے سے ہوا میں آواز کی رفتار کی تخمین کرنا ہے۔

23.2 آلات (Apparatus)

گمک کی ہوائی نلی	مختلف تعدد کے دوشاخے
ربر کی ہتھوڑی	پانی

23.2.1 تشریح آلات (Explanation Apparatus)



شکل (23.1)

یہ آلہ ایک میٹر کی ہموار نلی G پر منحصر ہوتا ہے جس کا قطر تقریباً 2 تا 3cm ہوتا ہے اور یہ دونوں جانب کھلی ہوتی ہے۔اس کا نچلا سرا تنگ ہوتا ہے جس کو ایک ربر کی نلی 'T' کے ذریعے پانی کے ذخیرہ 'R' سے جوڑ دیا جاتا ہے۔ذخیرہ 'R' کو نیچے یا اوپر کیا جا سکتا ہے یا کسی ایک مقام پر جکڑ دیا جاتا ہے۔ پانی کی بلندی یا ہوائی کالم کے طول کو پٹری 'S' کی مدد سے نوٹ کیا جا سکتا ہے۔

23.3 نظریہ (Theory)

1. کمرے کی تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار

$$Vt = 2n\left(l_2 - l_1\right)cm/\sec$$

جہاں پر

n = دوشاخے کا تعدد Hz

l_1 = پہلے گمک کا طول سنٹی میٹر، l_2^1, l_1^1, n_1 دوسرا گمک کا طول سنٹی میٹر

2. $0^0 C$ تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار

$$V_0 = V_t\left\{1 - \frac{t}{546}\right\}$$

جہاں پر

V_t کمرے کی تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار $t =$ کمرے کی تپش

3. دو۔دوشاخوں کے تعدد کا تناسب

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\left\{l_2^1 - l_1^1\right\}}{\left\{l_2 - l_1\right\}}$$

جہاں پر

l_2^1, l_1^1, n_1 پہلے تعدد والے دوشاخے کے پہلے اور دوسرے گمک کا طول ہیں۔

$l_2, l_1 \quad n_2$ دوسرے تعدد والے دوشاخے کے پہلے اور دوسرے گمک کا طول ہیں۔

23.4 طریقۂ عمل (Procedure)

ذخیرہ 'R' کو اوپر کرتے ہوئے نلی کو پانی سے مکمل بھر دیا جاتا ہے۔ایک معلوم تعدد کے دوشاخے 'n' کو ربر کی ہتھوڑی سے مار کر مرتعش کیا جاتا ہے۔مرتعش دوشاخہ کو نلی کے اوپری سرے پر اس طرح رکھا جاتا ہے کہ ارتعاشات عمودی ہوں۔اب ذخیرہ کو نیچے کرتے ہوئے نلی میں پانی کی سطح کو اس وقت تک کم کیا جاتا ہے جب تک کہ گونج آواز سنائی دے۔ یہ اس وقت ہوتا ہے جب کہ ہوائی کالم اور دوشاخے دونوں گمک

میں ہوں تب دونوں کی تعدد مساوی ہوگی۔ اس حالت میں ذخیرہ R کو جکڑ دیا جائے گا اور ہوائی کالم کا طول پانی کی سطح سے کھلے سرے تک نوٹ کرلیں۔ تجربہ کو دو تا تین مرتبہ دوہرا کر اوسط طول l_1 نوٹ کرلیں۔

ذخیرہ R کو نیچے کرتے ہوئے تجربہ کو وہی دوشاخہ استعمال کرتے ہوئے دہرایا جاتا ہے۔ پھر سے گونج کی آواز سنائی دینے والے مقام کا طول ذخیرہ R کو جکڑ کے نوٹ کیا جاتا ہے۔ تجربہ کو دو تا تین مرتبہ دہرا کر اوسط طول l_2 معلوم کیا جاتا ہے۔ اس مقام پر بھی ہوائی کالم اور دوشاخہ کے تعدد گمک میں ہوتے ہیں۔ یہ طول پہلے طول کا تقریباً تین گنا زیادہ ہوتا ہے۔

کمرے کی تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار کو حسب ذیل ضابطے سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$Vt = 2n\left(l_2 - l_1\right)cm/\sec$$

