اکائی 1 شماریات کے معنی اور وسعت

UNIT-1 : MEANING AND SCOPE OF STATISTICS

Structure

Objectives
Introduction
Meaning of Statistics
Statistics Defined in Plural Sense
Statistics Defined in Singular Sense
Descriptive and Inferential Statistics
Functions of Statistics
Importance of Statistics
Limitations of Statistics
Distrust of Statistics
Let Us Sum Up
Key Words
Answers to Check Your Progress
Terminal Questions/Exercises

ساخت

1.0 مقاصد
1.1 تمہید
1.2 شماریات کے معنی
1.2.1 جمع کے مفہوم میں شماریات کی تعریف
1.2.2 واحد کے مفہوم میں شماریات کی تعریف
1.3 بیانی اور استنباطی شماریات
1.4 شماریات کے افعال
1.5 شماریات کی اہمیت
1.6 شماریات کے حدود
1.7 شماریات کی بے اعتباری
1.8 خلاصہ
1.9 کلیدی الفاظ
1.10 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات
1.11 امتحانی سوالات / مشقیں

1.0 مقاصد Objectives

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:۔

- لفظ 'شماریات' کی تعریف کر سکیں۔
- بیانی اور استنباطی شماریات میں فرق کر سکیں۔
- شماریات کے مختلف افعال بیان کر سکیں۔
- مختلف میدانوں میں شماریات کے طریقوں کی وضاحت کر سکیں۔
- شماریاتی طریقوں کی محدودیت کی تشریح کر سکیں۔
- شماریات کی بے اعتباری کے اسباب کی وضاحت کر سکیں۔

1.1 تمہید Introduction

ریات کوئی نیا علم نہیں بلکہ اتنا ہی قدیم ہے جتنا کہ انسانی سرگرمیاں۔ بہر صورت اس کی افادیت کا دائرہ زمانے کے ساتھ ساتھ بڑھتا جا رہا ہے۔
یم زمانے میں اس کو 'علم جہانبانی' سمجھا جاتا تھا اور حکومت کی انتظامی سرگرمیوں کی ضمنی پیداوار مانا جاتا تھا جس کی وجہ سے اس کی کارکردگی کا دائرہ
دود ہو کر رہ گیا تھا۔ اس زمانے میں حکومتیں، انتظامی مقاصد کی خاطر، آبادی، پیدائش، اموات وغیرہ کے رکارڈ رکھا کرتی تھیں۔ در حقیقت

انگریزی زبان کے لفظ Statistics لاطینی لفظ Status یا اطالوی لفظ Statista یا جرمن لفظ Statistik سے ماخوذ ہے جن میں سے ہر ایک کے معنی ہیں 'سیاسی مملکت (Political State)' شماریاتی طریقوں کو اب مختلف نوعیت کے شعبوں مثلاً زراعت، معاشیات، عمرانیات، انتظام کاروبار وغیرہ میں بہ کثرت استعمال کیا جارہا ہے۔ اسی اکائی میں آپ شماریات کے معنی اور تعریف، بیانی اور استنباطی شماریات کے فرق، شماریات کے افعال، شماریات کی اہمیت 'اس کے حدود اور بے اعتباری کا مطالعہ کریں گے۔

1.2 شماریات کے معنی Meaning of Statistics

لفظ شماریات کو متعدد طریقوں میں استعمال کیا جاتا ہے۔ بعض اوقات حقائق یا مواد کے عددی بیانات کا حوالہ دینے کے لئے اس کو جمع کے مفہوم میں استعمال کیا جاتا ہے تو دوسری جانب کسی قابل مطالعہ مضمون جیسے ریاضیات، معاشیات وغیرہ کا حوالہ دینے کے لئے واحد کے مفہوم میں بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر جب ہم اپنے ملک کے کچھ اعداد و شمار، کا حوالہ دیتے ہیں جیسے ہندوستان میں فی ہزار مردوں کے لئے 932 عورتیں ہیں۔ موجودہ نرخوں پر فی کس قومی پیداوار 51 - 1950 میں 246 روپیوں سے بڑھ کر 86-1985 2596 ہوگئی تو یہاں ہم لفظ شماریات کو جمع کے مفہوم (یعنی مواد) میں استعمال کررہے ہیں۔ ان عددی بیانات کو تیار کرنے کے لئے کسی شخص کو ان طریقوں اور تکنیکوں سے واقف ہونا چاہیئے جو کہ مواد جمع کرنے، منظم کرنے، پیش کرنے اور تجزیہ و ترجمانی کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں۔ ان طریقوں اور تکنیکوں کا مطالعہ ہی شماریات کا علم ہے۔ یہاں پر لفظ شماریات کو واحد مفہوم میں استعمال کیا گیا ہے۔ ان معنوں میں لفظ شماریات کا مطلب ہے، شماریاتی طریقے یا شماریات کا علم۔ اب ہم ان دونوں طریقوں کے متعلق تفصیلی بحث کریں گے۔

1.2.1 جمع کے مفہوم میں شماریات کی تعریف Statistics Defined in Plural Sense

مختلف مصنفین نے شماریات کی مختلف انداز میں تعریف کی ہے۔ ویبسٹر (Webster) کے مطابق "شماریات درجہ بند حقائق ہیں جو کسی ریاست میں عوام کے حالات کی عکاسی کرتے ہیں، خاص طور پر وہ حقائق جو اعداد یا جدول بندیا درجہ بند ترتیب میں ظاہر کئے جاسکتے ہیں"۔ باولے (Bowley) کے لئے شماریات "کسی بھی شعبۂ تحقیق میں ایک دوسرے سے باہم مربوط حقائق کے عددی بیانات ہیں"۔ یول اور کینڈال (Yule and Kendall) کے مطابق شماریات کا مطلب ہے "متعدد اسباب سے، قابل لحاظ حد تک متاثرہ مقداری مواد"۔ یہ تعریفیں نہایت محدود ہیں کیونکہ یہ شماریات کے دائرہ کار کو صرف ایسے حقائق یا اعداد تک محدود کرتی ہیں جو یا تو کسی ملک میں عوام کے حالات سے متعلق ہوتے ہیں یا کسی مواد کے کچھ خواص کو مختص کرتی ہیں۔

ہورس سیکرسٹ (Horace Secrist) کے مطابق شماریات سے مراد وہ حقائق (کا مجموعہ) ہیں جو کہ قابل لحاظ حد تک کثرت اسباب سے متاثر ہوتے ہیں، جن کو اعداد میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ جن کا شمار یا تخمینہ معقول معیار صحت کے مطابق کیا جاتا ہے، جن کو پہلے ہی سے طے شدہ مقصد کے تحت منظم طریقے سے اکٹھا کیا جاتا ہے اور جس کو ایک دوسرے سے مربوط رکھا جاتا ہے۔

(a) ان کو حقائق کا مجموعہ ہونا چاہیئے :۔ الگ الگ اعداد کو شماریات نہیں کہا جاسکتا۔ انہیں کسی تحقیق کے مخصوص میدان سے متعلق حقائق کے مجموعہ کا حصہ ہونا چاہیئے۔ مثال کے طور پر رام کی ماہانہ آمدنی 2,000 روپے ہے یہ کوئی شماریاتی بیان نہیں۔ بہر حال جب ہم کہتے ہیں کہ رام، احمد اور بیدی کی ماہانہ آمدنی بالترتیب 2,000 ' 2,500 اور 3,000 روپے ہے تو ان کو شماریات کہا جاتا ہے۔

(b) یہ اسباب کی کثرت سے متاثر ہوتے ہیں :۔ کئی اسباب ایسے ہوتے ہیں جو کسی طبعی مظہر کو متاثر کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر کسی شئے کا گھریلو صرف، کئی عوامل سے متاثر ہوتا ہے جیسے آمدنی، ذوق، تعلیم وغیرہ۔ اسی طرح سے گیہوں کی پیداوار، مٹی، بیج، بارش، حرارت وغیر سے متاثر ہوتی ہے۔ ایسے مظاہر سے متعلق مواد کو شماریات کہا جاتا ہے لیکن اگر ایک سے دس تک اعداد کو ان کے مربعوں کے ساتھ لکھیں، تو یہ اعداد اگرچہ ایک سے زیادہ ہیں لیکن شماریات نہیں کہلا سکتے کیونکہ یہ اعداد کثرت اسباب سے متاثر نہیں ہوتے۔

(c) شماریات کو تعداد میں ظاہر کیا جانا چاہیئے :۔ کسی بیان کو 'شماریات' کہنے کے لئے، اس کو تعداد میں ظاہر کیا جانا ضروری ہے لہذا کیفیتی اوصاف جیسے خوبصورتی، آنکھوں کا رنگ وغیرہ کی بالراست پیائش نہیں کی جاسکتی اور اس وجہ سے عام طور پر یہ شماریات کے دائرے میں نہیں آتے۔ ان کو شماریات کے زمرے میں شامل کرنے سے پہلے ان کی مقدار کا تعین ضروری ہے۔ مثال کے طور پر، کسی کالج میں ہم کالی، نیلی یا بھوری آنکھوں والی لڑکیوں کی تعداد کا شمار کر سکتے ہیں۔

(d) ان کو معقول معیار صحت کے مطابق شمار کیا جاتا ہے یا ان کا تخمینہ کیا جاتا ہے :۔ اعداد و شمار کو شمار کیا جاتا ہے یا ان کا تخمینہ کیا جاتا ہے لیکن معقول معیار کی صحت قائم رکھنا ضروری ہے۔ صحت کا درجہ، زیر مطالعہ موضوع کی نوعیت اور مقصد پر منحصر ہوتا ہے۔ فرض کیجئے کہ کسی کالج کے پرنسپال کی حیثیت سے آپ کو بی۔ کام جماعت میں داخلہ لینے والے طلبا کی کارکردگی کی اوسط سطح کو سمجھنے میں دلچسپی ہے۔ اس مقصد کے لئے آپ کو اعلیٰ ثانوی سطح پر طلبہ کے محصلہ نشانات اکٹھا کرنا چاہیئے۔ اس کو دو طریقوں سے کیا جاسکتا ہے۔ پہلے آپ تمام طلبہ کے نشانات کو مکمل طور پر شمار کر سکتے ہیں اور اس کا اوسط نکال سکتے ہیں۔ بصورت دیگر اگر کسی وجہ سے تمام طلبہ کے مکمل نشانات حاصل کرنا ممکن نہ ہو تو ایک نمونے کا انتخاب کر سکتے ہیں۔ اسی نمونے کے محصلہ نتیجہ کی بنیاد پر، آپ تمام طلبہ کی کارکردگی کی اوسط سطح کا تعین کر سکتے ہیں۔ اس طرح سے اعداد و شمار، گنتی یا تخمینہ کے ذریعہ حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ معقول معیار صحت کے نکتہ کو سمجھنے کے لئے ایک اور مثال پر غور کر سکتے ہیں۔ اگر آپ کو ہندوستان میں غذائی فصلوں کی کل پیداوار کا تخمینہ لگانا ہو تو پیائش کی موزوں اکائیاں (یا صحت کی سطح) لاکھوں ٹن ہو سکتی ہیں۔ لیکن اگر آپ سونے کی کل پیداوار کے متعلق رپورٹ کر رہے ہیں تو پیائش کی موزوں اکائی کلوگرام ہو سکتی ہے۔ لہذا، صحت کا درجہ، مطالعہ کی نوعیت اور مقصد پر منحصر ہوتا ہے۔

(e) ان کو منظم طریقے سے کسی پہلے ہی سے طے شدہ مقصد کے لئے جمع کرنا چاہیئے :۔ مواد کو منظم طریقے سے اکٹھا کیا جانا چاہیئے۔ غیر واضح طریقہ سے اکٹھا کیا گیا مواد کسی خاص مقصد کی تکمیل نہیں کرتا۔ مواد اکٹھا کرنے کے مقصد کا پہلے سے ہی تعین کیا جانا چاہیئے۔ مقصد مخصوص اور واضح ہونا چاہیئے۔ اگر تحقیق کا مقصد واضح نہ ہو تو، عین ممکن ہے کہ ہم مواد توقع سے بہت زیادہ یا بہت کم اکٹھا کریں۔

(f) ان کو ایک دوسرے سے مربوط کرنا چاہیئے :۔ عددی حقائق کو اعداد و شمار سے موسوم کرنے کے لئے ان کا قابل تقابل ہونا ضروری ہے۔ مثال کے طور پر کسی سال کے دوران کسی شئے کی پیداوار اور برآمد کے اعداد و شمار باہم مربوط ہوتے ہیں جن کو یکجا کیا جائے تو اعداد و شمار کہلاتے ہیں۔ لیکن اگر آپ کے پاس تین اعداد و شمار ہیں۔ (1) 1986ء میں ہندوستان میں چاول کی پیداوار (2) 1987ء میں امریکہ میں پیدا ہونے والے بچوں کی تعداد (3) 1988ء میں برطانیہ میں رجسٹر شدہ موٹر کاروں کی تعداد۔ اگرچہ یہ اپنی جگہ پر بہترین حقائق ہو سکتے ہیں لیکن، بحیثیت مجموعی ان کو اعداد و شمار نہیں کہا جاسکتا کیونکہ ان میں باہم رابطہ نہیں ہے۔

لہذا یہ بات واضح ہے کہ تمام اعداد و شمار حقائق کے عددی بیانات ہوتے ہیں لیکن تمام حقائق کے عددی بیانات اعداد و شمار نہیں ہوتے۔ ان کو اسی صورت میں اعداد و شمار کہا جاسکتا ہے جب کہ ان میں مندرجہ بالا خواص موجود ہوں۔

1.2.2 واحد کے مفہوم میں شماریات کی تعریف Statistics Defined in Singular Sense

صحیح فیصلہ سازی میں استعمال کے لئے عددی معلومات اکٹھا کرنا، منظم کرنا، پیش کرنا، تجزیہ کرنا اور تعبیر کرنا ضروری ہے۔ ہمیں ان طریقوں کی ضرورت ہوتی ہے جو کہ اس تعلق سے ہماری مدد کر سکتے ہیں۔ چنانچہ جب واحد مفہوم میں استعمال ہوں تو شماریات سے مراد وہ ایسے طریقوں کا مجموعہ ہوگا جو مواد کی یکجائی، تجزیہ اور تاویل کے آلات فراہم کرتا ہے۔ یہاں پر بھی مختلف ماہرین نے شماریات کی مختلف انداز میں تاویل کی ہے۔ ب ہم ان تعریفوں میں سے چند پر بحث کریں گے۔

ثال کے طور پر باؤلے (Bowley) نے متعدد تعریفیں بیان کی ہیں لیکن ان میں سے ایک بھی جامع نہیں ہے۔ یہ در حقیقت وقت کے ساتھ اتھ شماریات کے فروغ و ترقی کی نشاندہی کرتی ہیں۔ ان میں سے کچھ تعریفیں ہیں۔

(i) شماریات کو شمار کرنے کا علم کہا جاسکتا ہے۔

(ii) شماریات کو بحیثیت طور پر اوسط (averages) کا علم کہا جاسکتا ہے۔

(iii) شماریات، تمام تر مظاہر میں بہ حیثیت مجموعی معاشرتی تنظیم کی پیمائش کا علم ہے۔

کراکسٹن اور کاؤڈن (Croxton and Cowden) نے شماریات کی سہل اور صحیح تعریف پیش کی ہے۔ ان کے مطابق "شماریات، عددی مواد کی یک جائی، پیش کشی، تجزیہ اور تاویل کا علم ہے"۔

سلیگمین (Selligman) کی پیش کردہ تعریف اتنی ہی سادہ لیکن جامع ہے۔ اس کے مطابق "شماریات وہ علم ہے جو تحقیق کے کسی بھی پہلو پر کچھ روشنی ڈالنے کے لئے مواد یکجائی، درجہ بندی، پیش کشی اور اس کے تقابل اور تاویل کے طریقوں سے بحث کرتا ہے۔

موخرالذکر دونوں تعریفیں نہایت صحیح اور قابل فہم ہیں اور شماریاتی طریقوں کی وسعت کی نشاندہی کرتی ہیں۔ شماریات کا علم ہم کو (1) مواد اکٹھا کرنے (2) مواد کی درجہ بندی اور جدول بندی (3) مواد کی پیش کشی (4) مواد کا تجزیہ اور (5) مواد کی تاویل سے متعلق اور تکنیکوں کی تعلیم دیتا ہے۔ چنانچہ مندرجہ بالا بحث سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ لفظ 'شماریات' کو ہم جمع کے مفہوم میں مواد کا حوالہ دینے کے لئے یا واحد کے مفہوم میں کسی غیر یقینی صورتحال کے پیش نظر معقول فیصلے کرنے کیلئے کچھ طریقوں کے مجموعہ کا حوالہ دینے کے لئے استعمال کرسکتے ہیں۔

1.3 بیانی اور استنباطی شماریاتی Descriptive and Inferential Statistics

جیسا کہ آپ جانتے ہیں واحد مفہوم میں "شماریات" تحقیق کے کسی بھی شعبے میں مواد کی یکجائی، پیشکش، تجزیے اور تاویل کے اصولوں اور طریقوں کا علم ہے۔ یہ طریقے اور تکنیکیں اسقدر متنوع ہیں کہ ماہرین شماریات ان کو دو زمروں میں تقسیم کرتے ہیں۔ (1) بیانی شماریات (2) استنباطی شماریات۔

بیانی شماریات کا تعلق ان مختلف پیمانوں سے ہوتا ہے جو مواد کی امتیازی خصوصیات کو بیان کرنے کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں ان پیمانوں میں مرکزی رجحان کے پیمانے، انتشار کے پیمانے وغیرہ شامل ہیں۔ مواد کو ظاہر کرنے والی ترمیمات، جدول اور چارٹ وغیرہ بھی بیانی شماریات کی مثالیں ہیں۔ فرض کرو کہ بی کام سال اول کے طلبہ کی تعداد 100 ہے اور آپ ان طلبہ کے اوسط نشانات کو محسوب کرتے ہیں تو آپ بیانی شماریات کا استعمال کر رہے ہیں۔ اسی طرح سے اگر آپ اسی جماعت کے 25 طلبہ کے ایک نمونے کے اوسط نشانات کو محسوب کر رہے ہیں اور اس جماعت کے تمام طلبہ پر اس کی تعمیم کی کوشش نہیں کر رہے ہیں تو آپ ہنوز بیانی شماریات کا استعمال کر رہے ہیں۔

استنباطی شماریات، اس کے برعکس، نمونہ مواد (Sample data) کی بنیاد پر آبادی مواد (Population data) کی خصوصیات کے متعلق جائز نتیجوں کے اخذ کرنے کے شماریاتی عمل سے مربوط ہے۔ شماریات میں آبادی کا مطلب صرف انسانی آبادی نہیں بلکہ یہ کسی تحقیقاتی مطالعہ میں کل اشیاء کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔ مندرجہ بالا مثال میں اگر استاد نمونہ اوسط کی بنیاد پر پوری جماعت کے اوسط نشانات کے تخمینہ کا فیصلہ کرتا ہے تو ہم کہیں گے کہ وہ استنباطی شماریات کو استعمال کر رہا ہے۔ یہ امر قابل غور ہے کہ بسا اوقات ہم آبادی کے مواد کی خصوصیات سمجھنے کے لئے نمونہ مواد کو استعمال کرتے ہیں۔ نمونہ پیمانوں (Sample measures) سے محصلہ آبادی سے متعلق نتائج میں غلطی یا تفاوت کا امکان رہتا ہے۔ نظریہ احتمال کی بنا پر ایسی غلطیوں کی قدر کا تخمینہ کیا جاسکتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ A

1. کیا مندرجہ ذیل بیانات شماریاتی مواد ہیں؟

(i) کسی کارخانے کے 100 مزدوروں کی ہفتہ واری اجرت

(ii) رام کا قد چھ فیٹ ہے۔

(iii) موہن کا وزن 6 کلو، احمد کا قد 6.2 فیٹ اور پیٹر کی ماہانہ آمدنی 1,500 روپے ہے۔

(iv) گزشتہ 10 سال کے دوران کسی کمپنی کے مال کی فروخت۔

2. مندرجہ ذیل بیانات پر تبصرہ کیجئے جو ایک سطر سے زیادہ نہ ہو۔

(i) وبسٹر اور سیکرسٹ نے بیانی شماریات کی تعریف یوں کی ہے۔

.....

(ii) یول اور کینڈال کی بیان کردہ شماریات کی تعریف میں سیکرسٹ کی تعریف شامل ہے۔

.....