جہاں پر

$n =$ دوشاخے کا تعدد Hz

$l_1 =$ پہلا گمک کا طول سنٹی میٹر، $l_2 =$ دوسرا گمک کا طول سنٹی میٹر

$0^0 C$ تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار

تجربہ کو مختلف تعدد کے دوشاخوں کو استعمال کرتے ہوئے دہرا کر ہوا میں آواز کی رفتار کی تخمین کی جاتی ہے۔

دو۔ دوشاخوں کے متناسب تعدد میں:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\left\{l_2^1 - l_1^1\right\}}{\left\{l_2 - l_1\right\}}$$

جہاں n_1، n_2 دوشاخوں کے تعدد میں

n_1 l_1^1، l_2^1 پہلے تعدد والے دوشاخے کے پہلے اور دوسرے گمک کا طول ہیں۔

n_2 l_1، l_2 دوسرے تعدد والے دوشاخے کے پہلے اور دوسرے گمک کا طول ہیں۔

23.5 مشاہدات اور حسابی عمل (Observation and Analysis)

جدول ہوا میں آواز کی رفتار کے لیے　　جدول (23.1)　　کمرہ کی تپش $t = {}^0C$ --------

نشان سلسلہ	ٹیوننگ فورک کی فریکوئینسی Frequency of tuning form 'n' in hertz	پہلی گونج کی طول First Resonating length l_1 in cm آزمائش 1	آزمائش 2	اوسط	دوسری گونج کی طول Second Resonating length l_2 in cm آزمائش 1	آزمائش 2	اوسط	ہوا میں آواز کی رفتار Velocity of sound in air $Vt = 2n\{l_2 - l_1\}$ in cm/sec
1								
2								
3								
4								
5								

Total　　　**اوسط=Vt**

کمرے کی تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار کی قیمت $V_t = \dfrac{Total}{No\ of\ Readings}$

کمرے کی تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار کی قیمت $V_t = $ ----------- $cm/\sec$

0^0C تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار=

$$V_0 = V_t\left\{1 - \frac{t}{546}\right\}$$

0^0C تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار $V_o = $ -------- $cm/\sec$

مشاہدہ:

1. کمرے کی تپش $t = {}^0C$ --------
2. $(l_2^1,\ l_1^1)$ پہلے دوشاخے کے لیے = -------------- سینٹی میٹر
3. $(l_2,\ l_1)$ دوسرے دوشاخے کے لیے = -------------- سینٹی میٹر

23.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

1. دوشاخے کو کھلے سرے پر اس طرح رکھا جاتا ہے کہ ایک بازو دوسرے بازو پر ہو۔

2. گمک کے طول کی تخمین ہوائی کالم کو بڑھاتے اور گھٹاتے ہوئے کی جائے۔

3. دوشاخے کا صرف کنارہ ہی کھلی نلی پر رکھا جائے۔

4. ہوائی کالم کے طول پر پیائش اختلاف نظر کے خط کے بغیر نوٹ کی جائے۔

23.7 روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

اس تجربے کے ذریعے مختلف تعداد کے دوشاخے کی مدد سے ہوا میں آواز کی رفتار کو معلوم کیا جاسکتا ہے۔

23.8 تجربی نتائج (Experimental Result)

☆ کمرے کی تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار $Vt = 2n\{l_2 - l_1\}$

☆ صفر ڈگری تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار $V_0 = V_t\left\{1 - \frac{t}{546}\right\}$

☆ دو(2) دوشاخے کی تعداد کا تناسب $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\{l_2^1 - l_1^1\}}{\{l_2 - l_1\}}$

23.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

سمعی آواز	:	جس آواز کی تعداد 20Hz سے کم ہو
سمعی حدود	:	آواز جس کی تعدد 20Hz سے 20000Hz کے درمیان ہو
آواز کی بلندی	:	آواز کا امتراس اس کی تعداد سے معلوم کیا جاتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check your Information Questions)

1۔ گمک کیا ہے؟

2۔ موسیقی آواز کی حدود کیا ہے؟

3۔ سمعی حدود سے کیا مراد ہے؟

4۔ حالائے سمعی آواز (Ultrasonic Sound) کی قیمت کیا ہے؟

5۔ آواز کا امتراد (Pitch) سے کیا مراد ہے؟

6۔ آواز۔۔۔۔۔۔۔۔ کی شکل ہے،

7۔ آواز نور (Light) میں سفر کرسکتی ہے مگر خلا (Space) میں نہیں۔ کیوں؟

Rough Work

اکائی 24۔ یکساں خمیدگی کے ذریعے ینگ کا معیار

(Young's Modulus by Uniform Bending)

اکائی کے اجزا

24.0	تمہید	(Introduction)
24.1	مقصد	(Objectives)
24.2	آلات	(Apparatus)
24.3	نظریہ	(Theory)
24.4	طریقہ عمل	(Procedure)
24.5	مشاہدہ اور تحسیب	(Observation and Analysis)
24.6	احتیاطی تدابیر	(Precautions)
24.7	روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)	
24.8	تجربہ نتائج	(Experimental Result)
24.9	کلیدی الفاظ	(Key Words)

24.0 تمہید (Introduction)

سلاخ کو اس طرح خمیدہ کرنے کے لیے اس کو دو دھاری دار کناروں پر اس طرح رکھیے کہ اس کے بیرونی سرے کناروں کے مساوی فاصلوں پر ہوں اور کناروں پر مساوی فاصلوں پر مساوی اوزان عائد کیے جائیں۔ اس متشکل خمیدگی کی بنا پر سلاخ کا نقطہ وسطی انتصا اوپر کی طرف اٹھے گا۔ اس اٹھان کا مشاہدہ متحرک خردبین سے کیا جاسکتا ہے۔

24.1 مقاصد (Objectives)

متشکل خمیدگی کے ذریعے آپ ایک مستطیلی تراش عمودی والی سلاخ کے مادے کی ینگ کے معیار لچک کی تخمین کریں گے۔

24.2 آلات (Apparatus)

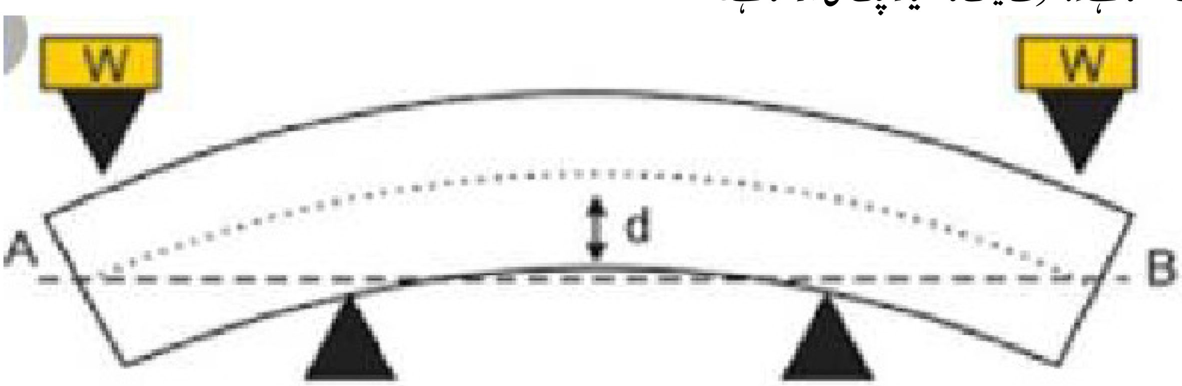
یکساں تراش عمودی (دائروی یا مستطیلی) والی ایک میٹر لمبی سلاخ یا پٹی

مضبوط اور استوار دھاری دار کنارے دو عدد وزن آمیزیے مع شگاف دار اوزان متحرک خردبین

میٹر اسکیل   خرد پیا   ورنیر سر لچاپ

24.3 نظریہ (Theory)

فرض کرو کہ ایک سلاخ جیسے میٹر اسکیل کو دو مساوی اور متضاد جفتوں کے عمل کے ذریعے بموجب شکل (24.1) خمیدہ کیا گیا ہے۔ خمیدگی کی وجہ سے پیدا شدہ بگاڑ کو سلاخ کے کھنچاؤ اور سکڑن کی اصطلاحات میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے لچک کا جو معیار اس خصوص میں زیر بحث آسکتا ہے وہ صرف ینگ کا معیار لچک ہی ہوسکتا ہے۔