(iii) کیفیتی مواد کا شماریات کے تحت مطالعہ نہیں کیا جاسکتا۔

.....

(iv) شماریات کے طریقے صرف مواد کے جمع کرنے اور تجزیہ کرنے سے متعلق ہوتے ہیں۔

.....

(v) باؤلے کی بیان کردہ علم (سائنس) شماریات کی تعریف شماریاتی طریقہ کار کے مختلف مرحلوں کا احاطہ کرتی ہے۔

.....

(vi) استنباطی شماریات نمونوں کے مطالعہ سے متعلق ہے۔

.....

1.4 شماریات کے افعال Functions of Statistics

آپ نے شماریات کے مفہوم اور تعریفوں کا مطالعہ کیا۔ آپ نے بیانی (descriptive) اور استنباطی شماریات (inferential statistics) کے درمیان فرق کا بھی مطالعہ کیا ہے۔ اب ہم شماریات کے کچھ اہم افعال کے متعلق بحث کریں گے۔

(1) حقائق کو موزوں شکل میں پیش کرنا :- شماریاتی طریقے عام بیانات کو صحیح اور معیّن شکل میں پیش کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر آپ کہہ سکتے ہیں کہ ہندوستان میں کپاس کی اوسط پیداوار فی ہیکٹر 180 کلوگرام ہے۔ یہ بیان اس بیان سے زیادہ صحیح اور اطمینان بخش ہے اگر یوں کہا جائے کہ ہندوستان میں کپاس کی اوسط پیداوار بہت کم ہے۔

(2) غیر متوازن اور پیچیدہ مواد کو آسان بنانا :- شماریاتی طریقے بے ہنگم اور پیچیدہ مواد کو آسان بناتے ہیں تاکہ وہ آسانی سے قابل فہم بن سکے۔ خام مواد اکثر ناقابل فہم ہوتا ہے۔ اس کے خواص کو سمجھنا کافی مشکل ہوتا ہے تاوقتیکہ مواد کو عام خصوصیات کے مطابق درجہ بندی نہ کیا جائے۔ فرض کرو کہ آپ کو کسی کارخانے میں 1,000 مزدوروں کی ہفتہ وار اجرت دی گئی ہے۔ اس مواد سے آپ کسی قسم کے نتائج اخذ کرنے سے اس وقت تک قاصر رہیں گے جب تک کہ اس کی درجہ بندی کرکے اسے مخصوص شکل میں اس طرح پیش نہ کیا جائے جیسا کہ ذیل میں پیش کیا گیا ہے۔

ہفتہ وار اجرت (روپیوں میں)	مزدوروں کی تعداد
600 سے کم	100
600 - 700	200
700 - 800	400
800 - 900	200
900 سے زیادہ	100
جملہ	1000

(3) تقابل کے لئے تکنیکیں فراہم کرنا :۔ شماریات کا بنیادی مقصد کسی وقت یا مقام میں رونما مختلف طبعی مظاہر کے تقابلی مطالعہ کے لئے سہولتیں فراہم کرنا ہے۔ مثال کے طور پر قومی آمدنی کا تعین صرف شوق کی خاطر نہیں کیا جاتا ہے۔ بلکہ یہ اس لئے کیا جاتا ہے کہ وقتاً فوقتاً آمدنی کا تقابل کیا جائے تاکہ اندازہ قائم کیا جاسکے کہ آیا عوام کا معیار زندگی بڑھ رہا ہے یا نہیں؟ فرض کیجئے کہ 1987ء کے مقابلے میں، 1988ء میں ہندوستان میں فی کس آمدنی میں 10% اضافہ ہوا ہے۔ اس کی مدد سے ہم 1988ء میں کسی ہندوستانی کے معیارِ زندگی پر روشنی ڈال سکتے ہیں۔

(4) مختلف شعبوں میں پالیسی تیار کرنا :۔ شماریاتی طریقے، معاشرتی، معاشی اور کاروباری شعبوں میں مختلف پالیسیوں کی تشکیل دینے میں مدد و معاون ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر حکومت خاندانی منصوبہ بندی پروگرام کی تشکیل میں اموات و پیدائش کے مواد کو استعمال کرتی ہے۔ اسی طرح حکومت اپنے ملازمین کو گرانی الاؤنس کی منظوری کے لئے صارفین کی قیمتوں کے اشاریہ سے متعلق معلومات کو استعمال کرتی ہے۔

(5) مختلف طبعی مظاہر کے درمیان روابط کا مطالعہ کرنا :۔ شماریاتی پیمانے جیسے ہم ربطی اور رجعت (regression) کو استعمال کر کے متغیرات کے درمیان روابط کا مطالعہ کیا جاتا ہے۔ ایسے روابط، فیصلہ سازی کے لئے کافی اہمیت کے حامل ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر آپ کسی پیداوار کی مانگ اور اس کی قیمتوں کے درمیان رابطے کو معلوم کر سکتے ہیں۔ عام طور پر اگر قیمتوں میں اضافہ ہو تو پیداوار کی مانگ میں کمی کا قوی امکان ہوتا ہے۔

(6) مستقبل میں قیمتوں کی پیش قیاسی کرنا :۔ کچھ شماریاتی تکنیکوں کو کسی متغیرہ کی مستقبل میں قیمتوں کی پیش قیاسی کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ گذشتہ 10 سال کی فروخت کے اعداد و شمار کی بنا پر، کوئی مارکٹنگ مینیجر آئندہ سال کے لئے اپنی پیداوار کی امکانی مانگ کا تخمینہ لگا سکتا ہے۔

(7) غیر یقینی کیفیت کی پیمائش کرنا :۔ نظریہ احتمال (Probability theory) کی مدد سے، آپ غیر یقینی واقعہ کے ظہور کے امکان کی پیمائش کر سکتے ہیں۔ نظریۂ احتمال کے تصورات فیصلہ سازی میں کافی مفید ہیں۔ فرض کریں کہ آپ بی۔ کام کے امتحان میں اپنی کامیابی کے امکانات کا جائزہ لینے میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ آپ گذشتہ 10 سال کے دوران طلبا کی کامیابی کے فیصدوں کا مطالعہ کر کے اس کے متعلق اندازہ قائم کر سکتے ہیں۔

(8) کسی مفروضے کی جانچ کرنا :۔ شماریاتی طریقے مفروضات کی تشکیل اور جانچ کیلئے اور نئے نظریات کے فروغ میں بیحد کار آمد ہیں۔ مثال کے طور پر ایک ملیریا کا علاج کرنے والی کمپنی اپنی نئی دوا کی تاثیر کو جاننے میں بے حد دلچسپی رکھتی ہے۔ Chi-square test سے موسومہ شماریاتی تکنیک کے ذریعے ایسا کر سکتی ہے۔

(9) جائز نتائج اخذ کرنا :۔ شماریاتی طریقے نمونہ مواد پر مبنی کائنات (یعنی آبادی) کے خواص کے متعلق نتائج اخذ کرنے میں بھی فائدہ مند ہیں۔

1.5 شماریات کی اہمیت Importance of Statistics

زمانۂ قدیم میں شماریات کو 'علم جہانبانی' کے طور پر استعمال کیا جاتا تھا۔ مملکت کی جانب سے انتظامی مقاصد کے حصول کے لئے مختلف سرگرمیوں جیسے آبادی، پیدائش اور اموات سے متعلق مواد اکٹھا کیا جاتا تھا۔ بہر حال، حالیہ برسوں میں شماریات کے دائرے کو قابل لحاظ حد تک وسیع کیا گیا ہے تاکہ اس میں معاشرتی اور معاشی مظاہر بھی شامل ہو سکیں۔ گزشتہ برسوں کے دوران شماریاتی تکنک کے فروغ نے اس کی وسعت کو کافی پھیلا دیا ہے۔ اب اس کو مملکت کے انتظامی امور کی ذیلی پیداوار کی طرح سے نہیں دیکھا جارہا ہے بلکہ عملاً یہ تمام علوم کا احاطہ کر رہا ہے جن میں معاشرتی، طبعی اور فطری علوم شامل ہیں۔ در حقیقت اب شماریات کا استعمال مختلف النوع شعبوں جیسے زراعت، کاروبار اور صنعت و حرفت، سماجیات، معاشیات، حیات پیمائی (biometry) وغیرہ میں کثرت سے ہو رہا ہے۔ چنانچہ ان دنوں شماریات انسانی سرگرمی کے تقریباً تمام شعبوں میں کار فرما ہے۔

شماریات اور مملکت Statistics and State

پہلے زمانے میں، حکومت کی کارکردگی نظم و ضبط قائم کرنے تک محدود رہا کرتی تھی۔ اس مقصد کے لئے افرادی قوت، جرائم، آمدنی، دولت وغیرہ سے متعلق مواد اکٹھا کیا جاتا تھا تاکہ مناسب فوجی اور مالیاتی پالیسیاں مرتب کی جاسکیں۔ لیکن فلاحی مملکت کے تصور کے آغاز نے مملکت کے کردار کو قابل لحاظ حد تک وسیع کر دیا ہے۔ اس وجہ سے دنیا کی تمام حکومتیں اپنی معاشی اور دیگر پالیسیوں کی تدوین میں آج کل قیمتوں، پیدائش دولت، صرف دولت، آمدنی اور اخراجات وغیرہ سے متعلق مواد کو وسیع پیمانے پر استعمال کر رہی ہیں۔ عوام کے معیار زندگی کو بہتر بنانے کے لئے ترقی پذیر ممالک جیسے ہندوستان وغیرہ، منصوبہ بند معاشی ترقی پر توجہ دے رہے ہیں۔ اس مقصد کے لئے حکومت کو چاہیئے کہ شماریاتی مواد کے صحیح اور قابل اعتماد تجزیہ پر مبنی فیصلے کرے۔ مثال کے طور پر، اپنے پنج سالہ منصوبے کی تشکیل میں، حکومت کو خام مال کی دستیابی، اشیائے اصل، مالیاتی وسائل، مختلف خصوصیات جیسے عمر، جنس، آمدنی وغیرہ کے مطابق آبادی کی تقسیم کے متعلق اندازہ ہونا چاہیئے تاکہ مختلف پالیسیوں کو مدون کیا جاسکے۔

معاشیات میں شماریات (Statistics in Economics)

شماریاتی تجزیہ، مختلف معاشی مسائل جیسے پیدائش و صرف دولت اور تقسیم وغیرہ کے حل کرنے میں بے حد مفید ہے۔ مثال کے طور پر، صرف دولت پر مواد کا ایک تجزیہ، سماج کے مختلف طبقات کا مختلف اشیا پر صرفے کے نمونے کو ظاہر کرتا ہے۔ قیمتوں، اجرتوں، صرف و بچت اور سرمایہ کاری وغیرہ پر مواد، مختلف معاشی پالیسیوں کی تشکیل میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔ اسی طرح سے، قومی آمدنی اور سرمایہ پر مواد، آمدنیوں میں تفاوت کو کم کرنے والی پالیسیوں کی تشکیل کرنے میں کار آمد ہے۔ معاشیات میں شماریات کے استعمال نے کئی معاشی قوانین کی تشکیل میں رہبری کی ہے جیسے اینجل کا قانونِ صرف (Engel's law of consumption) آمدنی کی تقسیم کا قانون (Law of Income Distribution) وغیرہ۔ اشاریاتی اعداد، زمانی سلسلے کا تجزیہ، رجعت کا تجزیہ (Regression analysis) وغیرہ ایسے شماریاتی آلات ہیں جو معاشی منصوبہ بندی میں اہمیت کے حامل ہیں۔ مثال کے طور پر صارف کے اشاریۂ قیمت (Consumer price index) کو گرانی الاؤنس یا مزدوروں کے لیے بونس کی منظوری میں استعمال کیا جاتا ہے۔ زمانی سلسلے کے تجزیہ کو استعمال کر کے طلب (demand) کی پیشن گوئی بھی کی جاسکتی ہے۔ مختلف معاشی مفروضات کو جانچنے کے لئے اب شماریاتی مواد کو بکثرت استعمال کیا جارہا ہے۔

کاروبار اور انتظامیہ میں شماریات Statistics in Business and Management

بڑھتی ہوئی قامت (یعنی سائز) اور مسابقت کی وجہ سے جدید کاروباری اداروں کی سرگرمیاں نہ صرف پیچیدہ ہو رہی ہیں بلکہ ان کی مانگ میں بھی کافی اضافہ ہو رہا ہے۔ بڑے کاروبار کی صورت میں ملکیت اور انتظامیہ میں علحدگی کے باعث پیشہ وارانہ انتظامیہ عالم وجود میں آیا ہے۔ انتظامیہ فیصلہ سازی کی کامیابی متعلقہ معلومات کی دستیابی پر منحصر ہوتی ہے جو کہ شماریاتی مواد سے حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا شماریاتی مواد کو کاروبار اور صنعت کے تمام شعبوں جیسے فروخت، خریداری، پیداوار، مارکیٹنگ، مالیات وغیرہ میں کثرت کے ساتھ استعمال کیا جارہا ہے۔ شماریاتی طریقوں کو آج کل بازار اور یداوار کی تحقیقات میں وسیع پیمانے پر استعمال کیا جارہا ہے۔ نیز سرمایہ کاری پالیسیوں، صنعتی پیداوار کے کوالٹی کنٹرول، معاشی پیشن گوئی، تنقیح

حسابات اور دیگر کئی میدانوں میں بھی وہ قابلِ اطلاق ہیں۔ منتظمین کو درپیش تمام مسائل میں غیر یقینی حالات میں فیصلہ سازی کی ضرورت ایک مشترکہ عنصر ہے۔ شماریات کو غیر یقینی صورتحال میں معقول فیصلہ سازی کے شماریاتی طریقوں کا علم خیال کیا جاسکتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ B

1. شماریات کے افعال بیان کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

2. مندرجہ ذیل بیانات پر یک سطری مختصر تبصرہ کیجئے۔

(i) شماریات صرف پیچیدگیوں کو سہل کرنے کا کام انجام دیتے ہیں۔

.....

(ii) شماریات دیگر علوم کے قوانین کو جانچنے میں ممد و معاون ہیں۔

.....

(iii) مستقبل میں پیش آنے والے واقعات غیر یقینی ہوتے ہیں۔اس لئے شماریات ان کے مطالعہ میں شاذونادر ہی ممد و معاون ہے۔

.....

(iv) شماریات کے بغیر منصوبہ بندی ناقابل تصور ہے۔

.....

(v) کسی بڑے کارپوریشن کا پرسونل آفسر شماریات کے علم کے بغیر قابل عمل پرسونل منصوبے کو ترتیب دے سکتا ہے۔

.....

1.6 شماریات کے حدود Limitations of Statistics

ہم نے شماریات کی اہمیت اور افعال پر بحث کی۔اب ہم شماریات کے حدود (کوتاہیوں) پر بحث کریں گے۔ذیل میں شماریاتی طریقوں کے حدود کا تذکرہ کیا گیا ہے جن کو شماریات کے استعمال کے دوران ذہن میں رکھنا چاہئے۔

(1) **شماریات صرف مقداری خواص سے متعلق ہیں :** شماریات صرف ایسے حقائق سے تعلق رکھتے ہیں جو کہ اعداد میں ظاہر کئے جاتے ہیں۔ اسی لئے وہ نکات جو کہ تعداد میں اظہار کے قابل نہیں، شماریات کے دائرہ بحث میں نہیں آتے۔خوبصورتی، آنکھوں کا رنگ، ذہانت وغیرہ کیفیتی خواص ہیں، لہذا بالراست ان کا مطالعہ نہیں کیا جاسکتا۔ان خواص کا صرف بالواسطہ مطالعہ کرسکتے ہیں جبکہ ان کی کچھ مخصوص عددی قیمت تعین کرکے ان کو عددی طور پر ظاہر کیا جائے۔مثال کے طور پر افراد کے کسی گروہ کی ذہانت کی سطح کا مطالعہ کیا جاسکتا ہے۔اگر ذہنی اشاریہ Intelligence quotations (I.Q's) کو استعمال کیا جائے۔

(2) **شماریات کا تعلق انفرادی اعداد سے نہیں ہوتا :** چونکہ شماریات کا تعلق حقائق کے مجموعہ سے ہے، اس لئے ایک تنہا عدد کو شماریات نہیں

خیال کیا جاسکتا۔ مثال کے طور پر ایک شخص کے قد کی اونچائی غیر اہم ہے جبکہ شماریاتی نقطہ نگاہ سے اشخاص کے ایک گروپ کی اوسط اونچائی اہمیت کی حامل ہوتی ہے۔ اس سیاق میں آپ سیکرسٹ (Secrist) کی دی ہوئی تعریف کا اعادہ کر سکتے ہیں۔

(3) **شماریات کے قوانین قطعی نہیں ہوتے** : طبعی علوم کے قوانین کے برعکس، شماریاتی قوانین قطعی نہیں ہوتے بلکہ چند شرائط کے تابع ہوتے ہیں اور ان کے ساتھ ہمیشہ کوئی اتفاقی عامل کو (Chance factor) شریک کیا جاتا ہے تاکہ یہ قطعی ہو جائیں۔ اس لئے ان پر مبنی نتائج تخمینی ہوتے ہیں، قطعی نہیں۔ ان کا عالمی طور پر استعمال نہیں کیا جاسکتا۔ خالص سائنسی علوم مثلاً طبعیات، کیمیا وغیرہ کے قوانین اپنے اطلاق میں عالمی نوعیت کے ہیں۔

(4) **شماریاتی نتائج صرف اوسطاً صحیح ہوتے ہیں** : شماریاتی طریقے کسی طبعی مظہر کے اوسط رویہ کا اظہار کرتے ہیں۔ کسی کمپنی کے ملازمین کی اوسط آمدنی سے کسی مخصوص فرد کی آمدنی پر روشنی نہیں ڈالی جاسکتی۔ اس لئے یہ کسی طبعی مظہر کے عام مطالعہ میں کار آمد ہوتے ہے۔

(5) **کسی مسئلہ کا مطالعہ کرنے کے متعدد طریقوں میں شماریات صرف ایک طریقہ ہے** : کسی مسئلہ کا مطالعہ کرنے کے متعدد طریقے ہو سکتے ہیں۔ شماریاتی طریقہ ان میں سے صرف ایک ہے۔ تمام امکانی صورتوں کے تحت، شماریاتی آلات بہترین حل فراہم نہیں کرتے۔ بسا اوقات یہ ضروری ہوتا ہے کہ کسی مسئلہ پر سماجی تقاضوں جیسے تہذیب، علاقہ وغیرہ کی روشنی میں غور کیا جائے۔ اس لئے شماریاتی نتائج کو کچھ دوسرے شواہد سے تقویت پہنچانا چاہیئے۔

(6) **شماریات کا غلط استعمال کیا جاسکتا ہے** : مختلف شماریاتی طریقوں کی اپنی کوتاہیاں ہیں۔ اگر انہیں احتیاط سے نہ استعمال کیا جائے تو ان کے غلط نتائج بر آمد ہو سکتے ہیں۔ اس لئے شماریات کی خامیوں میں سب سے بڑی خامی یہ ہے کہ غلط ہاتھوں میں اس کا غلط استعمال کیا جاسکتا ہے۔ بعض اوقات یہ غلط استعمال غیر ارادی یا ارادی ہو سکتا ہے۔ کئی سرکاری ایجنسیاں اور تحقیقاتی ادارے حقائق کو توڑ مروڑ کر پیش کرنے کی جانب راغب ہو سکتے ہیں تاکہ وہ اپنے نقطہ نظر کو صحیح ثابت کریں۔ بالفرض آپ سے یہ کہا جائے کہ کسی سال کے دوران کسی شہر میں خاتون ڈرائیوروں کے موٹر کار حادثوں کی تعداد 10 ہے جب کہ مرد ڈرائیوروں کی صورت میں یہ تعداد 40 ہے۔ ان معلومات کی بنا پر آپ یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ خواتین محفوظ ڈرائیور ہیں۔ اگر ایسا نتیجہ اخذ کریں تو آپ معلومات کی غلط ترجمانی کر رہے ہیں۔ صحیح نتیجہ پر پہنچنے سے پہلے آپ کے لئے یہ جاننا ضروری ہے کہ دونوں اقسام کے ڈرائیوروں کی کل تعداد کتنی ہے۔