شکل (24.1)

سلاخ کے متعلق یہ تصور کیا جاسکتا ہے کہ یہ کئی پتلے ریشوں یا پرتوں پر مشتمل ہے جو طولاً مرکزی محور کے متوازی ہیں۔ سلاخ کے محدب

رخ پر یہ ریشے کھینچ کر لمبے اور معقر رخ پر سکڑ کر چھوٹے ہو جاتے ہیں۔اس کے اندرون میں ایک پرت ایسی بھی ہوتی ہے جس کا طول وہی ہوتا ہے جو سلاخ کے سیدھا رہنے کی صورت میں تھا۔اس خاص پرت کو تعدیلی سطح (Neutral Surface) کہتے ہیں۔شکل میں شکستہ خط اس سطح اور جفت کے عمل کرنے کے مقامات کا قاطع ہے اس خط کو تعدیلی محور بھی کہتے ہیں۔

یکساں خمیدگی کو حاصل کرنے کے لیے سلاخ کو دھاری دار کناروں کے ذریعے افقی وضع میں اس طرح سہارا جاتا ہے کہ اس کے سرے کناروں سے مساوی فاصلوں پر ہوں اور دو مساوی اوزان (کمیت M اور M) تشاکل لٹکانا چاہیے۔فرض کرو کہ ہر دھاری دار کنارے سے اوزان کا فاصلہ a ہے۔ ہر جفت کا معیار Mga ہوگا۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ کناروں کے درمیان سلاخ کی وضع ایک دائرے کی قوس کی بھی ہے۔

دائری قوس کے نصف قطر R کو سلاخ کے وسطی نقطے کی اونچائی 'h' دھاری دار کناروں کے درمیانی فاصلے 'l' کی رقوم میں محسوب کیا جاسکتا ہے۔اگر R اور r کے مقابلے میں 'h' چھوٹا ہو تو

$$R = \frac{1^2}{8h} \qquad 24.1$$

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ سلاخ پر عمل کرنے والے خمیدگی کا معیار (Bending Moment) $\frac{YAk^2}{R}$ کے مساوی ہوگا۔ جہاں Y سلاخ کے مادے کے ینگ کا معیار لچک 'A' سلاخ کی تراش عمودی کا رقبہ اور K تعدیلی سطح کے لحاظ سے گھماؤ نصف قطر (Spin Radius) کو تعبیر کرتے ہیں۔

مستطیلی تراش عمودی والی سلاخ کا عرض اور دبازت علی الترتیب 'b' اور 't' ہوں تو

$$A = bt \qquad 24.2\ (a)$$

ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$K^2 = \frac{t^2}{12} \qquad 24.2\ (b)$$

اور دائروی تراش عمودی والی سلاخ کا نصف قطر r ہو تو

$$A = \pi r^2 \qquad 24.3\ (a)$$

اور ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ اس سلاخ کے

$$k^2 = \frac{r^2}{4} \qquad 24.3\ (b)$$

سلاخ کی خمیدگی کا معیار 'Mga' جفت کا معیار ہے۔لہٰذا مساوات (24.1) کو استعمال کرنے سے۔