1.7 شماریات کی بے اعتباری Distrust of Statistics

شماریات کی علمی اہمیت اور افادیت کے باوجود شماریات کو شک و شبہ کی نظر سے دیکھا جاتا ہے۔ اکثر وہ لوگ اس کو بدنام کرتے ہیں جو اس کے حقیقی مقصد اور خامیوں سے ناواقف ہوتے ہیں۔ ہم اکثر بیانات سنتے ہیں جیسے

"جھوٹ کی تین قسمیں ہیں : جھوٹ، شیطانی جھوٹ اور شماریات"۔ "شماریات کچھ بھی ثابت کر سکتے ہیں"۔ "شماریات کسی بات کو ثابت نہیں کر سکتے"۔ شماریات اول درجے کی جھوٹ ہیں۔ "یہ بیانات شماریات کے بارے میں بے اعتمادی کے مظہر ہیں۔ شماریات میں بے اعتمادی سے ہمارا مطلب یہ ہے کہ شماریاتی مواد، شماریاتی طریقے اور اخذ کردہ نتائج میں اعتبار کا فقدان ہوتا ہے۔ آپ سوال کر سکتے ہیں کہ شماریات کی یہ بے اعتمادی کیوں؟ شماریات میں بے اعتمادی کی وجوہات میں سے چند ایک مندرجہ ذیل ہیں :

(1) مواد پر مبنی مباحث اگرچہ نہایت اطمینان بخش ہوتے ہیں لیکن کوئی بھی فرد اپنی خواہش کے مطابق مواد میں خورد برد کر سکتا ہے۔ کسی مخصوص نقطہ نظر کو ثابت کرنے کے لئے، کبھی کبھی مباحث کو غیر درست مواد سے تقویت دی جاسکتی ہے۔

(2) صحیح اعداد کے استعمال کے باوجود یہ اعداد نامکمل ہو سکتے ہیں اور اس طرح سے پیش کئے جاسکتے ہیں کہ قاری گمراہ ہو جائے۔ فرض کیجئے کہ ایسا پایا گیا ہے کہ صاف موسم کی بہ نسبت کہر آلودہ موسم میں حادثات کی تعداد کم ہوتی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ کہر میں گاڑیاں چلانا زیادہ محفوظ ہے۔ ایسا نتیجہ اخذ کرنا غلط ہے۔ صحیح نتیجہ پر پہنچنے کے لئے ہم کو دونوں موسمی حالات میں ٹرافک کے ہجوم کے فرق پر غور کرنا ضروری ہے۔

(3) شماریاتی مواد کی ظاہری شکل سے ان کی کیفیت کا پتہ نہیں چلتا۔ کبھی کبھی غیر ارادی طور پر بھی غیر صحیح یا نامکمل مواد کو استعمال کر کے گمراہ کن نتائج برآمد کیے جاتے ہیں۔

(4) شماریاتی آلات کی اپنی مخصوص کوتاہیاں بھی ہیں۔ تحقیق کار کو چاہیے کہ ان کو نہایت محتاط طریقے سے استعمال کرے۔ لیکن کبھی کبھی ان آلات اور طریقوں کو ایسے لوگ استعمال میں لاتے ہیں جو ان سے متعلق کم واقفیت رکھتے ہیں یا بالکل ناواقف ہوتے ہیں۔ نتیجہ کے طور پر صحیح اور مکمل مواد پر غلط طریقوں کا اطلاق کر کے ناقص نتائج حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ یہ شماریاتی طریقوں کی غلطی نہیں بلکہ ان کی غلطی ہے جو، انہیں استعمال کرتے ہیں۔

ایک مثال کے ساتھ ہم اس بحث کو ختم کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ بچہ چاقو سے اپنی انگلی کاٹ لیتا ہے۔ اس بچہ کے والدین چاقو پر الزام لگانا شروع کرتے ہیں۔ یہاں غلطی چاقو کی نہیں بلکہ اس بچہ کی ہے جس نے اس کا غلط استعمال کیا۔ یہ بات ذہن نشین کر لینی چاہیے کہ شماریات نہ تو کسی چیز کو ثابت کر سکتے ہیں اور نہ ہی رد کر سکتے ہیں۔ یہ ایک آلہ (یعنی رسائی کا طریقہ) ہے جس کو محتاط طریقے پر استعمال کرنا چاہیے اور صرف وہی لوگ استعمال کریں جو اس مضمون سے بہتر واقفیت رکھتے ہوں۔

1.8 خلاصہ Let Us Sum Up

لفظ شماریات کو ہم جمع یا واحد مفہوم میں استعمال کر سکتے ہیں۔ جمع کے مفہوم میں استعمال شدہ لفظ شماریات اعداد و شمار یعنی حقائق کے عددی بیانات یا مواد کی نشاندہی کرتا ہے۔ شماریات کہلانے کے لئے، عددی مواد کے لیے حسب ذیل خواص کا حامل ہونا ضروری ہے :(1) انہیں (اعداد و شمار کو) حقائق کا مجموعہ ہونا چاہیے (2) ان کو عوامل کی کثرت اور تعدد سے متاثر ہونا چاہیے (3) ان کو عددی طور پر ظاہر کیا جانا چاہیے۔ (4) ایک معقول درجہ کی صحت کے مطابق ان کو شمار یا تخمین کرنا چاہیے۔ (5) ان کو ایک پہلے سے متعین مقصد کے لئے منظم طریقے سے اکٹھا کرنا چاہیے اور (6) انہیں ایک دوسرے سے باہم مربوط ہونا چاہیے۔ لفظ شماریات اپنے واحد مفہوم میں، استعمال شدہ معلومات کے ذخیرے کا نام ہے جو (1) مواد کی یکجائی (2) مواد کی درجہ بندی اور جدول بندی (3) مواد کی پیش کشی (4) مواد کا تجزیہ (5) مواد کی ترجمانی کرنے کے طریقوں اور تکنیکوں کو فراہم کرتا ہے۔

شماریاتی طریقوں کو : (1) بیانی شماریات (2) استنباطی شماریات میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ شماریاتی طریقے : (1) حقائق کو موزوں شکل میں پیش کرنے، (2) بے ہنگم اور پیچیدہ مواد کو سادہ بنانے (3) اور اس کا تقابل کرنے کے لئے تکنیکیں فراہم کرتے ہیں، (4) مختلف میدانوں میں پالیسیوں کو مرتب کرنے، (5) مختلف مظاہر کے درمیان تعلقات کا مطالعہ کرنے، (6) مستقبل کی قیمتوں کا تعین کرنے، (7) واقعات کی غیر یقینیت کی پیمائش کرنے (8) شماریاتی مفروضات کی جانچ کرنے اور (9) جائز نتائج اخذ کرنے میں ممد و معاون ہیں۔ شماریاتی طریقے مختلف میدانوں میں مفید ہیں جیسے مملکتی نظم و نسق، معاشیات، کاروباری انتظامیہ وغیرہ۔ آج کل کے کاروبار کی تنظیمی پیچیدگیوں میں اضافے کے پیش نظر، شماریاتی آلات، فیصلہ سازی میں نہایت سہولت بخش اور سود مند ثابت ہو رہے ہیں۔ بہر حال ان آلات کی کچھ اپنی کوتاہیاں ضرور ہیں۔ شماریات کسی مظہر کا مطالعہ نہیں کرتے اور نہ ہی افراد کا انفرادی مطالعہ کرتے ہیں۔ شماریاتی قوانین قطعی نہیں ہوتے اور ان کا غلط استعمال کیا جاسکتا ہے۔ ان آلات کے اندھا دھند اطلاق نے، خصوصاً ان اشخاص کے ذریعہ جو ان سے قطعی نابلد ہیں، شماریاتی بے اعتمادی کو جنم دیا ہے۔ شماریات کا علم ان لوگوں کے لئے کار آمد ہے جو اس کا موزوں استعمال کر سکتے ہیں۔

1.9 کلیدی الفاظ Key Words

بیانی شماریات : مواد کے خواص کو بیان کرنے اور تلخیص کرنے کی تکنیکوں اور طریقوں کے متعلق ہے۔

استنباطی شماریات : ان طریقوں سے تعلق رکھتے ہیں جو نمونہ جاتی مواد پر مبنی آبادی کے خواص کے متعلق نتائج اخذ کرنے میں مدد کرتے ہیں۔

شماریاتی مواد : مقدار یا عدد میں ظاہر کردہ معلومات کو شماریاتی مواد کہتے ہیں۔ تمام شماریاتی مواد حقائق کے عددی بیانات ہوتے ہیں لیکن تمام حقائق کے عددی بیانات شماریات نہیں ہوتے۔ عددی بیانات میں کچھ خصوصیات ضروری ہیں تاکہ انہیں شماریاتی مواد کہا جاسکے۔

شماریاتی طریقے :طریقوں اور اصولوں کا ذخیرہ جو عددی مواد کی یکجائی، تلخیص، توضیح، تجزیہ اور تعبیر و تاویل میں مددگار ہوتا ہے۔

شماریات: جمع کے مفہوم میں استعمال ہوں تو حقائق یا مواد کے عددی بیانات اور واحد کے مفہوم میں استعمال ہو تو شماریاتی طریقوں کا مجموعہ جو کہ مواد کو یکجا کرتا ہے اور تجزیہ و ترجمانی کے آلات فراہم کرتا ہے۔

1.10 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات Answers to Check Your Progress

A .1 (i) ہاں (ii) نہیں (iii) نہیں (iv) ہاں

.2 (i) نہیں۔ ان کی تعریفات مواد سے متعلق ہیں

(ii) ہاں

(iii) ہاں ۔ بالراست نہیں ۔ ان کی مقدار مقرر کرنے کے بعد

(iv) نہیں ۔ دوسرے پہلو بھی موجود ہیں۔

(v) ہاں

(vi) نہیں۔ نمونہ جات نتائج سے آبادی کی قدریں معلوم کرنے والے طریقے ہیں۔

B .2 (i) نہیں ۔ دوسرے افعال بھی ہیں۔

(ii) ہاں ۔ متعلقہ مواد اکٹھا کرنے کے ذریعے۔

(iii) نہیں ۔ نظریہ احتمال اور پیش قیاسی کے طریقے مددگار ہوتے ہیں۔

(iv) ہاں ۔ بہت سارے شماریات کی ضرورت ہے۔

(iv) نہیں ۔ شماریاتی طریقے استعمال کئے جائیں گے۔

1.11 امتحانی سوالات Terminal Questions

(1) تبصرہ کیجئے کہ "شماریات" حقائق کے عددی بیانات ہوتے ہیں لیکن عددی طور پر بیان کردہ تمام حقائق شماریات نہیں ہوتے"۔

(2) شماریات کی تعریف کیجئے اور شماریات کے مختلف افعال پر بحث کیجئے۔

(3) شماریات کی افادیت اور حدود پر بحث کیجئے۔

(4) شماریات کی بے اعتباری سے کیا مراد ہے؟ کیا اس کے لئے شماریات کو موردالزام ٹھہرایا جاسکتا ہے۔

نوٹ : یہ سوالات اس اکائی کے سمجھنے میں مددگار ثابت ہوں گے۔ ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجیے لیکن آپ کے جواب یونیورسٹی کو نہ بھیجئے۔ یہ آپ کی مشق کے لیے ہیں۔

اکائی 2 شماریاتی جائزے کی تنظیم

UNIT-2 : ORGANISING A STATISTICAL SURVEY

Structure ساخت

Objectives — 2.0 مقاصد
Introduction — 2.1 تمہید
Steps in Statistical Survey — 2.2 شماریاتی جائزے کے مراحل
Sources of Statistical Data — 2.3 شماریاتی مواد کے ماخذ
Primary Data and Secondary Data — 2.3.1 ابتدائی مواد اور ثانوی مواد
Methods of Collecting Primary Data — 2.3.2 ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے طریقے
Sources of Secondary Data — 2.3.3 ثانوی مواد کے ماخذ
Types of Enquiries — 2.4 تحقیقات کی قسمیں
Factors Affecting the Type of Enquiry — 2.4.1 تحقیق کی قسم پر اثرانداز ہونے والے عوامل
Different Types of Enquiry — 2.4.2 تحقیقات کی مختلف قسمیں
Sampling Method — 2.5 نمونہ بندی کے طریقے
Probability Sampling Methods — 2.5.1 احتمالی نمونہ بندی طریقے
Non-Probability Sampling Methods — 2.5.2 غیر احتمالی نمونہ بندی طریقے
Law of Statistical Regularity — 2.6 شماریاتی باقاعدگی کا قانون
Law of Inertia of Large Numbers — 2.7 بڑے اعداد کا قانون جمود
Statistical Unit — 2.8 شماریاتی اکائی
Features of a Good Statistical Unit — 2.8.1 اچھی شماریاتی اکائی کی خصوصیات
Types of Units — 2.8.2 اکائیوں کی قسمیں
Degree of Accuracy — 2.9 صحت کا درجہ
Significance of Reasonable Accuracy — 2.9.1 معقول صحت کی اہمیت
Concept of Spurious Accuracy — 2.9.2 نقلی صحت کا تصور
Let Us Sum Up — 2.10 خلاصہ
Key Words — 2.11 کلیدی الفاظ
Answers to Check Your Progress — 2.12 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات
Terminal Questions — 2.13 امتحانی سوالات

2.0 مقاصد Objectives

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:۔

- کسی شماریاتی سروے کے ضروری مراحل کو بیان کر سکیں۔

- ابتدائی اور ثانوی مواد میں فرق کریں اور ان کے ماخذوں کی شناخت کر سکیں۔
- مختلف اقسام کی تحقیقات کی نمایاں خصوصیات بیان کر سکیں۔
- شماریاتی باقاعدگی کے قانون اور بڑے اعداد کے قانون جمود کی تشریح کر سکیں۔
- شماریاتی اکائی اور درجہ صحت کی اہمیت کو اجاگر کر سکیں۔

2.1 تمہید Introduction

سابقہ اکائی میں آپ نے شماریات کے معنی اور وسعت کے بارے میں سیکھا۔ آپ نے شماریات کی اہمیت اور حدود پر بحث بھی کی۔ اس اکائی میں آپ شماریاتی جائزے کو منظم کرنے کے مختلف مراحل، مواد کے ماخذ، مختلف قسم کی تحقیقات اور ان سے متعلق کچھ قوانین کا مطالعہ کریں گے۔ شماریاتی جائزے کے دیگر پہلوؤں کا بھی مطالعہ کریں گے جیسے شماریاتی اکائیاں اور صحت کا درجہ جنہیں جائزہ منظم کرنے کے دوران ذہن نشین رکھنا ضروری ہے۔

2.2 شماریاتی جائزے کے مراحل Steps in Statistical Survey

جب ہم شماریاتی جائزہ منظم کرتے ہیں تو چند ایسے مراحل ہوتے ہیں جنہیں سلسلہ وار ترتیب دینا پڑتا ہے۔ جب تک کہ ہم ان مراحل کو منظم طریقے سے طے نہیں کر لیتے، جائزے سے بامقصد نتائج حاصل نہیں کر سکتے۔ شماریاتی جائزے سے متعلق اہم مراحل کی سلسلہ وار ترتیب ذیل میں پیش ہے۔

(1) مسئلہ کی تعریف Defining the Problem
(2) مقصد اور وسعت کا تعین Determining the Objective and Scope
(3) مواد اکٹھا کرنے کے ابتدائی اقدامات Preliminaries to the Collection of Data
  (i) مواد کا ماخذ Source of Data
  (ii) تحقیقات کی قسمیں Types of Enquiry
  (iii) شماریاتی اکائی Statistical Unit
  (iv) صحت کا درجہ Degree of Accuracy
(4) مواد اکٹھا کرنا Collection of Data
(5) مواد کی تدوین Editing of Data
(6) مواد کی درجہ بندی اور جدول بندی Classification and Tabulation of Data
(7) مواد کا تجزیہ Analysis of Data
(8) مواد کی تعبیر Interpretation of Data
(9) رپورٹ لکھنا Writing the Report

اب ہم مختصر طور پر ان مراحل کے متعلق بحث کریں گے۔

(1) مسئلہ کی تعریف کرنا Defining the Problem

کسی شماریاتی جائزے میں سب سے پہلے تحقیق طلب مسئلہ کو صاف طور پر بیان کرنا چاہیئے۔ مسئلہ کی صاف اور صریح تعریف بہت اہمیت کی حامل ہے کیونکہ یہ متعلقہ مواد کی شناخت میں معاون ہوتی ہے۔ جیسا کہ آپ جانتے ہیں، شماریات کا تعلق حقائق کے مجموعہ سے ہے جنہیں عددی طور پر ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس لئے مسئلہ کی تعریف کے وقت ہم کو مقداری پیمائش کے امکان کا اطمینان کر لینا چاہیئے۔

(2) مقصد اور وسعت کا تعین Determining the Objective and Scope

مسئلہ کی تعریف کے بعد، دوسرا مرحلہ جائزے کے مقصد اور وسعت کا تعین ہے۔ اگر جائزے کے مقصد کو صاف طور پر بیان کیا جائے، تو مطلوبہ معلومات کی فراہمی میں اس سے کافی رہنمائی حاصل ہو سکتی ہے۔ اگر مقصد کو قطعی طور پر بیان کیا جائے تو آپ جائزے کے ضمن میں ابھرنے والے مختلف سوالات کے لئے یکساں طریقہ کار استعمال کر سکتے ہیں۔

جائزے کی وسعت کا تعلق، احاطہ طلب علاقے، آبادی و دیگر امور مثلاً مدت مطالعہ اور مطلوبہ معلومات کی نوعیت سے ہوتا ہے ان تمام امور کا انحصار تحقیق طلب مسئلہ اور مطالعہ کی غرض پر ہوتا ہے۔ قطعی نتیجہ کی صحت کا دارومدار مندرجہ بالا امور کے صحیح جائزے پر ہوتا ہے۔ اس لئے سروے کی وسعت کا صحیح تعین ضروری ہے۔

(3) مواد کی یکجائی کے لئے ابتدائی اقدامات Preliminaries to the Collection of Data

مواد اکٹھا کرنے سے پہلے، مندرجہ ذیل اقدامات ضروری ہیں۔

(i) مواد کا ماخذ : آپ کو ان ماخذوں کا تصفیہ کرنا چاہیئے جن سے مواد اکٹھا کرنا مطلوب ہے۔ مواد اکٹھا کرنے کے دو طریقے ہوتے ہیں۔ (1) آپ خود اپنے طور پر مواد اکٹھا کر سکتے ہیں یا (2) مطبوعہ ماخذوں سے مواد حاصل کر سکتے ہیں۔ تحقیق کار کا پہلی مرتبہ اکٹھا کیا گیا مواد ابتدائی مواد کہلاتا ہے۔ اس کے برعکس پہلے سے جمع کردہ مواد استعمال کیا جائے تو ایسے مواد کو ثانوی مواد کا نام دیا جاتا ہے۔ مواد کی ان دونوں قسموں کے متعلق آپ کسی اور اکائی میں مطالعہ کریں گے۔

(ii) تحقیق کی قسم : کس قسم کی تحقیق کی جائے اس کا تعین کرنا بے حد ضروری ہے۔ شماریاتی تحقیق کی مختلف قسمیں ہیں جیسے مردم شماری یا نمونہ بند، ابتدائی یا تکراری، بالواسطہ یا بلاواسطہ، باقاعدہ یا عارضی، مخفی (رازدارانہ) یا علانیہ، سرکاری یا غیر سرکاری وغیرہ وغیرہ۔ مجوزہ مطالعہ کے لئے درکار موزوں طریقہ تحقیق کے انتخاب کے وقت، تحقیق کی غرض، وسعت، اس میں دلچسپی رکھنے والے فریق (گاہک) اور مواد کے ماخذ وغیرہ کو دھیان میں رکھنا ضروری ہے۔ اس سے متعلق آپ اس اکائی میں تفصیل کے ساتھ بعد میں مطالعہ کریں گے۔

(iii) شماریاتی اکائی کی تعریف کرنا : آپ کو ان شماریاتی اکائی یا اکائیوں کی تعریف کرنی چاہیئے جن کے متعلق مواد اکٹھا کرنا مقصود ہے۔ اکائی موزوں اور شک و شبہ سے پاک ہونی چاہیئے۔ اگر شماریاتی اکائی کی واضح تعریف کی جائے تو ہم غلط مواد اکٹھا کرنے کے امکان سے بچ سکتے ہیں۔ ایک مرتبہ شماریاتی اکائی کی تعریف کرنے کے بعد، پوری تحقیق کے دوران اسی اکائی کو استعمال کرنا چاہیئے۔ شماریاتی اکائی سے متعلق آپ اس اکائی میں آگے تفصیل کے ساتھ مطالعہ کریں گے۔