$$YAK^2 \times \frac{8h}{l^2} = M\,g\,a$$

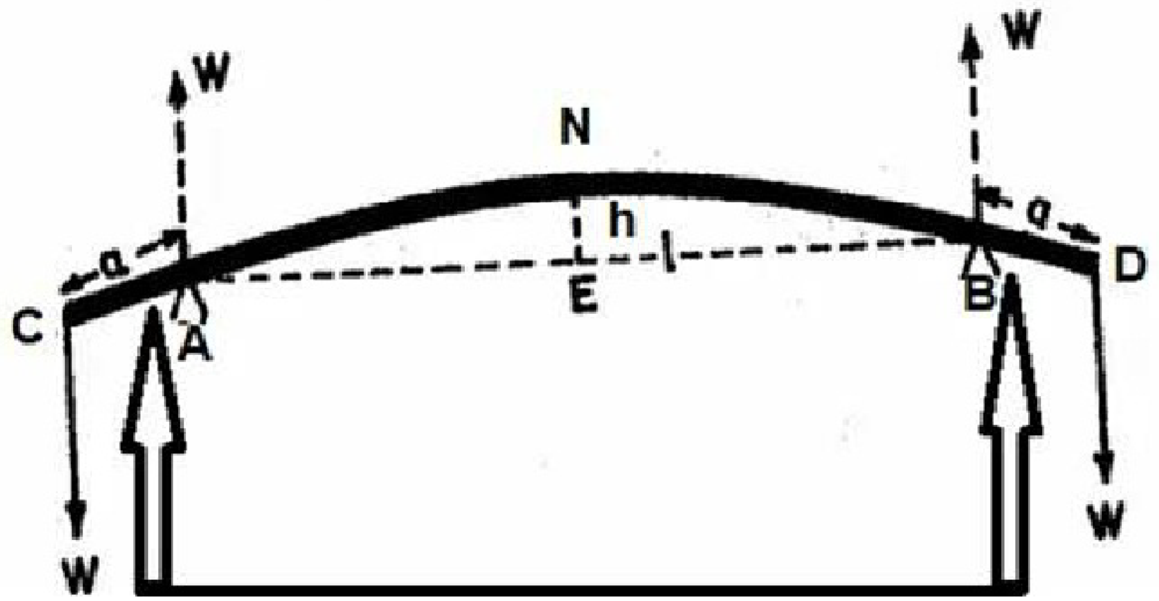
$$\text{or} \qquad Y = \frac{M\,g\,a\,l^2}{8h\left(AK^2\right)} \qquad 24.4$$

مستطیلی تراش عمودی والی سلاخ کے لیے

$$Y = \frac{3M\ g\ a \times l^2}{2h\left(bt^3\right)} \qquad 24.5$$

24.4 طریق عمل (Procedure)

بموجب شکل 24.2 دی گئی سلاخ کو دیے ہوئے مضبوط دھاری دار کناروں پر اس طرح رکھو کہ سلاخ کے مساوی طول کے کناروں سے باہر نکلے ہوئے ہیں۔



شکل (24.2)

سلاخ کے ہر باہر نکلے ہوئے سرے سے ایک ایک وزن آویزیہ مع قائم وزن اپنے قریب ترین دھاری دار کنارے سے کسی فاصلے 'a' پر لٹکائیے۔سلاخ کے وسطی نقطے پر ایک پن کو موم کے ذریعے انتصابا چپکا دیجیے۔متحرک خرد بین کو پن پر اس طرح فوکس کیجیے کہ پن کی اوپری نوک صلیبی تاروں کے افقی تار سے عین منطبق ہوجائے۔خرد بین سے لگے ہوئے انتصابی پیمانے کے ورنیر کے مشادہ کو نوٹ کر لیجیے۔اب ہر دو آویزیوں (W,W) پر (0.1kg 0.5kg) کا وزن جب کہ سلاخ کی بجائے لکڑی کی میٹر اسکیل استعمال کی گئی ہو) کا قائم وزن رکھیے اور ہر صورت میں خرد بین کے مشاہدہ کو نوٹ کیجیے۔

اب کسی وزن M سے پیدا ہونے والے اٹھان h کو ابتدائی قائم وزن کے مشاہدہ اور وزن M سے حاصل کیے ہوئے مشاہدہ کے فرق سے محسوب کیجیے۔تجربہ کو a کی دیگر قیمتوں کے لیے دہرائیے۔سلاخ کے عرض 'b' اور دبازت (t) کو علی الترتیب سرلچاپ اور خرد پیما کے ذریعے پیمائش کیجیے۔ان کے چند مشاہدات کا اوسط معلوم کیجیے۔آپ دیکھیں گے کہ نسبت کی قیمت بہت بڑی حد تک مستقل رہتی ہے۔اس سے ہوکر کے کلیے کی تصدیق ہوتی ہے۔

24.5 مشاہدات وتحسیب (Observation and Analysis)

سلاخ کا اوسط عرض b = -------- Cm -------m

سلاخ کی اوسط دبازت t = ---------Cm -------m

دھاری دار کناروں کا درمیانی فاصلہ l= --------Cm ---------m

آویزیوں کا اپنے قریب ترین دھاری دار کناروں سے فاصلہ Q = --------- -------- m

اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین $g = 9.8 m s^{-2}$

جدول (24.1)