(iv) صحت کا درجہ : آپ کو مواد کے اکٹھا کرنے میں مطلوبہ درجۂ صحت کا بھی فیصلہ کرنا چاہیئے۔ اگر مطلق صحت کا حصول ممکن بھی ہو تو، شماریاتی تحقیقات میں اس کی بہت کم ضرورت ہوتی ہے۔ کیونکہ اس میں کافی پیسہ اور وقت درکار ہوتا ہے اور اسکے باوجود مطلوبہ معیار صحت میں کوئی خاص اضافہ نہیں کیا جاسکتا لیکن پھر بھی زیر استعمال مواد کی نوعیت اور غرض تحقیق کے اعتبار سے درجۂ صحت کی معقول سطح کے حصول کی کوشش کرنی چاہیئے۔ درجۂ صحت کے متعلق ہم اس اکائی میں تفصیل کے ساتھ بعد میں بحث کریں گے۔

(4) مواد اکٹھا کرنا Collection of Data

ان ابتدائی امور کی تکمیل کے بعد، دوسرے مرحلہ میں عملاً مواد اکٹھا کیا جاتا ہے۔ مواد اکٹھا کرنے کے کئی طریقے ہیں اور ان میں سے کسی بھی ایک طریقہ پر عمل کیا جاسکتا ہے۔ مختلف عوامل، جیسے مطالعہ کی نوعیت، تحقیق کا مقصد اور اس کی وسعت، مالی وسائل کی فراہمی، وقت کی دستیابی وغیرہ کو مد نظر رکھ کر مواد اکٹھا کرنے کے کسی موزوں طریقہ کا انتخاب کرنا چاہیئے۔ مواد اکٹھا کرنے کے مختلف طریقوں پر تفصیلی طور سے اس اکائی میں کسی اور جگہ بحث کی جائے گی۔

(5) مواد کی تدوین Editing the Data

مواد کو ایک مرتبہ اکٹھا کرنے کے بعد، اگلے مرحلہ میں اکٹھا کی گئی معلومات کی جانچ کی جاتی ہے۔ اس کو مواد کی تدوین کہتے ہیں۔ یہ اس لئے ضروری ہے کہ بیشتر صورتوں میں جمع شدہ مواد میں غلطیاں اور خامیاں پائی جاتی ہیں۔ تدوین کے دوران مواد میں تحریف نہیں کرنی چاہیئے۔

(6) مواد کی درجہ بندی اور جدول سازی Classification and Tabulation of Data

تدوین کے بعد مواد کے ذخیرے کو جدولوں، چارٹ، ترسیمات یا کسی ٹھوس شکل میں ترتیب دینا چاہیئے اس کو تعددی بندی کہا جاتا ہے۔ اس سے مواد کی نمایاں خصوصیات ڈھونڈنے میں مدد ملتی ہے۔ اس طرح مواد کی درجہ بندی اور جدول سازی کے بعد موازنہ کا عمل سہل ہو جاتا ہے۔

(7) مواد کا تجزیہ Analysis of Data

اگلے مرحلہ میں مختلف شماریاتی پیمانوں جیسے اوسطوں، فیصدوں، قدروں کے ذریعے مواد کا تجزیہ کیا جاتا ہے۔ خام اعداد کی کثیر تعداد کا تقابل ممکن نہیں لیکن اگر ان کو کسی ایک عدد کی شکل میں پیش کیا جائے جس سے مواد کے مجموعی خیال کا اظہار ہو سکے، تو تقابل ممکن ہو جاتا ہے۔ ایسے مختلف شماریاتی پیمانے موجود ہیں جو مواد کے مختلف خواص کو جامع شکل میں ظاہر کرتے ہیں۔ ان میں سے کچھ طریقوں کے متعلق آپ تفصیل سے اسی اکائی میں آگے سیکھیں گے۔ تجزیہ کرنے کے لئے شماریاتی طریقوں کی طویل فہرست میں سے آپ کو صرف ایسے طریقوں کا انتخاب کرنا ہوگا جو سروے کے مقصد کے لئے موزوں ہیں۔

(8) مواد کی تاویل Interpretation of Data

مواد کے تجزیہ کے بعد، نتائج اخذ کرنے کے عمل پر توجہ دینی چاہیئے۔ اس کو محتاط انداز میں کیا جانا چاہیئے۔ بصورت دیگر گمراہ کن نتائج اخذ کیے جانے کا خدشہ ہوتا ہے۔ تاویل کے ذریعے ہم سروے کے انکشافات کو وسیع مفہوم دے سکتے ہیں۔ مناسب تاویل کے ذریعے سروے انکشافات کے بنیادی روابط و عوامل کو منظر عام پر لایا جا سکتا ہے۔

(9) رپورٹ لکھنا Writing the Report

رپورٹ تیار کرنا شماریاتی سروے کا آخری مرحلہ ہے جب تک ایک جامع رپورٹ پیش نہ کی جائے، سروے نامکمل رہتا ہے۔ اگر سروے انکشافات کی عام فہم تعبیر نہ ہو تو سروے کا مقصد پورا نہیں ہو سکتا۔ سروے کے نتائج کا ذخیرہ علم میں شامل ہونا بے حد ضروری ہے۔ چنانچہ ان تمام باتوں سے سروے رپورٹ کی اہمیت کا اندازہ لگایا جا سکتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ A

(1) کسی شماریاتی سروے کے انعقاد کا مقصد کیا ہوتا ہے؟

.....

.....

.....

.....

(2) کسی شماریاتی سروے میں کون سے اہم اقدامات کرنے پڑتے ہیں؟

.....

.....

.....

.....

کیا شماریاتی جائزے سے متعلق مندرجہ ذیل مراحل، مواد کے جمع کرنے کے ابتدائی اقدامات کے طور پر کام انجام دے سکتے ہیں؟ ہاں یا نہیں میں جواب دیجئے۔

(i) مواد کی تدوین .....
(ii) تحقیق کی قسم .....
(iii) درجۂ صحت .....
(iv) مواد کا تجزیہ .....
(v) جدول سازی .....

2.3 شماریاتی مواد کے ماخذ Sources of Statistical Data

جیسا کہ آپ جانتے ہیں، مسئلہ کے تعارف اور تفتیش کے مقصد اور وسعت کے تعین کے بعد، اگلا مرحلہ ان وسائل کا انتخاب کرنے کا ہے جن سے مواد اکٹھا کیا جا سکتا ہے آپ کو یہ بھی جاننا چاہیے کہ ماخذ پر مبنی، مواد کی دو زمروں میں درجہ بندی کی جا سکتی ہے : (1) ابتدائی مواد (2) ثانوی مواد۔ ان دو زمروں کے متعلق اب ہم تفصیل سے بحث کریں گے۔

2.3.1 ابتدائی مواد اور ثانوی مواد Primary Data and Secondary Data

خود اپنے استعمال کے لئے پہلی مرتبہ جو مواد اکٹھا کیا جاتا ہے ابتدائی مواد کہلاتا ہے۔ اس کے برعکس اگر آپ ایسا مواد استعمال کریں جو پہلے سے ہی جمع شدہ، درجہ بند اور تجزیہ شدہ ہے تو ایسے مواد کو ہم ثانوی مواد کہیں گے۔ مثال کے طور پر کسی ملک میں حکومت کی جانب سے اکٹھا کیا گیا قومی آمدنی کا مواد اس حکومت کے لئے ابتدائی ہوتا ہے۔ لیکن یہی مواد ان تحقیق کاروں کے لئے جو اسے بعد میں استعمال کرتے ہیں، ثانوی ہوتا ہے۔ اس طرح سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ابتدائی مواد خام مال کی شکل میں ہوتا ہے جس پر شماریاتی طریقوں کا استعمال کر کے تجزیہ کیا جاتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ ثانوی مواد تیار شدہ مال کی صورت میں ہوتا ہے کیونکہ اس پر کسی نہ کسی صورت میں شماریاتی طریقے آزمائے گئے ہیں۔

اس صورت میں کہ اگر آپ نے اپنے سروے کے لئے ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کا فیصلہ کیا ہے تو پہلے ان ماخذوں کی شناخت کرنی ضروری ہے جن سے مواد اکٹھا کرنا مطلوب ہے۔ بڑی تحقیقات جیسی مردم شماری میں قابل شمار افراد کی ایک بڑی تعداد شامل ہوتی ہے لیکن چھوٹی تحقیقات جیسے کسی شہر میں صنعتی مزدوروں کے مصارف زندگی میں قابل شمار افراد کی تعداد قلیل ہوتی ہے۔ اگر آپ نے ثانوی مواد استعمال کرنے کا فیصلہ کیا ہے تو آپ کے لئے یہ ضروری ہے کہ آپ ایسے مواد کی تدوین اور جانچ پڑتال کر لیں۔ بصورت دیگر اس میں صحت کی مطلوبہ سطح موجود نہ ہوگی یا آپ کے مقصد کے لئے یہ موزوں یا کافی نہ ہوگا۔ اگر اپنے جائزے میں استعمال کرنے سے پہلے آپ ثانوی مواد کی تدوین یا چھان بین نہ کریں تو آپ کی تحقیق کے نتائج پوری طرح سے صحیح نہیں ہو سکتے۔ لہذا، ثانوی مواد کو استعمال کرنے میں پوری احتیاط برتنی چاہیئے۔ باؤلے (Bowley) کا قول ہے "شماریات کے معنی اور حدود کو جانے بغیر مطبوعہ شماریات کو ان کی ظاہری قدر میں لینا ہرگز محفوظ نہیں ہوتا"۔

2.3.2 ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے طریقے Methods of Collecting Primary Data

ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے لئے کئی طریقے استعمال کئے جا سکتے ہیں۔ اہم طریقے ہیں : (i) مشاہدہ (ii) انٹرویو (iii) سوال نامہ اور (iv) شیڈول۔ اب ہم ان طریقوں کا مختصر اً تذکرہ کریں گے۔

(i) مشاہدہ : اس صورت میں کسی فطری مظہر کے رونما ہونے پر شخصی طور پر عمیق مطالعہ کے ذریعہ درکار مواد اکٹھا کیا جاتا ہے۔

(ii) انٹرویو : اس طریقہ کار کے تحت ذی علم اشخاص سے بالمشافہ گفتگو کر کے زیر تحقیق مسئلہ سے متعلق درکار معلومات حاصل کی جاتی ہیں۔

(iii) سوالنامہ : اس طریقہ کار میں زیر تحقیق مسئلہ سے متعلق سوالات کی ایک فہرست پر مشتمل سوالنامہ بذریعہ ڈاک بھیج کر مختلف ذریعوں سے معلومات حاصل کی جاتی ہیں۔ سوالنامہ بذریعہ پوسٹ متعلقہ افراد کو بھیجا جاتا ہے اور جواب دہندوں سے درخواست کی جاتی ہے کہ وہ سوالات کے جوابات لکھ کر سوالنامہ واپس بھیج دیں۔

(iv) شیڈول : شیڈول کے طریقے میں، سوالنامے شمار کنندوں کے ذریعہ بھیجے جاتے ہیں۔ یہ شمار کنندے جوابات پُر کرنے میں خبر دہندوں کی مدد کرتے ہیں۔ حالات اور افراد، مالیہ اور وقت کی دستیابی کو ملحوظ رکھ کر ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے لئے مندرجہ بالا چار طریقوں میں سے کوئی بھی طریقہ استعمال کیا جاسکتا ہے۔

2.3.3 ثانوی مواد کے ماخذ Sources of Secondary Data

ثانوی مواد کو دو ذرائع سے اکٹھا کیا جاسکتا ہے: (1) مطبوعہ ذرائع اور (2) غیر مطبوعہ ذرائع ۔ مطبوعہ مواد کے ماخذ عام طور پر، حکومت، غیر ملکی حکومتوں، بین الاقوامی اداروں (مثلاً، اقوام متحدہ تنظیم، عالمی بینک وغیرہ) تجارتی اداروں، چیمبر آف کامرس، بینکوں، اسٹاک ایکس چینج کے سرکاری مطبوعات کے ماخذ مختلف ہوتے ہیں اور اس قسم کا مواد، اسکالروں ، تحقیق کاروں، لیبر بیورو اور تجارتی انجمنوں اور اداروں وغیرہ کے پاس موجود رہتا ہے۔

2.4 تحقیقات کی قسمیں Types of Enquiries

شماریاتی جائزہ منظم کرنے کے دوران مواد کے ماخذ کے انتخاب کے بعد شماریاتی تحقیقات کی قسم پر توجہ دینی چاہیے۔ شماریاتی تحقیقات کی کئی قسمیں ہیں جیسے مردم شماری یا نمونہ بندی، اصلی یا تکراری، بلاواسطہ، بالواسطہ اور علانیہ یا خفیہ۔ ان اقسام کو زیر بحث لانے سے پہلے ہم ان عوامل کی تشریح کریں گے جو شماریاتی تحقیق کی قسم کو متعین کرنے پر اثرانداز ہوتے ہیں۔

2.4.1 تحقیق کی قسم پر اثرانداز ہونے والے عوامل Factors Affecting the Type of Enquiry

شماریاتی تحقیق کی قسم سے متعلق فیصلہ پر بہت سارے عوامل اثرانداز ہوتے ہیں۔ ان کی ذیل میں تشریح کی گئی ہے :

(1) سروے کا مقصد اور وسعت : یہ ان عوامل میں سے ایک ہے جس سے تحقیق کی قسم کا تعین ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر آپ کی تحقیق کا مقصد مغربی بنگال میں چاول کے زیر کاشت جملہ رقبہ معلوم کرنا ہو تو اس صورت میں اس قسم کی تحقیق نہایت موزوں ہوگی کہ جس میں مکمل گنتی کی جائے۔ اگر یہ معلوم کرنا ہے کہ مغربی بنگال میں فی ہیکٹر کتنی پیداوار ہوتی ہے تو آپ کچھ نمونے کے خطے مختلف مقامات پر لے کر فی ہیکٹر پیداوار کا تخمینہ کر سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں مکمل گنتی کی ضرورت نہیں۔ نمونہ جائزے سے خاصے صحیح نتیجے اخذ کئے جاسکتے ہیں۔

(2) جائزے کا اہتمام کون کرتا ہے؟ : شماریاتی تحقیق کی قسم کے تعین کے وقت ایک اور عامل جو زیر غور ہوگا وہ یہ ہے کہ شماریاتی جائزے کا انعقاد کس کے تحت ہو رہا ہے۔ مواد اکٹھا کرنے کی سہولتوں کا انحصار اس امر پر ہوتا ہے کہ آیا جائزہ حکومت کے تحت یا کسی ادارے کے تحت یا کسی فرد واحد کے تحت منظم کیا جارہا ہے۔ حکومت وافر مقدار میں پیسہ خرچ کر سکتی ہے اور معلومات کے حصول میں جبر بھی کر سکتی ہے۔ اگر سروے کسی ادارے یا تنظیم کے تحت کیا جارہا ہے تو وہ اخلاقی دباؤ ڈال سکتے ہیں اور لوگوں کو ضروری معلومات فراہم کرنے کی ترغیب دے سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں تحقیق کی قسم تھوڑی مختلف ہونا لازمی ہے۔ اگر جائزہ کچھ افراد اپنے طور پر کرنا چاہیں تو تحقیق کچھ مختلف قسم کی ہوگی کیونکہ افراد کے وسائل محدود ہوتے ہیں۔

(3) مالیاتی وسائل : تحقیق کی قسم کے انتخاب پر مالی وسائل بھی اثرانداز ہوتے ہیں جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ شماریاتی جائزے کے انتظام میں مالیہ کی ضرورت پیش آتی ہے۔ چھوٹے پیمانے پر جائزے کی بہ نسبت بڑے پیمانے پر جائزے کے لیے زیادہ پیسہ درکار ہوتا ہے۔ ہم سب جانتے ہیں کہ جائزے کا انتظام کرنے والے مختلف اداروں یا افراد کے مالیاتی وسائل مختلف ہوتے ہیں۔ خانگی اداروں کی بہ نسبت، حکومت زیادہ خرچ کر سکتی ہے اور خانگی ادارہ، کسی فرد کے مقابلے میں زیادہ مالیہ فراہم کر سکتا ہے۔ اس لئے تحقیق کی قسم منتخب کرتے وقت، درکار مالیاتی وسائل پر غور کرنا چاہیے۔

(4) مواد کے ماخذ : تحقیق کی قسم پر اثرانداز ہونے والا ایک اور عامل وہ ماخذ ہے کہ جس سے شماریاتی معلومات حاصل کی جاتی ہیں۔ ابتدائی یا

پرائمری مواد جمع کرنے سے متعلق تحقیق ثانوی یا سکنڈری مواد جمع کرنے سے متعلق تحقیق سے مختلف ہوگی۔ اول الذکر کی صورت میں تحقیق کے مقاصد کی روشنی میں مختلف اصطلاحوں اور اکائیوں وغیرہ کی تعریف کرنی پڑتی ہے جن کی ضرورت ثانوی مواد کے استعمال کی صورت میں نہیں رہتی۔

2.4.2 تحقیقات کی مختلف قسمیں Different Types of Enquiries

جیسا کہ پہلے تذکرہ کیا گیا ہے، تحقیقات (انکوائیریوں) کی کئی قسمیں ہیں۔ اب ہم ان میں سے ہر ایک پر مختصر بحث کریں گے۔

(1) مردم شماری تحقیق یا نمونہ تحقیق Census or Sample Enquiry

آپ کو اس کا علم ہونا چاہیے کہ شماریاتی تحقیق کے کسی بھی شعبہ کے تمام مدات (ایٹموں) سے کائنات یا آبادی (یونیورس یا پاپولیشن) کی تشکیل عمل میں آتی ہے۔ شماریات میں آبادی (پاپولیشن) کا مطلب صرف انسانی آبادی نہیں ہے بلکہ اس کا مطلب کسی مخصوص مطالعہ (اسٹڈی) سے متعلق تمام ایٹموں کے جملہ مجموعہ سے ہے۔

جیسا کہ پہلے وضاحت کی گئی ہے کہ آبادی (پاپولیشن) میں تمام مدات (ایٹموں) کے شمار کرنے کا نام مردم شماری انکوائری ہے۔ اس قسم کی تحقیق میں یہ فرض کر لیا جا سکتا ہے کہ جب تمام مدات کا احاطہ کر لیا جاتا ہے تو غلطیوں (errors) کا امکان باقی نہیں رہتا اور اعظم ترین صحت حاصل ہوتی ہے لیکن حقیقت میں یہ مکمل طور پر صحیح نہیں ہو سکتا۔ اس قسم کی تحقیق میں ایک خطا ہوتی ہے جسے 'رجحانی خطا' کہا جاتا ہے، اور جیسے جیسے مشاہدات کی تعداد میں اضافہ ہوتا ہے۔ اس خطا کا امکان بھی زیادہ ہوتا ہے مزید برآں اس رجحان کو جانچنے کا کوئی اور طریقہ نہیں سوائے اس کے کہ دوبارہ جائزہ منظم کیا جائے یا نمونہ جانچ کی جائے۔ آپ رجحان کے متعلق یونٹ 3 میں مزید سیکھیں گے۔ علاوہ ازیں مردم شماری تحقیق میں کافی وقت، پیسہ اور توانائی درکار ہے۔ اس لیے بڑے پیمانے پر مردم شماری منظم کرنے میں دقت پیش آتی ہے کیونکہ کافی وسائل مطلوب ہوتے ہیں۔ بسا اوقات، اس قسم کی تحقیق عملی طور پر افراد کی پہنچ سے باہر ہے۔ شاید صرف حکومت ہی یہ کام انجام دے سکتی ہے۔ حکومت بھی صرف غیر معمولی حالات میں اس قسم کی تحقیق کو اختیار کرتی ہے۔ مثال کے طور پر، حکومت ہند، دس (10) سال میں ایک مرتبہ مردم شماری کا بندوبست کرتی ہے۔ مزید برآں، اکثر اوقات یہ ممکن نہیں ہوتا کہ آبادی میں ہر مد کا امتحان لیں۔ کبھی کبھی یہ ممکن ہوتا ہے کہ آبادی کے صرف ایک حصے کا مطالعہ کر کے قابل لحاظ حد تک صحیح نتائج برآمد کیے جائیں۔ ایسی صورت میں مردم شماری جائزوں کی کوئی افادیت نہیں۔

جیسا کہ آپ جانتے ہیں، نمونہ بندی تحقیق میں آبادی کے صرف ایک جز کا مطالعہ کیا جاتا ہے۔ جب عملی مطالعوں (Field Study) کو روبہ عمل لایا جاتا ہے، جیسا کہ سابق میں تذکرہ کیا گیا ہے، سہولت، وقت، لاگت وغیرہ پر غور و خوض نمونہ تحقیق کے انتخاب کی رہبری کرتے ہیں۔ نمونہ جائزے میں بنیادی مفروضہ یہ ہے کہ منتخبہ نمونہ مدات، کل آبادی کی حقیقی ترجمانی کرتے ہیں۔ اس لئے نمونہ مدات، شمار کنندے کو کسی میلان کے بغیر خاصیتوں کی تخمین کرنے کے قابل بناتے ہیں اور جائز اور قابل اعتبار نتائج برآمد ہوتے ہیں۔ نمونہ انکوائیری کے فوائد ہیں :

(i) ایک نمونہ مطالعہ، مردم شماری مطالعہ کی بہ نسبت کم مہنگا ہوتا ہے اور نسبتاً تیز رفتاری سے نتائج برآمد کرتا ہے۔

(ii) یہ زیادہ صحیح پیمائش کا ضامن ہے کیونکہ اسکو تربیت یافتہ اور تجربہ کار تحقیق کاروں کے ذریعہ روبہ عمل لایا جاتا ہے۔

(iii) جب آبادی کثیر تعداد میں ہوتی ہے، نمونہ جائزہ، مواد اکٹھا کرنے کا موزوں ترین طریقہ ہے۔

(iv) جب کسی امتحان میں زیر مطالعہ شئے کو تلف کرنے کی ضرورت پڑتی ہے تو نمونہ جائزہ طریقہ بہت موزوں ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر، طبعی علوم میں، ہر مرتبہ آپ کیمیکل کے تازے نمونے لے سکتے ہیں۔

(2) اصلی یا تکراری تحقیق Original or Repetitive Enquiry

اصلی تحقیق وہ ہے جسے پہلی مرتبہ عمل میں لایا جائے جبکہ تکراری تحقیق وہ ہے جو سابقہ جائزوں کے تسلسل میں منعقد کی جاتی ہے۔ اصلی جائزے میں (جسے ابتدائی جائزہ بھی کہا جاتا ہے)، مواد اکٹھا کرنے کے کسی بھی طریقے کو اختیار کرنے کی آزادی ہوتی ہے۔ لیکن تکراری تحقیق میں پرانے

طریقے کو عموماً جاری رکھا جاتا ہے۔ نئی صورت حال کے مطابق موزوں بنانے کے لئے اس کی تصحیح کی جاسکتی ہے۔ بہر حال، تکراری تحقیق میں مختلف اصطلاحات کی تعریف کو تبدیل نہیں کرنا چاہیئے کیونکہ اس سے تقابل کے غیر صحیح ہونے کا خدشہ رہتا ہے۔

(3) مخفی (رازدارانہ) یا کھلی تحقیق Confidential or Open Enquiry

مخفی (رازدارانہ) جائزہ وہ ہے جہاں پر جائزے کے نتائج کو راز میں رکھا جاتا ہے اور وہ عوام کے علم میں نہیں لائے جاتے لیکن علانیہ تحقیق کی صورت میں نتائج عوام پر بھی ظاہر کئے جاتے ہیں۔ کھلی اور مخفی تحقیق میں طریقہ عمل مختلف ہوتے ہیں۔ حکومت، خانگی اداروں اور کچھ افراد کے ذریعہ سے منعقدہ اکثر تحقیقات غیر مخفی نوعیت کی ہوتی ہیں لیکن کبھی کبھی خانگی ادارے جیسے صنعت کاروں کی انجمنیں، تجارتی انجمنیں وغیرہ معلومات اکٹھا کرتے ہیں اور ان کو صرف ان کے اراکین تک محدود رکھتے ہیں اور کسی اور کے علم میں نہیں لاتے۔

(4) بلاواسطہ یا بالواسطہ تحقیق Direct or Indirect Enquiry

بلاواسطہ یا راست تحقیق وہ ہے جہاں پر مواد راست طور پر کمیتی (مقداری) پیائش کے قابل ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر عوامل جیسے قد، وزن، آمدنی وغیرہ کی مقداریں ناپی جاسکتی ہیں۔ بالواسطہ تحقیق وہ ہے جہاں کمیتی (مقداری) پیائش براہ راست ممکن نہیں۔ مثلاً عوامل جیسے ذہانت، قابلیت، دیانتداری وغیرہ مقداری طور پر قابل پیائش نہیں۔ بالواسطہ تحقیق کی صورت میں ہم کو ان سب عوامل پر غور کرنا ہوگا جو زیر مطالعہ مسئلہ پر اثر انداز ہوتے ہیں اگرچہ ان کو مقداری طور پر ناپا نہیں جاسکتا لیکن ان عوامل کی جن کی راست مقدار مقرر نہیں کی جاسکتی بالواسطہ طریقے سے (مقداری) پیائش کی جانی چاہیئے مثلاً طلبہ کی ذہانت کی پیائش کرنے کے لئے متعلقہ طلبہ کے گروہ کے محصلہ نشانات کا مطالعہ کرنا چاہیئے۔

(5) باقاعدہ یا عارضی تحقیق Regular or Ad-hoc Enquiry

باقاعدہ تحقیق وہ ہوتی ہے جس میں کسی مقررہ مدت کے دوران مواد کو معینہ وقفوں پر اکٹھا کیا جاتا ہے جب کہ عارضی تحقیق میں، مواد کو بلا کسی تعین مدت کے حسب ضرورت اکٹھا کیا جاتا ہے۔

(6) سرکاری یا نیم سرکاری یا غیر سرکاری تحقیق Official or Semi-official or Non-official enquiry

جب تحقیق حکومت کی جانب سے منظم کی جاتی ہے تو یہ سرکاری تحقیق ہے۔ جب ایسے ادارے تحقیقات کرتے ہیں جنہیں حکومت کی سرپرستی حاصل ہے تو یہ نیم سرکاری تحقیق کہلاتی ہے۔ خانگی اداروں یا بعض افراد کی جانب سے کی جانے والی انکوائیری کو غیر سرکاری یا خانگی تحقیق کہتے ہیں۔ ان تینوں انکوائریوں میں دستیاب سہولتیں مختلف ہوتی ہیں۔ سرکاری انکوائری کے سلسلے میں لوگوں کو معلومات فراہم کرنے پر مجبور کیا جاسکتا ہے۔ نیم سرکاری انکوائری میں لوگوں سے درخواست کرکے نسبتاً آسانی کے ساتھ معلومات حاصل کی جاسکتی ہیں۔ لیکن خانگی انکوائیری میں تحقیق کار کو انتھک کوششوں کے باوجود مواد حاصل کرنے میں کافی دشواری پیش آسکتی ہے۔

2.5 نمونہ بندی کے طریقے Sampling Methods

جیسا کہ قبل ازیں تذکرہ کیا گیا ہے جائزے دو قسم کے ہوتے ہیں (1) مردم شماری جائزہ جس میں پورے مجموعہ کا جائزہ ہوتا ہے۔ (2) نمونہ جائزہ جس میں مجموعہ کے کچھ منتخب نمائندہ مدوں کا جائزہ ہوتا ہے۔ نمونہ جائزے میں اسی طرح کے منتخبہ نمائندہ ایٹموں کا نمونہ لیا جاتا ہے۔ نمونے کے لئے ایٹموں کو منتخب کرنے کی تکنیک کو عام طور پر نمونہ بندی کہا جاتا ہے۔ نمونہ بندی کے کئی طریقے ہیں۔ ان کی زمرہ بندی اس طرح کی جاتی ہے (1) احتمالی نمونہ بندی طریقے (2) غیر احتمالی نمونہ بندی طریقے۔

2.5.1 احتمالی نمونہ بندی طریقے Probability Sampling Methods

احتمالی نمونہ بندی طریقے کی صورت میں آبادی (پاپولیشن) کے ہر مد کے نمونے میں شمولیت کا احتمال یا امکان رہتا ہے۔ چنانچہ اس طریقہ میں آبادی کے ہر رکن کے لئے بطور نمونہ منتخب ہونے کا مساوی امکان رہتا ہے۔ اس احتمالی نمونہ بندی کے تحت، مختلف طریقے ہیں جیسے:۔

(1) سادہ اٹکل نمونہ بندی Simple Random Sampling

(2) منظم نمونہ بندی Systematic Sampling

(3) طبقہ واری نمونہ بندی Stratified Sampling

(4) جھرمٹ نمونہ بندی Cluster Sampling

(5) علاقہ واری نمونہ بندی Area Sampling

(6) ہمہ مرحلہ نمونہ بندی Multi-stage Sampling

(1) سادہ اٹکل نمونہ بندی Simple Random Sampling :۔ نمونہ بندی کے اٹکل طریقہ کو امکانی یا لاٹری نمونہ بندی طریقہ بھی کہتے ہیں۔ اس صورت میں آبادی کے ہر ایک مد کے لیے شامل ہونے کا مساوی امکان رہتا ہے اور ہر ایک ممکنہ نمونہ کے منتخب ہونے کا احتمال بھی مساوی ہے۔ جب آبادی متجانس مجموعہ ہو تو بالعموم یہ طریقہ استعمال کیا جاتا ہے۔ نمونہ اکائی کی شناخت کے لئے عموماً اٹکل طریقہ پر لیے گیے اعداد استعمال کئے جاتے ہیں۔

(2) منظم نمونہ بندی Systematic Sampling :۔ اس طریقے کے تحت آبادی کو حروف تہجی یا سلسلہ وار طریقہ سے ترتیب دیا جاتا ہے اور بعد ازاں معین وقفوں میں ظاہر ہونے والی نمونہ اکائیوں کا انتخاب کیا جاتا ہے۔ اس طرح سے آپ کسی فہرست کا ہر چودھواں نام، کسی گلی کے کنارے واقع دسواں گھر وغیرہ وغیرہ منتخب کر سکتے ہیں۔ اس نمونہ بندی کے طریقہ میں، پہلی اکائی کا انتخاب کرنے کے لئے بلا کسی منصوبہ کے اٹکل سے لیے ہوئے اعداد کو استعمال کر کے بے مقصدی عنصر داخل کر سکتے ہیں۔ لہذا، اس طریقہ میں آبادی کی فہرست میں سے پہلی اکائی یا عدد اٹکل یعنی اندازہ سے چن کر انتخاب کا عمل شروع کیا جاتا ہے جو مطلوبہ عدد حاصل ہونے تک انتخاب جاری رہتا ہے۔

(3) طبقہ واری نمونہ بندی Stratified Sampling :۔ یہ طریقہ عموماً اس وقت استعمال کیا جاتا ہے جب کہ مجموعہ متجانس نہ ہو۔ اس طریقہ کے تحت، آبادی کو متجانس ذیلی آبادیوں یا طبقوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ ایسا کرنے سے پہلے یہ احتیاط کرنی چاہئیے کہ طبقات ایک دوسرے پر منطبق نہ ہوں۔ طبقہ واری نمونہ بندی کے بعد، ہر طبقے سے متناسب یا مساوی بنیادوں پر نمونہ مدات کو منتخب کیا جاتا ہے۔ اس طریقے کو سمجھنے کیلئے ایک مثال پر غور کریں گے۔ فرض کیجیے کہ ہم کسی جامعہ اور اس کے مختلف ملحقہ اور زیر انتظام کالجوں کے ملازمین کی معاشی حالت معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ یہاں پر مختلف ملازمین کے زمرے ہوتے ہیں۔ (i) پرنسپل اور پروفیسر (ii) ریڈر (iii) لکچرر (iv) انتظامی عملہ اور (v) درجہ چہارم عملہ۔ اس میں کا ہر گروہ تقریباً متجانس ہے۔ لہذا ان پانچ گروہوں کو "طبقہ" (strata) کہیں گے۔ ان پانچوں گروپوں میں سے ہر گروپ سے آپ غیر منصوبہ بند یعنی اٹکل طریقے (Random method) سے ایک موزوں سائیز کے نمونے کو منتخب کر سکتے ہیں۔ اس طریقۂ انتخاب کو طبقہ داری نمونہ بندی کہتے ہیں۔

(4) جھرمٹ نمونہ بندی Cluster Sampling :۔ اس طریقہ کار کے تحت آبادی کو غیر متجانس گروپوں میں بانٹا جاتا ہے جس میں سے ہر گروپ کو 'انبوہ' یا جھرمٹ کہا جاتا ہے اور اس طرح ان میں چند گروپوں کو سادہ نمونہ بند طریقے سے منتخب کیا جاتا ہے۔ منتخبہ گروپوں کے تمام اٹیٹوں کا مطالعہ، سروے کام کے حصول کے لئے کیا جاتا ہے۔ طبقہ وار نمونہ بندی کے تحت اوپر دی گئی مثال پر یہاں بھی غور کیا جاسکتا ہے۔ ہر ملحقہ کالج کا زیر انتظام کالج اور جامعہ کے مختلف شعبوں میں تمام پانچ قسم کے ملازمین موجود ہوں گے۔ (i) پرنسپال، پروفیسر (ii) ریڈر (iii) لکچرر (iv) انتظامی عملہ (v) درجہ چہارم عملہ۔ اس لئے معاشی حالت کے نقطہ نظر سے بھی ایک ادارے کے ملازمین غیر متجانس گروہ تشکیل دیں گے۔ اس لئے ہر ادارے کو ایک جھرمٹ کہا جائے گا۔ سادہ غیر منصوبہ بند یعنی اٹکل طریقہ سے آپ چند اداروں کا انتخاب کیجئے اور اس کے بعد منتخبہ اداروں کے تمام ملازمین کا جائزہ لیجئے۔ اس طریقہ کو جھرمٹ نمونہ بندی کہتے ہیں۔

(5) علاقہ واری نمونہ بندی Area Sampling :۔ یہ طریقہ جھرمٹ نمونہ بندی سے بہت مشابہہ ہے۔ یہ طریقہ عموماً اس وقت روبہ عمل لایا جاتا ہے جبکہ جائزہ کافی وسیع جغرافیائی رقبہ پر محیط ہے۔ اس نمونہ بندی طریقے میں جغرافیائی رقبے کو چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اور پھر ان چھوٹے رقبوں میں سے کچھ کو نمونتاً منتخب کیا جاتا ہے اور اس طرح جائزے کے مقاصد کو حاصل کرنے کے لئے ان تمام چھوٹے منتخبہ نمونوں کی تمام اکائیوں کی جانچ اور مطالعہ کیا جاتا ہے۔

(6) ہمہ مرحلہ نمونہ بندی **Multi-stage Sampling** :۔ یہ طریقہ ایک قابل لحاظ بڑے جغرافیائی رقبے پر پھیلے ہوئے یا غیر متجانس آبادی والے بڑے جائزے کے لئے موزوں ہے۔ مثال کے طور پر کسی جائزے میں پورے ملک کے چند خاندانوں کا انتخاب کرنا مطلوب ہو تو اس ہمہ مرحلہ نمونہ بندی طریقے کے تحت پہلا مرحلہ یہ ہوگا کہ چند ریاستوں کا انداز اً انتخاب کیا جائے۔ دوسرے مرحلے میں ہر منتخب ریاست سے آپ انداز اً کچھ اضلاع کا انتخاب کریں۔ بعد ازاں تیسرے مرحلے میں آپ ہر منتخبہ ضلع سے کچھ شہروں کا انتخاب کریں۔ آخر کار انتخاب شدہ شہروں میں سے انداز اً کچھ خاندانوں کو منتخب کیا جائے۔ اس طرح سے اس آخری نمونے کے لئے چار مراحل میں طبقہ واری طریقہ استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ امر قابل غور ہے کہ اس ہمہ مرحلہ نمونہ بندی میں، آبادی کے انتخاب کا امکان ہے، لیکن تمام مدوں کے لئے یہ امکان مساوی ہونا ضروری نہیں۔

2.5.2 غیر احتمالی نمونہ بندی طریقے Non-probability Sampling

اس طریقہ کار میں کسی نمونہ کی تشکیل کے لئے کائنات کے مخصوص مدر/مدوں کا بامقصد یا قصداً انتخاب کیا جاتا ہے۔ چنانچہ اگر تحقیق کار کی دانست میں کچھ اکائیاں "غیر نمائندہ" ہوں تو نمونہ میں ان کی شمولیت کا مساوی امکان نہیں رہتا۔ اسی وجہ سے اس طریقہ نمونہ بندی کو غیر امکانی یا غیر احتمالی نمونہ بندی کہا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل طریقے اس زمرے میں شامل ہیں:

(1) سہولتی نمونہ بندی **Convenience Sampling** :۔ جب آپ بآسانی دستیاب آبادی سے نمونہ مدوں کا انتخاب کریں تو یہ طریقہ سہولتی نمونہ بندی کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر پٹرول کے صارفین سے مواد حاصل کرنا مطلوب ہو تو ہم قریب میں واقع چند پٹرول پمپ اسٹیشنوں کا انتخاب کر سکتے ہیں اور بعد ازاں ان پٹرول اسٹیشنوں سے پٹرول خریدنے والوں سے گفتگو کر سکتے ہیں۔ یہ پٹرول کے خریداروں کے سہولتی نمونے کی ایک مثال ہوگی۔

(2) فیصلہ نمونہ بندی **Judgement Sampling** :۔ نمائندہ نمونے کی تشکیل میں نمونہ مدوں کے انتخاب کے لئے تحقیق کار جب اپنی قوت فیصلہ کا استعمال کرتا ہے تو ہم اسے فیصلہ نمونہ بندی کہتے ہیں۔ فیصلہ نمونہ بندی کو عموماً کیفیتی تحقیقاتی جائزوں (qualitative research surveys) میں استعمال کرتے ہیں جن کا مقصد عمومی نظریات کی بجائے بے دلیل مفروضے قائم کرنا ہوتا ہے۔

(3) کوٹہ نمونہ بندی **Quota Sampling** :۔ غیر احتمالی نمونہ بندی کی یہ ایک اور قسم ہے جس کے تحت پہلے آبادی کو متجانس گروپوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اور انٹرویو لینے والوں کو ایک مخصوص کوٹہ (حصہ) تفویض کیا جاتا ہے۔ اس طرح نمونہ مدوں کا حقیقی انتخاب انٹرویو لینے والے کی صوابدید پر چھوڑا جاتا ہے۔ ہر گروپ کے حصہ یعنی ہر کوٹہ quota کا سائز آبادی میں اس گروپ کے سائز کے تناسب میں ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا بحث سے آپ کو معلوم ہوا کہ نمونہ بندی کے متعدد طریقے ہیں۔ ان میں سے آپ اپنی تحقیق کی موزونیت کے لحاظ سے کوئی بھی طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ بہر حال اگر آپ انکل نمونہ بندی اختیار کریں تو مدوں کے انتخاب میں ہونے والی خطاؤں کو عام طور پر نظر انداز کر سکتے ہیں۔ نمونہ بندی خطاؤں کو محسوب کرنے کے طریقے موجود ہیں جو کہ اس نصاب میں شامل نہیں ہیں۔ مقصدی نمونہ بندی پسندیدہ ہے جب کہ یونیورس (کائنات) چھوٹی ہو اور اس کی کسی معلوم خاصیت کا گہرا مطالعہ مقصود ہو۔ انکل (اندازی) نمونہ بندی سے ہٹ کر کم لاگت اور سہولت کی خاطر انکل ڈیزائنوں کو استعمال کیا جا سکتا ہے۔ نمونہ بندی طریقوں کے انتخاب میں تحقیق کی نوعیت اور وسعت اور دیگر متعلقہ عوامل جیسے وقت، پیسہ، عملہ، سہولت وغیرہ کو ملحوظ رکھنا ضروری ہے۔

2.6 شماریاتی باقاعدگی کا قانون Law of Statistical Regular

شماریاتی باقاعدگی کے قانون کے مطابق کائنات (Universe) کے مدات کے اندازی انتخاب سے ممکنہ طور پر نمائندہ نمونہ حاصل ہوتا ہے جس میں اوسطاً وہی خواص ہوتے ہیں جو یونیورس میں پائے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر کسی اسکول میں 700 لڑکے اور 300 لڑکیاں ہیں اور اگر