$\frac{M}{h}$ in kg / m	M کلوگرام وزن کے باعث اٹھان h-Cm	خردبین کے انتصابی ورنیزاسکیل کے مشاہدات جب کہ وزن میں			ہرآویزے پر عائد کردہ وزن MKg	سلسلہ نشان
		اوسط	کمی ہورہی ہو	اضافہ ہورہا ہو		
					قائم وزن (D)	1
					D + 0.5 kg	2
					D + 1.0	3
					D + 1.5	4
					D + 2.0	5
					D + 2.5	6
					D + 3.0	7
					D + 3.5	8

اوسط قیمت $\frac{M}{h}$

ینگ کا معیار لچک y ہوگا:

$$Y = \frac{3}{2}\frac{gal}{bt^3}\left(\frac{M}{h}\right)Avg \qquad N^2m^{-2}$$

24.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

1. اوزان کے اصافے اور کمی کے دوران سلاخ جائے سہارا وغیرہ درہم برہم ہونے نہ پائے۔
2. خردبین کے مشاہدہ کو نوٹ کرنے میں توقف کرنا چاہیے تاکہ پن کی اوپری نوک ساکt ہوجائے اور لگائے گئے وزن سے سلاخ مکمل طور پر خم ہوجائے۔
3. خردبین کے اسکرو کو ہمیشہ ایک ہی سمت میں گھمانا چاہیے تاکہ رجعی حرکت (Black Lash) سے پیدا ہونے والی غلطی کا تدارک ہوجائے۔

24.7 روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

اس تجربے کے ذریعے آپ ہوک(Hook) کے کلیے کی تصدیق کر سکتے ہیں۔مختلف مادوں سے بنی یکساں تراش کا عمودی والی سلاخوں کے ینگ (Young) کے معیار کو معلوم کر سکتے ہیں۔

24.8 تجربی نتائج (Experimental Result)

مستطلی تراش عمودی والی سلاخ کے لیے ینگ کا معیار ہوگا۔ $Y = \frac{3}{2}\frac{gal}{bt^3}\left(\frac{M}{h}\right)Avg$

24.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

تعدیلی سطح (Neutral Surface) : سلاخ کے سیدھا رہنے کی صورت

ینگ کا معیار (Young's Modulus): طولی زور اور اس سے پیدا شدہ بگاڑ کی نسبت

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check your Information Questions)

1. کیا پوری سلاخ کی شکل دائرہ کی ایک قوس ہوگی؟ (a) جب کہ سلاخ کو حسب بالا بیان کے مطابق خمیدہ کیا گیا ہو (b) جب کہ سلاخ کے ایک سرے کو میز کے کسی جانب جکڑ دیا گیا ہو اور میز سے باہر نکلے ہوئے سلاخ کے دوسرے سرے کے قریب اوزان لٹکا کر اس کو خم

کیا گیا ہو۔

2. یکساں دائروی تراش عمودی والی سلاخ کے مادے کے یکساں خمیدگی کے معیار لچک کے لیے ایک ضابطہ اخذ کیجیے (اشارہ مساوات (24.2) کو $A = \pi r^2$ اور $K = r^2/4$ کو استعمال کیجیے۔

3. یکساں تراش عمودی والی لوہے کی سلاخ کا نصف قطر 0.32Cm ہے دھاری دار کناروں کا درمیانی فاصلہ 0.5m ہے۔ ایک کلوگرام کے لیے اٹھان کی قیمت 0.2cm معلوم کی گئی ہے۔ لوہے کے ینگ کا معیار لچک معلوم کیجیے جب کہ وزن کو دھاری دار کناروں سے 0.1m کے فاصلے پر لٹکایا گیا ہے۔

4. لوہے اور لکڑی کے معیار ہائے لچک علی الترتیب $20 \times 10^{10}\ Nm^{-2}$ اور $1.0 \times 10^{10}\ Nm^{-2}$ میں لوہے اور لکڑی کی یکساں سلاخیں ہیں جن کے تراش عمودی کے رقبے مساوی ہیں۔ یہاں کے تجربات دونوں سے کیے گئے جب کہ ہر دو کے لیے دھاری دار کناروں کا درمیانی فاصلہ 0.6m ہے۔ آویزیوں کا قریب ترین دھاری دار کناروں سے فاصلہ 0.1m اور ان پر عائد کردہ 0.5Kg وزن کے لیے اگر لوہے کے وسطی نقطے کی اٹھان 0.38mm ہو تو انہیں حالات کے تحت لکڑی کے وسطی نقطے کی اٹھان معلوم کیجیے۔

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check Your Information Questions)

1. دونوں صورتوں میں یہ ایک دائرے کی قوس نہیں ہو سکتے۔

2. اشارہ۔ مساوات (24.2) کو $A = \pi r^2$ اور $k^2 = \frac{r^2}{4}$ کے ساتھ استعمال سے

$$Y = \frac{M\ g\ a\ l^2}{8h\left(Ak^2\right)} = \frac{M\ g\ a\ l^2 \times 4}{8h \times \pi r^2 \times r^2} \qquad Y = \frac{M\ g\ a\ l^2}{2\pi h\, r^4}$$

3. دیا گیا ہے جب کہ $M = 1kg, g = 9.8ms^{-2},\ a = 0.1m, l = 0.5,\ r = 0.32 \times 10^{-2}\,m,\ h = 0.2 \times 10^{-2}\,m$

$$Y = \frac{M\ g\ a\ l^2}{2\pi h r^4}$$

$$= \frac{1 \times 9.8 \times 0.1 \times (0.5)^2 \times 7}{2 \times 22 \times \left(0.32 \times 10^{-2}\right)^4 \times 0.2 \times 10^{-2}}$$

$$= 18.6 \times 10^{10}\ Nm^{-2}$$

4. لکڑی کی سلاخ کے وسطی نقطے کی اٹھان ہو گی۔

$$h = 7.6 \times 10^{-3}\,m$$

Rough Work

Maulana Azad National Urdu University

B.Sc. Physics I Semester Examination

Practical Model Paper

Paper: BSPH150CCP: میکانیات (Mechanics)

Time: 3 hrs Marks: 50

(1) اُڑان پہیئے کی دائرگی حرکت سے جمود کے معیار اثر کی تخمین کریں۔

(2) جمود کا معیار اثر (گردشی قیمت) کو اُڑان پہیے کی دائرگی حرکت سے معلوم کریں۔

(3) دوریشی تعلیق (Bifilar Suspension) کی مدد سے جمود کے معیار اثر کی تخمین کی جائے۔

(4) جمود کے معیار اثر کی قیمت دوریشی تعلیق کی مدد سے تخمین کریں۔

(5) مرکب رقاص کو استعمال کرکے اپنے مقام کی زمینی کشش "g" کی قیمت کو معلوم کیجیے۔

(6) $l-t^2$ ترسیم کی قیمت سے اپنے مقام کا زمینی کشش 'g' کی قیمت مرکب رقاص کو استعمال کرکے تخمین کریں۔

(7) صوت پیما (Sonometer) کو استعمال کرکے گھریلو تبادل رو کی سپلائی کے تعدد کی پیائش کی جائے۔

(8) تبادل رو کی سپلائی کے تعدد کی پمائش کے لیئے صوت پیما کا استعمال کریں۔

(9) مروڑی رقاص کا استعمال کرتے ہوئے ایک تار کے مادے کی استواری کے معیار کی تخمین کریں۔

(10) T^2-l کی ترمیم کی مدد سے تار کے مادے کی استواری کے معیار مروڑی رقاص کی مدد سے معلوم کی جائے۔

(11) ہوائی کالم کے گمک کے طریقے سے ہوا میں آواز کی رفتار کی تخمین کریں۔

(12) ہوائی کالم کے گمک کے طریقے سے $0^\circ c$ تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار کو معلوم کریں۔

(13) ہوائی کالم کے گمک کے طریقے سے دو دو شاخوں کے تعدد کا تناسب کو معلوم کریں۔

(14) متشکل خمیدگی کے ذریعے ایک مستطیلی تراش عمودی والی سلاخ کے مادے کی ینگ کے معیار لچک کی تخمین کریں۔

(15) مستطیلی تراش عمودی والی سلاخ کے مادے کی ینگ کے معیار لچک کو متشکل خمودگی کے ذریعے معلوم کریں۔

☆☆☆

اہم نکات/Notes

اہم نکات/Notes