100 طلبہ کو انداز انتخب کیا جائے تو ان میں 70 لڑکے اور 30 لڑکیاں ہو سکتی ہیں تو اس سے یہ نتیجہ اخذ کرنا نامناسب نہ ہو گا کہ اگر اسکول میں ہزار طلبہ ہوں تو ان میں سے تقریباً 700 لڑکے اور 300 لڑکیاں ہو سکتی ہیں۔ اس طرح 100 مدات کے مطالعہ کا در حقیقت یہی مقصد ہے۔ شماریاتی باقاعدگی کے اس قانون پر عمل در آمد مندرجہ ذیل دو شرائط کی تکمیل کے تابع ہوتا ہے۔

(i) نمونہ کے لئے مدات کا انتخاب اٹکل سے ہونا چاہیئے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ یونیورس کے ہر مد کے لیے نمونہ میں شامل ہونے کا مساوی امکان رہے

(ii) نمونے میں شامل ہونے والے مدوں کی تعداد خاصی بڑی ہونی چاہیئے تاکہ نمونہ کافی حد تک یونیورس کا نمائندہ ہو سکے۔

چنانچہ اگر یونیورس سے مناسب سائز کے بڑے نمونے کو اٹکل طریقہ سے منتخب کیا جائے تو یہ تقریباً یقینی ہے کہ اس طرح سے لیا گیا نمونہ تقریباً یونیورس کی خصوصیات کا حامل ہو گا۔

2.7 بڑے اعداد کا قانون جمود Law of Inertia of Large Numbers

بڑے اعداد کا قانون جمود، قانون شماریاتی باقاعدگی کا منطقی نتیجہ ہے۔ کسی نمونے کی مقدار، سائیز اور صحت میں ایک خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ اس کا سبب یہ ہے کہ بڑے اعداد میں تلافی کن خطاؤں کے امکانات بہت زیادہ ہوتے ہیں۔ بہ الفاظ دیگر، بڑے نمونوں سے اکٹھا کردہ مواد میں درجہ استحکام، چھوٹے نمونوں سے اکٹھا کردہ مواد کی بہ نسبت، زیادہ ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر کسی سکے کو 40 مرتبہ اچھالا جائے تو چت کی توقع 20 مرتبہ کی جا سکتی ہے۔ لیکن حقیقتاً اچھالنے میں، چت 25 مرتبہ اور پٹ صرف 15 مرتبہ ظاہر ہو سکتا ہے۔ اگر سکہ کو پھر سے اچھالا جائے، تو صورت حال برعکس بھی پیش آسکتی ہے۔ اگر سکہ کو 1000 مرتبہ اچھالا جائے یہ عین ممکن ہے کہ چت 500 مرتبہ اور پٹ 500 مرتبہ حاصل ہو جائے۔ ایسا اس لئے ہوتا ہے جب سکہ اچھالنے کی تعداد زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے تو کبھی کبھی خطائیں (حقیقی اور متوقع کے درمیان فرق) مخالف سمت میں حرکت کرتی ہیں اور اس طرح ایک دوسرے کو رد کر دیتی ہیں۔ مندرجہ بالا مثال میں سکہ اچھالنے کی تعداد جتنی زیادہ ہو گی تو ایک بے قاعدگی کی تلافی دوسری بے قاعدگی سے ہونے کے امکانات زیادہ ہوتے ہیں اور اسی بنا پر یہ کہا جا سکتا ہے کہ بڑے اعداد جمود کے قائل ہوتے ہیں یعنی سادہ الفاظ میں یہ کہا جا سکتا ہے بڑے اعداد نسبتاً زیادہ مستقل ہوتے ہیں۔ کسی مخصوص ضلع میں چاول کی پیداوار میں سال بہ سال کمی و بیشی ہو سکتی ہے لیکن ساری ریاست کی پیداوار میں بہت زیادہ کمی و بیشی نہیں ہوتی کیونکہ اگر کچھ ضلعوں میں چاول کی فصل معمول سے زیادہ ہے تو یہ عین ممکن ہے کہ دوسرے اضلاع میں یہ معمول سے کم تر ہو۔ لہذا ریاست کی سطح پر چاول کی پیداوار مستحکم رہتی ہے اور یہی وجہ ہے کہ کسی ایک سال اور اس کے بعد کے دوسرے سال کی مدت میں سارے ملک کے لئے چاول کی پیداوار کے اعداد و شمار میں بہت کم اختلاف پایا جاتا ہے۔ اسی مظہر فطرت کو بڑے اعداد کے جمود سے موسوم کیا جاتا ہے۔ بڑے اعداد میں تغیرات آہستہ اور بتدریج ہوتے ہیں۔ جیسے جیسے مدوں کی تعداد میں اضافہ ہوتا جاتا ہے، متوقع قدر سے متناسب انحراف کم سے کم تر ہوتا جاتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ B

(1) ثانوی مواد کے ماخذ کیا ہیں؟

.....

.....

.....

.....

(2) ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے لئے استعمال کئے جانے والے طریقوں کو بیان کیجئے۔

.....

.....

.....

.....

(3) سادہ اٹکل نمونہ بندی کیا ہے؟ اس کے اہم فوائد کیا ہیں؟

.....

.....

.....

.....

(4) تحریر کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل نمونہ بندی طریقے احتمالی نمونوں کی مثالیں ہیں یا نہیں۔ ہاں یا نہیں میں جواب دیجئے۔

(i) کوٹہ نمونہ بندی .....

(ii) طبقہ واری نمونہ بندی .....

(iii) علاقہ واری نمونہ بندی .....

(iv) فیصلہ نمونہ بندی .....

(5) بیان کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) نمونہ کے انتخاب کا سہولتی نمونہ بندی طریقہ شماریاتی باقاعدگی کے قانون کا بنیادی مفروضہ ہے۔

(ii) بڑے اعداد کے قانونِ جمود کے مطابق بڑے اعداد اضافی طور پر مستحکم ہوتے ہیں۔

(iii) بڑے اعداد کا قانونِ جمود' امتداد زمانہ کے ساتھ اعداد و شمار میں تبدیلی کی اجازت نہیں دیتا۔

(iv) طبقہ واری نمونہ بندی کو اس وقت استعمال کیا جاتا ہے جب کہ آبادی مدات کے متجانس گروہ پر مشتمل نہیں ہوتی۔

2.8 شماریاتی اکائی Statistical Unit

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ شماریاتی جائزے کی منصوبہ بندی کے لئے ضروری ہے کہ اکائی کی شکل میں مواد اکٹھا کیا جائے۔ اس کی مناسب انداز میں تعریف کی جائے۔ شماریاتی اکائی سے مراد وہ اکائی ہے جس کے ذریعہ ایک تحقیق کار کسی متغیرہ کی پیائش (یا صف شماری) کرتا ہے جس کا انتخاب اعداد و شمار، تجزیہ اور تاویل کی غرض سے کیا جاتا ہے۔ شماریاتی اکائی کی موزوں تعریف ضروری ہے تاکہ موزوں مواد اکٹھا کیا جاسکے۔ ایک واضح اکائی کی غیر موجودگی میں یہ ممکن ہے کہ درکار ضروری مواد اکٹھا ہونے سے رہ جائے اور غیر ضروری مواد اکٹھا ہو جائے۔ کسی اکائی کی تعریف کرنا اتنا آسان کام نہیں جیسا کہ پہلی نظر میں معلوم ہوتا ہے۔

2.8.1 ایک اچھی شماریاتی اکائی کی خصوصیات Features of a Good Statistical Unit

تحقیق کے لئے شماریاتی اکائی کے انتخاب کے وقت، مندرجہ ذیل امور پر توجہ دینی چاہیئے۔

(i) اکائی کا متناسب و موزوں ہونا ضروری ہے :۔ شماریاتی اکائی کا تحقیق کاری کے مقصد کے لئے موزوں ہونا ضروری ہے۔ مثال کے طور پر آپ جانتے ہیں کہ قیمتیں کئی قسم کی ہوتی ہیں جیسے چلر قیمت، تھوک قیمت، قیمت خرید وغیرہ۔ تحقیق کاری کے لئے موزوں قیمت کا انتخاب ضروری ہے۔ اگر چلر قیمت موزوں ہے لیکن تھوک قیمت کا انتخاب ہو تو گمراہ کن نتائج بر آمد ہوں گے۔

(ii) اکائی مختص اور غیر مبہم ہونی چاہیئے :۔ اکائی کی واضح تعریف کی جانی چاہیئے اور اس کے معنوں میں ابہام نہ ہو۔ ورنہ جمع شدہ مواد کامل طور پر صحیح نہیں ہو سکتا۔

(iii) اکائی مستحکم ہونی چاہیئے :۔ اگر اس کی قدر میں اتار چڑھاؤ ہو تو مختلف اوقات میں یا مختلف مقامات پر اکٹھا شدہ مواد قابل موازنہ نہیں ہوتا۔ کبھی کبھی، نتائج گمراہ کن ہو سکتے ہیں۔

(iv) اکائی متجانس ہونی چاہیئے :۔ شماریاتی اکائی متجانس (homogeneous) ہونی چاہیئے۔ شماریاتی اکائی کی تعریف ایک مرتبہ مقرر ہونے کے بعد پوری تحقیق کاری کے دوران اس کو یکساں رہنا چاہیئے تاکہ جمع شدہ مواد کی بنا پر معقول موازنے کئے جا سکیں۔

(v) اکائی سادہ ہونی چاہیئے :۔ شماریاتی اکائی سادہ ہونی چاہیئے تاکہ یہ قابل فہم اور اپنے آپ میں مکمل ہو۔

2.8.2 اکائی کی قسمیں Types of Units

آپ نے شماریاتی اکائی کے مفہوم اور اچھی شماریاتی اکائی کے خواص کے متعلق معلومات حاصل کیں۔ اب ہم شماریاتی اکائی کی قسموں کا مطالعہ کریں گے۔

(1) شماریاتی اکائی طبعی اکائی ہو سکتی ہے یا من چاہی اکائی :۔ پیائش کی اکائیاں جیسے ٹن، کلوگرام، میٹر، پاؤنڈ وغیرہ طبعی اکائیوں کی مثالیں ہیں۔ ایسی اکائیاں عام استعمال میں ہیں اور ان کی تشریح ضروری نہیں۔ بہت سارے مطالعوں کے لیے یہ طبعی اکائیاں موزوں نہیں ہوتیں۔ مثال کے طور پر آپ کسی صنعت میں مزدوروں کی اجرت پر تحقیق کر رہے ہیں۔ اس صورت میں جس شماریاتی اکائی کی تعریف کرنی ہے وہ ہے اجرت۔ اجرت کی کئی اقسام ہیں جیسے زر اجرت (اجرت بشکل زر)، حقیقی اجرت، ٹھیکہ۔ اجرت (Piece rate)، ماہانہ اجرت وغیرہ وغیرہ۔ ایسی صورت حال میں آپ کو فیصلہ کرنا ہوگا کہ آپ کو کونسی اجرت مطلوب ہے اور اس کی واضح تعریف کرنی ہوگی۔

(2) شماریاتی اکائیوں کی اس طرح سے بھی زمرہ بندی کی جا سکتی ہے (i) تخمینہ یا اعداد شماری کی اکائیاں اور (ii) تجزیہ اور ترجمانی کی اکائیاں۔

(i) اعداد شماری کی اکائیاں :۔ اعداد شماری کی اکائیاں سادہ اکائیاں یا مخلوط اکائیاں ہو سکتی ہیں۔ سادہ اکائی وہ ہے جو کسی شرط کے بغیر کسی ایک حالت کو ظاہر کرتی ہے۔ ان اکائیوں کی مثالیں ہیں مزدور، مکان، ٹن میٹر گھنٹہ وغیرہ۔ کسی سادہ اکائی کے ساتھ چند مشروط الفاظ کا اضافہ کر کے مخلوط اکائی حاصل کی جاتی ہے جس کے نتیجہ میں اس کی وسعت محدود ہو جاتی ہے اور اس قسم کی اکائی کی تعریف کرنا نسبتاً مشکل ہو جاتا ہے۔ مخلوط اکائیوں کی مثالیں: دو اکائیاں لیجیے (1) مزدور (2) ہنر مند مزدور۔ اس صورت میں پہلی اکائی سادہ اکائی ہے اور دوسری اکائی مخلوط اکائی ہے۔ موخر الذکر صورت میں نہ صرف مزدور کے مفہوم کو جاننا ضروری ہے بلکہ ہنر مند مزدور کی اصطلاح کے مفہوم کو جاننا بھی ضروری ہے۔ مخلوط اکائیوں کی دیگر مثالیں۔ مشین۔ گھنٹہ، مسافر۔ میل، کیلوواٹ۔ گھنٹہ وغیرہ وغیرہ۔

(ii) تجزیہ اور ترجمانی کی اکائیاں :۔ تجزیہ اور ترجمانی کی اکائیاں وہ ہیں جو شماریاتی مواد کے موازنہ اور ترجمانی کے لئے استعمال کی جاتی ہیں۔ ان میں شرحیں، نسبتیں، فیصد، قدریں وغیرہ شامل ہیں۔ اکائی 4 میں آپ نسبتوں، شرحوں، فی صدوں وغیرہ کے متعلق مزید معلومات حاصل کریں گے۔

2.9 صحت کا درجہ Degree of Accuracy

جیسا کہ اس اکائی میں پہلے بحث کی جا چکی ہے کہ کسی تحقیق کاری کے انعقاد کے وقت مواد کے اکٹھا کرنے میں مطلوبہ صحت کا تعین کرنا ضروری ہے۔ صحت کے درجے کے تعین کے وقت دو پہلوؤں کو ذہن میں رکھنا چاہیئے (i) صحت جو نارمل طور پر ممکن ہے (ii) کسی مخصوص تحقیق کاری میں

ضروری سمجھی جانے والی صحت کا درجہ۔ مطلق صحت کا حصول نہایت دشوار ہے یعنی کسی قانون فطرت کو ہو بہو بیان کرنا نہایت دشوار ہے۔ تحقیق کار کی ناتجربہ کاری، نامکمل آلات پیائش کی بناء پر فطرت کے مظاہر کا بیان مکمل صحت کے ساتھ نہیں کیا جاسکتا چنانچہ کسی بھی شماریاتی انکوائیری میں مکمل صحت کی توقع عبث ہے حتیٰ کہ طبعی علوم میں بھی کہ جہاں تجربات زیر کنٹرول حالات میں انجام دیئے جاتے ہیں، قطعی صحت کا حصول ناممکن ہے تو سماجی علوم میں اس کا تذکرہ ہی فضول ہے۔

2.9.1 معقول صحت کی اہمیت Significance of Reasonable Accuracy

جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا ہے، شماریاتی تحقیق کاری میں مطلق صحت کی کوئی ضرورت نہیں۔ جب مناسب و صحیح تخمینے دستیاب ہوں تو کسی مظہر کو سمجھنے اور تجزیہ کرنے میں کوئی دشواری نہیں ہوتی۔ مثال کے طور پر اگر ہم غلے کو کنٹلوں میں وزن کرتے ہیں تو وزن کو گرام کی حد تک صحیح ظاہر کرنا ضروری نہیں ہے بلکہ کیلوگرام کی حد تک صحیح وزن ظاہر کرنا کافی ہے اسی طرح دو شہروں کے درمیان فاصلہ کیلو میٹروں میں ظاہر کیا جاتا ہے اور اس صورت میں چند میٹروں کی کمی و بیشی اہمیت نہیں رکھتی۔ مردم شماری میں لوگوں کی صحیح تعداد شماری ضروری ہے تاہم ممکن ہے کہ مردم شماری کے دوران کچھ لوگ چھوٹ جائیں۔ اسی طرح عام مقصد کے لئے صحیح عمروں کا درج کرنا اس حد تک ضروری نہیں جس حد تک کہ مردم شماری میں عمروں کے صحیح اندراج کی ضرورت ہوتی ہے۔ عام مقصد کے لئے عمروں کو تکمیل شدہ برسوں میں ظاہر کیا جانا کافی ہے چنانچہ اس بحث سے یہ ثابت ہوا کہ مطلق صحت کی ضرورت نہیں ہے بلکہ صرف معقول و مناسب صحت کا حصول کافی ہے۔

اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ آخر مناسب صحت سے کیا مراد ہے؟ اس تعلق سے ہم کوئی قطعی رائے زنی نہیں کر سکتے کیونکہ مناسب صحت کا انحصار انکوائیری کی نوعیت، مقصد اور مطلوبہ مواد کی قسم پر ہوتا ہے۔ کئی صورتوں میں صحت کے روایاتی معیارات مقرر ہیں۔ دو شہروں کے درمیان فاصلے کی پیائش کے وقت چند میٹروں کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے لیکن کپڑا ناپتے وقت چند سنٹی میٹروں کو بھی نظر انداز نہیں کیا جاسکتا۔ اس طرح کوئلہ تولتے وقت گرام کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے لیکن سونا تولتے وقت ایسا کرنا ممکن نہیں۔ شماریاتی تحقیقات میں مناسب معیار صحت کے تعین کے وقت ان روایات کو ملحوظ رکھنا ضروری ہے۔

تحقیق کار کے لئے یہ ضروری ہے کہ وہ ایسے طریقے اور اکائیاں اختیار کرے جن سے مطلوبہ درجہ صحت حاصل ہو سکتا ہو۔ پیائش کی صحت کا دارومدار دو (2) عوامل پر ہوتا ہے۔ (i) پیائشی آلات کی نفاست اور (ii) ان کے استعمال میں تحقیق کار کی احتیاط۔ مثال کے طور پر اگر کسی پیائش رولر پر اگر سنٹی میٹروں کے نشانات ہوں تو اس سے ملی میٹروں تک کے طول کی حد تک صحیح پیائش کا عمل غیر معقول ہوگا۔ اسی طرح سے، جب کسی تحقیق میں لوگوں کی عمروں کو سال و ماہ میں ظاہر کیا جائے تو اس سے دنوں کی حد تک حساب نہیں کیا جاسکتا۔

2.9.2 نقلی صحت کا تصور Concept of Spurious Accuracy

آپ نے معقول صحت کے بارے میں سیکھا۔ اب ضروری ہے کہ آپ نقلی صحت کے متعلق بھی معلومات حاصل کرلیں۔ نقلی صحت کا مفہوم آپ ایک مثال کے ذریعے سمجھ سکتے ہیں۔ دسویں جماعت کے پانچ طلبا کی عمریں فرض کیجئے 16 سال 7 مہینے، 17 سال 2 مہینے، 16 سال 8 مہینے، 15 سال 9 مہینے اور 15 سال 10 مہینے ہیں۔ ان اعداد و شمار سے یہ کہنا غلط ہوگا کہ طلبا کی اوسط عمر 15.8 = 5/(15+15+16+17+16) سال ہے۔ اس صورت میں صحت کا سب سے اعلیٰ درجہ اوسط عمر کو برسوں میں ظاہر کرنا ہوتا ہے یعنی 15 مکمل شدہ سال۔ 15.8 سال کے منسوبہ درجہ صحت کو 'نقلی صحت' کہتے ہیں۔ عددی حقائق کے اظہار میں نقلی صحت سے احتیاط کرنا ضروری ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ C

(1) مکمل صحت اور معقول صحت کے فرق کو واضح کیجئے۔

.....

.....

.....

.....

(2) معقول صحت اور نفلی صحت میں کیا فرق ہے؟ بیان کیجئے۔

.....

.....

.....

.....

(3) اچھی شماریاتی اکائی کے خواص بیان کیجئے۔

.....

.....

.....

.....

(4) شماریاتی اکائی کی موزوں تعریف کیوں ضروری ہے؟

.....

.....

.....

.....

(5) شمار کرنے کی اکائیوں اور تجزیہ کرنے کی اکائیوں میں فرق بیان کیجئے۔

.....

.....

.....

.....

(6) تحریر کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) شرحوں اور فیصدوں کی بطور تجزیہ اکائیوں اور تاویلی اکائیوں (units of analysis & enumeration) کے زمرہ بندی کی جاتی ہے۔

(ii) مسافر میل، یا سنجیر میل، گنتی کے لیے سادہ اکائی کی مثال ہے۔

(iii) نفلی صحت اور معقول صحت باہم متبادل اصطلاحات ہیں۔

(iv) کسی جائزے میں مطلوبہ درجہء صحت کا تعین مواد اکٹھا کرنے کا کام شروع کرنے سے پہلے کیا جاتا ہے۔

2.10 خلاصہ Let Us Sum Up

شماریاتی جائزے کو منظم کرنے میں آپ کو بہت سارے مراحل سے گزرنا پڑتا ہے : (1) مسئلہ کی تعریف کرنا (2) جائزے کے مقصد اور وسعت کا

تعین کرنا (3) جائزے کے ابتدائی اقدامات کا تعین کرنا مثلاً مواد کے ماخذوں کے بارے میں فیصلہ کرنا۔ انکوائری کی قسم، شماریاتی اکائی اور مطلوبہ صحت کے درجہ کا تعین کرنا (4) مواد اکٹھا کرنا (5) مواد کی تدوین کرنا (6) مواد کی درجہ بندی اور جدول سازی (7) مواد کا تجزیہ (8) مواد کی تعبیر اور (9) رپورٹ لکھنا۔

شماریات کے ماخذ ابتدائی ہو سکتے ہیں یا ثانوی۔ اگر تحقیق کار کے ذریعہ مواد کو اصلی مواد کی طرح پہلی مرتبہ جمع کیا جائے تو اسے ابتدائی مواد کہتے ہیں۔ جن ماخذوں سے ابتدائی مواد اکٹھا کیا جاتا ہے انہیں ابتدائی ماخذات کہتے ہیں۔ پہلے سے اکٹھا کئے گئے مواد کو اگر استعمال کیا جائے تو یہ تحقیق کار کے لئے ثانوی مواد ہے۔ ایسے مواد کے ماخذ کو ثانوی ماخذ کہتے ہیں۔ ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے متعدد طریقے ہیں جیسے، شخصی مشاہدہ، سوالنامہ، انٹرویو، شیڈول وغیرہ۔ ان میں سے کون سا طریقہ اختیار کیا جائے اس کا انحصار تحقیق کی نوعیت، مقصد، وسعت، وقت اور پیسہ کی دستیابی پر ہوتا ہے۔ کئی ماخذوں سے ثانوی مواد اکٹھا کیا جا سکتا ہے جیسے کتابیں، روئدادیں، رسائل، اخبارات اور دیگر مطبوعہ ماخذات۔ اس کو غیر مطبوعہ ماخذ سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

جائزہ کئی قسم کا ہو سکتا ہے۔ مردم شماری جائزہ یا نمونہ واری جائزہ۔ اول الذکر صورت میں پورے مجموعے کا جائزہ لیا جاتا ہے جبکہ موخر الذکر صورت میں گروپ کے صرف ایک حصے کا مطالعہ کیا جاتا ہے۔ عملی طور پر، نمونہ واری جائزے بہت مقبول ہیں کیونکہ ان کے بہت فوائد ہیں۔ دیگر قسم کی تحقیقات بلاواسطہ یا بالواسطہ، اصلی یا تکراری، رازدارانہ یا کھلی، باقاعدہ یا وقتی وغیرہ ہو سکتی ہیں۔ تحقیقات کی قسم طے کرتے وقت کئی عوامل پر غور کرنا پڑتا ہے۔

نمونہ واری جائزے کی صورت میں، نمونے کا انتخاب کرنے کے کئی طریقے ہیں۔ وسیع طور پر ان طریقوں کی اس طرح زمرہ بندی کی جا سکتی ہے :

(1) احتمالی نمونہ بندی طریقے اور (2) غیر احتمالی نمونہ بندی طریقے۔ نمونہ بندی سے متعلق دو قوانین اہم ہیں: (1) قانون شماریاتی باقاعدگی (2) بڑے اعداد کا قانون جمود۔ شماریاتی باقاعدگی کے قانون کے مطابق ایک معتدل سائز کے مد کو یونیورس میں سے اٹکل لیا جائے تو اس میں تقریباً وہی خصوصیات ہوں گی جو کہ (یونیورس) میں پائی جاتی ہیں۔ بڑے اعداد کا قانونِ جمود، شماریاتی باقاعدگی کے قانون کا منطقی نتیجہ ہے۔ اس کے مطابق بڑے اعداد، چھوٹے اعداد کی بہ نسبت زیادہ مستقل و مستحکم ہوتے ہیں۔ شماریاتی اکائی وہ اساس ہے جس کو متغیرات کی پیمائش (یا وصف شماری) کے لئے بغرض گنتی، تجربہ و تاویل منتخب کیا جاتا ہے۔ جس کا سادہ غیر مبہم، مستحکم، مکمل اور موزوں ہونا ضروری ہے۔ شماریاتی جائزوں میں، عام طور پر مطلق صحت کا حصول مشکل ہے۔ ہمارا مقصد معقول صحت سے اچھی طرح سے حاصل ہو جاتا ہے جو کہ بڑی حد تک تحقیقات کی نوعیت اور مقصد پر منحصر ہوتا ہے۔

2.11 کلیدی الفاظ Key Words

مردم شماری تحقیقات (Census Enquiry) : آبادی میں تمام مدات کی مکمل مردم شماری۔

بڑے اعداد کا قانون جمود (Law of Inertia of Large Numbers) : بڑے اعداد کے قانون جمود کے مطابق، بڑے نمونوں سے اکٹھا کردہ مواد میں درجہ استحکام چھوٹے نمونوں سے اکٹھا کردہ مواد کی بہ نسبت زیادہ ہوتا ہے۔ اس کا ایک سادہ مفہوم یہ ہے کہ بڑے اعداد میں زیادہ تغیرات نہیں ہوتے اور یہ اعداد نسبتاً زیادہ مستحکم ہوتے ہیں۔

شماریاتی باقاعدگی کا قانون (Law of Statistical Regularity) : شماریاتی قانون جس کی رو سے ایک معتدل قامت کا نمونہ آبادی میں سے اٹکل کے ذریعہ لیا جائے تو اس میں تقریباً وہی خصوصیات ہوں گی جو کہ کائنات (یونیورس) میں پائی جاتی ہیں۔

آبادی (Population) : کسی مطالعہ سے مربوط تمام مدات کا کل مجموعہ۔

ابتدائی مواد (Primary Data) : کسی تحقیق کار کا پہلی مرتبہ جمع کردہ اصلی مواد۔ یہ مواد (اعداد و شمار وغیرہ) خام شکل میں ہوتا ہے، جس پر شماریاتی طریقوں کا اطلاق تجزیے کے لئے کیا جاتا ہے۔

اٹکل نمونہ واری طریقہ (Random Sampling Method) : وہ شماریاتی تکنیک جس کے ذریعہ آبادی (population) کے ہر ایک مد کو نمونہ میں شامل ہو سکنے کا مساوی موقعہ حاصل ہوتا ہے۔

معقول صحت (Reasonable Accuracy) : صحت کی وہ سطح جس کو کسی مخصوص تحقیقات (investigation) کے حالات کے پیشِ نظر ضروری سمجھا جاتا ہے۔

نمونہ جاتی تحقیق (Sample Enquiry) : آبادی میں سے چند منتخبہ نمائندہ مدات کا مطالعہ۔

نمونہ بندی طریقے (Sampling Methods) : آبادی میں سے نمونہ مدات کے منتخب کرنے کے طریقے۔

ثانوی مواد (Secondary Data) : وہ مواد جس کو سابق میں کسی اور شخص نے اکٹھا کیا ہو، اور اب تحقیق کار استعمال کر رہا ہے۔ یہ مطبوعہ یا غیر مطبوعہ دونوں شکلوں میں موجود رہ سکتا ہے۔ یہ مکمل تیار مال قطعی پیداوار کی شکل میں ہوگا کیونکہ اس کو سابق میں کسی نہ کسی شکل میں استعمال کیا گیا ہے۔

شماریاتی جائزہ (Statistical Survey) : کسی مخصوص علاقہ اور وقت پر محیط مظہر فطرت سے متعلق حقائق کا پتہ چلانے والی تحقیقات، سروے کے ذریعے زیر غور مظہر کے مختلف پہلوؤں سے متعلق مقداری معلومات اکٹھا کی جاتی ہیں۔

شماریاتی اکائی (Statistical Unit) : شماریاتی اکائی وہ اساس ہے جس کو متغیروں کی پیائش یا وصف شماری کے لئے بغرض گنتی، تجزیہ و تاویل تحقیق کار منتخب کرتا ہے۔

2.12 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات Answers to Check Your Progress

A .3	(i)	نہیں	(ii)	ہاں	(iii)	ہاں	(iv)	نہیں	(v) نہیں
B .4	(i)	نہیں	(ii)	ہاں	(iii)	ہاں	(iv)	نہیں	
.5	(i)	غلط	(ii)	صحیح	(iii)	غلط	(iv)	صحیح	
C .6	(i)	صحیح	(ii)	غلط	(iii)	غلط	(iv)	صحیح	

2.13 امتحانی سوالات Terminal Questions

(1) شماریاتی جائزہ کیا ہے؟ شماریاتی جائزے کے منظم کرنے میں درکار ضروری اقدامات کو بیان کیجیے۔

(2) مواد اکٹھا کرنے کے عمل سے قبل کن ابتدائی اقدامات کو روبہ عمل لایا جانا چاہیے؟ تشریح کیجیے۔

(3) ابتدائی اور ثانوی مواد میں فرق کیجیے۔ ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے مختلف طریقوں اور ثانوی مواد کے ماخذوں کی وضاحت کیجیے۔

(4) مردم شماری جائزے پر نمونہ جائزے کو کیوں ترجیح دی جاتی ہے؟ تشریح کیجیے۔

(5) نمونہ بندی کیا ہے؟ نمونہ بندی کے مختلف طریقوں کی تشریح کیجیے۔

(6) مندرجہ ذیل پر مختصر نوٹ لکھیے۔

(i) اچھی شماریاتی اکائی کی خصوصیات

(ii) شماریاتی جائزے میں معقول درجہ صحت کی اہمیت

(iii) شماریاتی باقاعدگی کا قانون

(iv) بڑے اعداد کا قانون جمود

(v) معقول صحت، مطلق صحت اور نقلی صحت کے درمیان فرق۔

نوٹ : یہ سوالات اس اکائی کے سمجھنے میں مددگار ثابت ہوں گے۔ ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجیے لیکن آپ کے جواب یونیورسٹی کو نہ بھیجئے۔ یہ آپ کی مشق کے لیے ہیں۔

اکائی 3 صحت، تقرّب اور خطائیں

UNIT:3 - ACCURACY, APPROXIMATION AND ERRORS

ساخت Structure

3.0	مقاصد		Objectives
3.1	تمہید		Introduction
3.2	صحت		Accuracy
3.3	تقرب		Approximation
	3.3.1	تقرب کے طریقے	Methods of Approximation
3.4	شماریات میں خطائیں		Errors in Statistics
	3.4.1	تقریبی خطائیں	Errors of Approximation
	3.4.2	تقریبی خطاؤں کی پیمائش	Measurement of Errors of Approximation
	3.4.3	متصل اعداد سے تحسیب	Computation with Rounded Numbers
	3.4.4	ریاضیاتی عمل کا خطاؤں پر اثر	Effect of Mathematical Operations on Errors
	3.4.5	میلانی اور غیر میلانی خطائیں	Biased and Unbiased Errors
	3.4.6	میلانی اور غیر میلانی خطاؤں کا تخمینہ	Estimation of Biased and Unbiased Errors
	3.4.7	نمونہ بند اور غیر نمونہ بند خطائیں	Sampling and Non-sampling Errors
3.5	خلاصہ		Let Us Sum Up
3.6	کلیدی الفاظ		Key Words
3.7	اپنی معلومات کی جانچ: جوابات		Answers to Check Your Progress
3.8	امتحانی سوالات / مشقیں		Terminal Questions/Exercises

3.0 مقاصد Objectives

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:۔

- صحت کی ضرورت کی تحسین کریں اور مطلق صحت اور جعلی صحت میں فرق کر سکیں۔
- تقرب کے معنی اور طریقوں کی تشریح کر سکیں۔
- شماریات میں مختلف قسم کی خطاؤں کو بیان کر سکیں۔
- مختلف طریقوں سے خطاؤں کو محسوب کر سکیں۔

3.1 تمہید Introduction

آپ نے پچھلے صفحات میں پڑھا ہے کہ شماریاتی مواد کا معقول معیار صحت کا حامل ہونا ضروری ہے اور جب ہم شماریاتی سروے کرتے ہیں، ہم کو صاف

طور پر درجہ صحت کی تعریف کرنی چاہیے۔اس لئے سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ صحت کی پیائش کیسے کی جائے اور کس طرح اعداد کا تقرب کیا جائے تاکہ صحت کی مطلوبہ سطح حاصل ہو؟ دوسرے پہلو جنہیں ذہن نشین رکھنا چاہیے، وہ یہ ہیں کہ شماریاتی جائزے منعقد کرتے وقت مختلف مراحل میں خطائیں در آتی ہیں۔یہ خطائیں، غیر صحیح پیائش، ناموزوں طریقے، اعداد کے تقرب، نمونہ اکائیوں کے انتخاب سے منسلکہ امکانی عوامل وغیرہ کی وجہ سے رونما ہو سکتی ہیں۔اس اکائی میں آپ صحت کے تصور کے متعلق مزید معلومات حاصل کریں گے۔علاوہ ازیں آپ، تقرب کا تصور، تقرب کے طریقے، تقرب اور نمونہ بندی کی وجہ سے سرزد خطائیں اور خطاؤں کی پیائش کے مختلف طریقے بھی سیکھیں گے۔

3.2 صحت Accuracy

جیسا کہ آپ جانتے ہیں، شماریاتی مواد، گنتی، پیائش یا تخمین سے حاصل کر سکتے ہیں۔تیار کردہ موٹر کاروں سے مواد ان کی تعداد کو گن کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔تیار دودھ کے پاؤڈر سے متعلق مواد، دودھ کے پاؤڈر کو وزن کر کے معلوم کیا جاتا ہے لیکن فصل کاٹنے سے قبل اگر سرکار کو گیہوں کی پیداوار سے متعلق مواد مطلوب ہو تو ماہر شماریات جملہ پیداوار کا ایک تخمینہ دے سکتا ہے۔گنتی اگر مناسب انداز میں کی جائے تو صحیح نتائج برآمد ہو سکتے ہیں۔اگر ایک ٹرک بھر دودھ کا وزن ٹرک ترازو پر کیا جائے تو ایک کیلوگرام کم یا زیادہ وزن سے کوئی خاص فرق نہیں پڑتا اور اس کے برخلاف چنکی بھر پاؤڈر اگر کیمیکل ترازو میں تولا جائے تو ایک ملی گرام کی کمی سے توازن بگڑ سکتا ہے۔ایسی صورت میں وزن ملی گرام کی حد تک بھی صحیح ہوگا لہذا پیائش کی صحت کا زیادہ تر انحصار، زیر استعمال پیائشی آلات پر ہوتا ہے۔آپ بعد میں ان عوامل کے متعلق اس اکائی میں مطالعہ کریں گے جب کہ ہم خطاؤں کے امکانی ذرائع پر بحث کریں گے۔جیسا کہ ہم نے سابقہ اکائی میں تذکرہ کیا تھا، مطلق صحت حاصل کرنا نہایت مشکل کام ہے۔طبعی علوم جیسے طبیعات، کیمیا وغیرہ میں بھی مکمل صحت حاصل کرنا مشکل ہے۔ شماریاتی پیائش میں، جیسا کہ سابقہ اکائی میں کہا گیا ہے کہ تقریباً تمام عملی مقاصد کے لیے ایک معقول حد تک صحت کافی ہے جس کا تعین اس کی عملی اہمیت اس کے استعمال، لاگت، جائزہ کی نوعیت اور مقصد کو پیش نظر رکھ کر کیا جاتا ہے۔کئی صورتوں میں اونچے معیار کی صحت کی قطعی ضرورت نہیں ہوتی۔مثال کے طور پر یہ زیادہ بامعنی بیان ہے کہ کسی ملک کی آبادی ایک ملین یعنی دس لاکھ ہے بہ نسبت یہ کہنے کے کہ یہ 1,004,601 ہے۔اسی لئے اگر ضرورت نہ ہو تو مطلق صحت پر خصوصی توجہ ضروری نہیں ہے۔

مطلق صحت مطلوبہ وضاحت نہیں دے سکتی۔مثال کے طور پر کسی چلر فروش کی دوکان سے پالسٹر کپڑے اور سوتی کپڑے کی سالانہ فروخت کا موازنہ مطلوب ہو تو پالیسٹر کی حقیقی قیمت فروخت 60,340 روپے اور سوتی کپڑے کی قیمت فروخت 40,105 ظاہر کی جائے۔اس کو 2 : 3 میں ظاہر کرنا بہتر ہے۔

درکار صحت کا انحصار صورت حال پر بھی ہوتا ہے۔ایک لوہار، لوہا تولنے کے لئے گراموں کی پرواہ نہیں کر سکتا لیکن ایک سنار، سونا تولنے کے لئے ملی گرام کی حد تک وزن کی صحت کا خیال رکھے گا۔

صحت ایک اضافی اصطلاح ہے۔پیائشیں جو کسی ایک مقصد کے لئے درست ہوتی ہیں، کسی دوسرے مقصد کے لئے غیر درست بھی ہو سکتی ہیں۔مثال کے طور پر، آبادی ظاہر کرنے میں کوئی بھی ٹھیک ٹھیک عدد نہیں بتا سکتا۔لیکن جب انتخابی نتائج کا اعلان ہوتا ہے تو ڈالے گیے ووٹوں کی ٹھیک ٹھیک تعداد نہایت اہم ہے کیونکہ کبھی کبھی ہار جیت کا فیصلہ صرف ایک ووٹ کی کمی بیشی سے ہوتا ہے۔لہذا صحت کی مطلوبہ سطح کے تعین کی رہنمائی انکوائری (تحقیقات) کے مقصد سے ہوتی ہے۔

نقلی صحت (Spurious Accuracy) : جب صحت کی سطح، اس کی حقیقی یا مطلوبہ سطح سے زیادہ ہو تو اس کو نقلی صحت کہتے ہیں۔شماریات میں ایسی غیر موجود صحت کا دعویٰ نہیں کرنا چاہیے۔یہ بات نوٹ کی جانی چاہیے کہ نقلی صحت گمراہ کن بھی ہو سکتی ہے۔شماریاتی عمل کے دوران نقلی صحت کی وجہ سے مواد کو ضرورت سے زیادہ صحت کے ساتھ ظاہر کیا جاتا ہے اور قطعی نتیجہ زیادہ صحت کے ساتھ پیش کیا جاتا ہے اگرچہ درمیانی گنتی (Intermediate calculations) کم تر صحت کے ساتھ کی جاتی ہے۔اس صورت میں بھی نقلی صحت کا جواز پیدا ہوتا ہے۔انتہائی صحت کے غلط اظہار سے ممکنہ حد تک احتراز ضروری ہے۔

3.3 تقرب Approximation

آپ واقف ہوں گے کہ اکثر صورتوں میں صرف قریبی اعداد ہی کا حصول ممکن ہے۔ یہ بات بالخصوص پیائش کی صورت میں اور بھی سچ ہے کیونکہ بالکل صحیح، طبعی، پیائش کا حصول کافی دشوار ہے۔ اگرچہ اس بارے میں معقول درجہ تک صحت حاصل کی جاسکتی ہے۔ اگر کسی عدد میں متعدد ہندسے شامل ہوں تو الجھن کا باعث بن سکتے ہیں۔ تقرب کے ذریعہ غیر ضروری ہندسوں کا اخراج کیا جاسکتا ہے اور اس طرح الجھن کا ازالہ ہو سکتا ہے۔ تقرب واضح طور پر سمجھنے میں مدد کرتا ہے اور تخمیب اور تقابل کو آسان بناتا ہے۔ کس حد تک تقرب حاصل کیا جاسکتا ہے، اس کا انحصار مواد میں مطلوبہ صحت کے درجہ پر ہوتا ہے۔ ہندسوں کے اتصال کے ذریعہ تقرب حاصل کیا جاتا ہے۔

3.3.1 تقرب کے طریقے Methods of Approximation

جیسا کہ اوپر کہا گیا ہے، ہندسوں کے اتصال کے ذریعے تقرب حاصل کیا جاتا ہے۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ اتصال کیا ہے؟ بڑے اعداد کو، آخر کے چند ہندسے حذف کر کے، سادہ شکل میں ظاہر کرنے کی مشق کو اتصال کہتے ہیں۔ اتصال کے کئی طریقے ہیں۔ اب ہم ان طریقوں کے متعلق بحث کریں گے۔

(i) **بالائی اتصال (Rounding Up)** : اگر اعداد کو بڑھا کر اوپر والی اگلی مکمل اکائی سے ملادیں تو اسے بالائی اتصال کا طریقہ کہیں گے۔ مثال کے طور پر ایک پوسٹل پارسل کا وزن 8.9 گرام ہے۔ اس وزن کو بالائی اتصال کے ذریعہ 9 گرام ظاہر کر کے اس وزن پر پارسل اخراجات عائد کیے جائیں گے۔

(ii) **زیریں اتصال (Rounding down)** : اگر اعداد کو گھٹا کر نچلی مکمل اکائی سے ملادیا جاتا ہے تو اسے زیریں اتصال کہتے ہیں۔ ایک عام مثال کہ کسی شخص کی عمر کا اس کے پچھلے یوم پیدائش پر تعین کرنا ہے۔ اگر آپ 19 سال 10 مہینے کے ہیں تو بھی آپ اپنی پچھلی سالگرہ کی عمر 19 سال بتائیں گے۔ اس کو زیریں اتصال کہتے ہیں۔

(iii) **نزدیک ترین اکائی کی قدر بیان کرنا (Stating the value of the nearest unit)** : نزدیک ترین مکمل ہندسے سے اتصال کے قواعد حسب ذیل ہیں :

(a) جب ہندسوں میں سے پہلا ہندسہ جو حذف شدنی ہے 5 سے کم ہے، سابقہ ہندسہ غیر متبدلہ رہتا ہے مثال کے طور پر عدد 2,23,490 کو اگر قریبی ہزار تک تقرب کرنا ہے تو یہ 2,23,000 بن جاتا ہے۔ اس صورت میں 490 کو حذف کر دیا جاتا ہے کیونکہ حذف شدنی پہلا ہندسہ 4 ہے جو 5 سے کم ہے۔

(b) جب ہندسوں میں سے پہلا حذف شدنی ہندسہ 5 سے زیادہ ہے تو، سابقہ ہندسہ کو ایک سے بڑھا دیا جائے۔ مثال کے طور پر عدد 1,42,896 کو قریب ترین ہزار میں تقرب کیا جائے تو یہ 1,43,000 بن جاتا ہے۔ یہاں پر 896 کو حذف کیا جارہا ہے اور حذف شدنی پہلا ہندسہ (یعنی 8) 5 سے زیادہ ہونے کی وجہ سے سابقہ ہندسہ (2) کو بڑھا کر (3) کیا گیا ہے۔ اسی طرح سے اگر 1,83,503 کو قریب ترین ہزار میں تقرب کیا جائے تو یہ 1,84,000 ہو جاتا ہے۔

(c) اگر پہلا حذف شدنی ہندسہ ٹھیک 5 ہو (جس کو غیر جانبدار ہندسہ بھی کہتے ہیں)، جس کی دائیں جانب صرف صفر ہیں، پچھلے ہندسے کو غیر متبدل رکھئے، اگر یہ جفت عدد ہے۔ اگر یہ طاق عدد ہے، تو اس میں ایک (1) کا اضافہ کیجیے۔ اس کا مطلب ہے کہ " اتصال کیجئے اس طرح کہ متصل ہندسہ جفت عدد ہو"۔ مثال کے طور پر 2,23,500 کا جب قریبی ہزار تک تقرب کیا جائے تو یہ 2,24,000 ہوگا۔ اسی طرح 2,24,500 کے عدد کا قریبی ہزار تک تقرب کیا جاے تو وہ بھی 2,24,000 میں ہوگا۔ پہلی صورت میں جب 500 کو حذف کیا گیا تو پچھلا ہندسہ (یعنی 3) ایک طاق عدد ہے۔ اس لئے اسے 4 پر بڑھا دیا جاتا ہے لیکن دوسری صورت میں پچھلا ہندسہ پہلے سے ہی ایک جفت عدد (یعنی 4) ہے لہذا 500 حذف کرنے سے یہ تبدیل نہیں ہوتا۔ بہر حال اس مقصد کے لئے صفر کو جفت عدد سمجھا جاتا ہے۔

(iv) ملحوظ ہندسوں کی رو سے اتصال "Round to "So Many Significant Figures" : کسی سادہ عدد کے ہندسے ماسوا اصلی عدد بائیں جانب کے صفروں کے اور نقطہ اعشاریہ کے دائیں جانب کے آخری ہندسوں کے جنہیں بامعنی نہیں سمجھا جاتا۔ عدد 14,005 میں دونوں صفر بامعنی ہیں کیونکہ ان کے دائیں اور بائیں دونوں جانب غیر صفر ہندسے ہیں۔ کسی عدد کے انتہائی بائیں جانب کے صفر بامعنی نہیں ہوتے۔ مثلاً 0,00,500 میں انتہائی بائیں جانب کے تین صفروں کی کوئی قدر نہیں ہے۔ اعداد 501 ' 0,0501 اور 0.000501 ہیں۔ ہر عدد میں تین ملحوظ ہندسے ہیں یعنی 5 ' 0 اور 1۔ کسی عدد کے انتہائی دائیں جانب کے صفر کبھی کبھار بامعنی ہوتے ہیں اگر عدد 17,000 اکائی کے مقام تک صحیح ہے تو تمام پانچ ہندسے ملحوظ ہندسے ہیں۔ اگر 17,000 صرف قریب ترین ہزار تک صحیح ہو تو صرف دو ہندسہ 1 اور 7 ملحوظ ہندسے ہیں اور تمام صفر غیر اہم ہیں۔

مقام اعشاریہ کے انتہائی دائیں جانب صفر ہوں اور ان کے کے بعد کوئی غیر صفر ہندسے نہ ہوں تو اس سے یہ پتہ چلتا ہے کہ دیا گیا عدد اعشاریہ کے کس مقام تک صحیح ہے۔ مثلاً 123.00 سے ظاہر ہے کہ یہ عدد اعشاریہ کے دو مقام تک صحیح ہے چنانچہ یہ دونوں صفر بامعنی ہیں۔ ملحوظ ہندسوں میں قدر ظاہر کرنے سے یہ پتہ چلتا ہے کہ دیا گیا عدد کتنے ہندسوں تک صحیح ہے مثلاً 3.4752 کو دو ملحوظ اعداد میں ظاہر کرنے کے لئے اس عدد کے پہلے دو ہندسوں کے اتصال سے 752 کو خارج کر کے 3.5 لکھا جائے گا۔ اس طرح 2,23,490 چار ملحوظ اعداد کے اتصال سے 2,23,500 لکھا جائے گا۔

ملحوظ اعداد سے مراد وہ ہندسے ہیں جو حقیقی معلومات مہیا کرتے ہیں اور غلطیوں سے پاک ہوتے ہیں۔ تمثیل 1 کا غور سے مطالعہ کیجئے۔ یہ اتصال کے عمل کی کچھ اور تشریح کر سکے گی اور ساتھ ہی ساتھ نمایاں ملحوظ ہندسوں کے تصور کو اجاگر کرے گی۔

تمثیل 1

اصلی عدد	متصل عدد	متصل عدد میں ملحوظ ہندسے
5,99,502	600 ہزار	600
5,99,500	600 ہزار	600
5,99,498	599 ہزار	599
5,98,500	598 ہزار	598
999.051	999.1 ایک اعشاریہ تک	9991
999.051	999.0 ایک اعشاریہ تک	9990
999.150	999.2 ایک اعشاریہ تک	9992
999.950	1,000,0 ایک اعشاریہ تک	10000
0.00723	0.007 تین اعشاریوں تک	7

اپنی معلومات کی جانچ A

(1) نقلی صحت کیا ہے؟

.....

.....

.....

.....

(2) تقرب کے طریقوں کی فہرست لکھیے۔

.....

.....

.....

.....

(3) ملحوظ ہندسوں سے کیا مراد ہے؟

.....

.....

.....

.....

(4) مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط۔ ان کے جوابات لکھیے۔

(i) شماریاتی مواد میں مطلق صحت کا حصول ناممکن ہے۔
(ii) مطلق صحت اور فقطی صحت ہم معنی ہیں۔
(iii) اتصال کے سبب حقیقی قدر سے زائد قدر حاصل ہوتی ہے۔
(iv) صفر '0' ہر گز "ملحوظ ہندسہ" نہیں ہے۔

(5) مندرجہ ذیل اعداد کو ہزار تک اتصال کر کے ظاہر کیجئے۔

(i) 262500
(ii) 87634
(iii) 96215
(iv) 4399510
(v) 321501

(6) مندرجہ ذیل اعداد کو دو (2) ملحوظ ہندسوں تک ظاہر کیجئے۔

(i) 2358
(ii) 76435
(iii) 8.901
(iv) 0.00635
(v) 2.031

3.4 شماریات میں خطائیں Errors in Statistics

شماریات میں لفظ "خطا" خاص معنوں میں استعمال ہوتا ہے۔ کسی مد کی حقیقی قدر اور تخمینی یا تقریبی قدر میں موجود فرق کو "خطا" کہا جاتا ہے۔ خطاؤں کا رونما ہونا اس لئے ممکن ہے کہ تخمینوں کا دارومدار عام طور پر نمونہ مشاہدوں پر ہوتا ہے اور ان مشاہدوں کے تجربہ و تاویل میں اتصال و

تقرب جیسے شماریاتی طریقوں کا بہت زیادہ استعمال ہوتا ہے۔ فرض کیجئے کہ آپ کھاد میں نائٹروجن کا فیصد (وزن میں) معلوم کرنے میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ یہ نمونے فرٹیلائزر مکسچر مختلف حصوں سے مختلف ایام میں حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ ان نمونوں کو مختلف تجربہ گاہوں کو بھیجا جاتا ہے جہاں مختلف تجزیہ کار مختلف طریقوں سے اس نمونہ کا تجزیہ کرتے ہیں۔ روزمرہ کی حرارت، رطوبت اور دیگر عوامل میں تبدیلی کی وجہ سے آمیزے کی ترکیب میں ہلکا سا تغیر پیش آسکتا ہے۔ مختلف نمونوں کی وجہ سے بھی معمولی تغیرات ہوسکتے ہیں جس کی وجہ سے نمونہ بندی خطائیں رونما ہوسکتی ہیں۔ تجزیہ کاروں کے طریقہ کار میں اختلاف سے بھی کچھ خطائیں ہمارے علم میں آسکتی ہیں علاوہ ازیں، پیمائش کی خطائیں بھی ہوسکتی ہیں جو کہ مشاہداتی خطائیں کہلاتی ہے۔ اس طرح سے تجربات اور جائزوں میں کئی اقسام کی خطائیں رونما ہوتی ہیں جیسے (i) نمونہ بندی خطائیں، (ii) تجزیاتی خطائیں (iii) مشاہداتی اور پیمائشی خطائیں۔ یہ بات ذہن نشین رکھی جائے کہ مواد اکٹھا کرتے وقت رونما ہونے والی غلطیوں کو خطائیں نہیں کہا جاسکتا۔ اس طرح حسابی گنتی کی غلطیوں کو بھی خطا نہیں کہا جاسکتا۔ چونکہ شماریات میں زیادہ تر تخمینیاور/یا تقریبی قدروں کا استعمال ہوتا ہے، خطاؤں کا سرزد ہونا ناگزیر ہے جن کا مکمل تدراک اگرچہ ناممکن ہے لیکن ان کو کم کرنے کے طریقے موجود ہیں۔

خطاؤں کے ماخذ Sources of Errors

شماریات میں خطاؤں کے تین اہم ماخذ ہیں۔ ذیل میں ان پر بحث کی جائے گی۔

(1) ماخذی خطائیں **Errors of Origin** : پیدائشی آلات کی کوتاہیوں کی وجہ سے اونچائی، وزن اور فاصلہ جیسے متغیروں کی پیمائش میں کامل صحت کا حصول ناممکن ہوجاتا ہے چنانچہ تخمینی اور اصل کیفیت میں اختلاف کا زیادہ امکان رہتا ہے۔ اکثر اوقات ناموزوں شماریاتی اکائیوں کا انتخاب غیر صحیح پیمائش کا موجب ہوتا ہے۔ اطلاع دہندوں کے غیر صحیح جوابات سے بھی غیر صحیح پیمائش کا امکان رہتا ہے۔ مواد جمع کرنے والوں کے ذہنی میلان کی وجہ سے بھی خطائیں رونما ہوتی ہیں۔ اس طور پر رونما ہونے والی خطائیں ماخذی خطائیں کہلاتی ہیں۔

(2) عدم کفایتی خطائیں(**Errors of inadequacy**) : کسی بھی انکوائری میں نمونہ، آبادی کا نمائندہ ہونا چاہیئے۔ اگر نمونہ غلط اور آبادی کی نمائندگی نہ کرتا ہو تو خطاؤں کے سرزد ہونے کا بہت زیادہ احتمال ہوتا ہے۔ اس قسم کی خطائیں عدم کفایتی خطائیں کہلاتی ہیں۔

(3) نادانستہ (غیر ارادی خطائیں) (**Errors of manipulation**) : بہت سی ایسی خطائیں ہیں جو کہ اشیاء کی پیمائش، گنتی، درجہ بندی کے دوران تحقیق کار سے نادانستہ طور پر سرزد ہوجاتی ہیں۔ ان خطاؤں کے ساتھ ساتھ تقرب کی وجہ سے بھی خطائیں رونما ہوں تو ان دونوں کو نادانستہ خطائیں کہا جاتا ہے۔ مشاہدوں کی تعداد میں اضافہ کے ساتھ ساتھ ان خطاؤں کی تعداد میں بھی اضافہ ہوجاتا ہے۔

کسی بھی شماریاتی تحقیق میں مندرجہ بالا تینوں قسم کی خطائیں موجود رہتی ہیں۔

3.4.1 تقریبی خطائیں Errors of Approximation

شماریاتی رپورٹوں میں، سہولت کی خاطر اعداد کا اتصال کیا جاتا ہے۔ جب اعداد کو متصل کیا جاتا ہے، درجہ صحت بادرجہ خطا کو مندرجہ ذیل میں سے کسی ایک طریقے سے بیان کیا جاسکتا ہے۔

(1) مواد کو قریب ترین ہزار، سویا صحیح عدد میں ظاہر کرنا۔ مثال کے طور پر 4,672.4 کو قریب ترین ہزار یعنی 5,000 پر تقرب کیا جاتا ہے اور قریب ترین صحیح عدد یعنی 4,672 پر تقرب کیا جاتا ہے۔

(2) مطلق معنوں میں تقرب کو ظاہر کرنے کے لئے علامات (+) اور (-) استعمال کرنا یعنی 5000 ± 500 ۔ اس کا مطلب ہے کہ حقیقی قدر 5000 سے 500 زیادہ یا کم ہوسکتی ہے۔

(3) خطا کا تناسب ظاہر کرنے کے لئے علامات (+) اور (-) کا استعمال کرنا یعنی $5,000 \pm 0.1$ ۔ اس کا مطلب ہے حقیقی قدر 5,000 کی 0.1 یعنی 500 زیادہ یا کم ہوگی۔

(4) فیصد کے استعمال مثلاً $5,000 \pm 10\%$ کا مطلب ہے کہ خطا (5,000 کا) 10% ہے۔

(5) محفوظ اعداد (Significant figures) کی حد تک صحت کی سطح تقرب ظاہر کرنا مثلاً 4,672.4 پانچ محفوظ اعداد تک صحیح ہے۔

علامت ± کا استعمال درجہ تقرب (یا خطا) کو پیش کرنے کا کار آمد طریقہ ہے۔ مثبت اور منفی علامات، ان تقرب کے درجہ (یا خطا) کو ظاہر کرتے ہیں جس کے درمیان خطا واقع ہوتی ہے۔ وہ حدیں جن کے درمیان حقیقی خطا وقوع پذیر ہوتی ہے امکانی خطائیں (Possible errors) کہلاتی ہیں۔

5,000 ± 500 پر غور کیجئے۔ اعظم ترین امکانی خطا 500 ہے۔ اگر کسی مقدار کا قریب ترین ہزار پر اتصال کیا جاتا ہے، خطا کی بالائی حد (± 500) اور زیریں حد (-500) ہوگی، لہذا خطایوں لکھی جائے گی 500 ± اگر کوئی مقدار قریب ترین ہو اور دس (10) پر اتصال کی جائے تو امکانی خطائیں بالترتیب 50 ± اور 5 ± ہوں گی۔ اعظم ترین امکانی خطا کے محسوب کرتے وقت طریقہ اتصال کو مد نظر رکھا جاتا ہے۔

3.4.2 تقریبی خطاؤں کی پیمائش Measurement of Errors of Approximation

ہم تقرب میں خطاؤں کے معنی اور اسباب پر بحث کر چکے ہیں۔ اب ہم ان خطاؤں کی پیمائش کے مختلف طریقوں کا مطالعہ کریں گے۔

(1) مطلق خطا (Absolute Error) : حقیقی قدر اور اس کی تقریبی قدر (تخمینی یا مشہود) کے درمیانی فرق کو خطائے مطلق کہتے ہیں۔

$$\text{خطائے مطلق} = AE = x - x'$$

جہاں پر x حقیقی قدر اور x' تقریبی قدر ہے۔

خطائے مطلق مثبت ہو سکتی ہے یا منفی۔ مثال کے طور پر 500 ± 5,000 کی صورت میں، ہر دو جانب اعظم ترین خطائے مطلق 500 ہے۔ اگر حقیقی قدر، تخمینی قدر سے زیادہ ہے تو خطا مثبت ہوگی اور اگر یہ تخمینی قدر سے کم ہے تو خطا منفی ہوگی۔

فرض کیجئے کہ کسی ریاست کی آبادی 2,71,70,314 ہے اور اس کے دار الحکومت کی آبادی 26,39,766 ہے۔ ان اعداد کا جب قریب ترین لاکھ میں تقرب کریں گے تو ریاست کی آبادی 272 لاکھ اور دار الحکومت کی آبادی 26 لاکھ ہوگی۔ پہلی صورت میں تقریبی قدر، اصل قدر سے زیادہ ہے اور دوسری صورت میں تقریبی قدر، اصل قدر سے کم ہے۔ اب ان صورتوں میں خطائے مطلق کو ذیل کی طرح محسوب کر سکتے ہیں۔

ریاست کی آبادی کے لئے (For the State Population)

تقریبی قدر۔ حقیقی قدر = خطائے مطلق (AE)

= 2,71,70,314 - 2,72,00,000

= -29,686

ریاستی دار الحکومت کے لئے (For the State Capital)

تقریبی قدر۔ حقیقی قدر = خطائے مطلق (AE)

= 26,39,766 - 26,00,000

= 39,766

ان دو تمثیلوں میں، پہلی صورت میں خطا منفی اور دوسری میں مثبت ہے۔

(2) اضافی خطا (Relative Error): ریاستی آبادی کی خطائے مطلق کی قدر یعنی (-29,686) اور اس کے دار الحکومت کی آبادی کی خطائے مطلق کی قدر (یعنی 39,766) میں زیادہ فرق نہیں ہے۔ اگرچہ ریاستی آبادی، دار الحکومت کی آبادی کا دس گنا ہے۔ اگر ہم یہ جاننا چاہیں کہ کونسی خطا زیادہ اہم خطا ہے، مطلق کار آمد نہیں ہے یعنی 272 لاکھ میں 29,686 کی خطا زیادہ اہم ہے یا 26 لاکھ میں کی خطا۔ یہ معلوم کرنے کے لئے، خطا کو حقیقی قدر یا تقریبی قدر کی کسر کے بطور ظاہر کرنا چاہیئے۔ اس مقصد کے لئے خطائے اضافی ہے۔ اس کو بطور ذیل ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$RE = \frac{\text{خطائے مطلق (AE)}}{\text{متعلقہ تقریبی قدر (Corresponding approximated value) } X'} = \text{خطائے اضافی (RE)}$$

اب ہم مندرجہ بالا تمثیل پر بحث کریں گے جو خطائے مطلق سے متعلق ہے اور ریاستی اور دارالحکومت کی آبادی کے تقرب میں واقع ہونے والی خطائے مطلق معلوم کریں گے۔

ریاست کی آبادی کے تقرب میں خطائے اضافی RE = -2,91,686 ÷ 2,72,00,000 = -0.0011

دار لحکومت کی آبادی کے تقرب میں خطائے اضافی RE = 39, 766 ÷ 26,00,000 = 0.0153

دارالحکومت کی آبادی کے تقرب میں خطا، ریاستی آبادی کے تقرب میں خطا سے تقریباً دس گنا زیادہ ہے۔ ایسا اس لئے ہے کہ دارالحکومت کی آبادی، ریاستی آبادی کے دس گنا کم ہے۔

نوٹ کریں کہ ریاست کی آبادی کو (272 Lakhs - 0.011 لاکھ) اور دارالحکومت کی آبادی کو 0.0153 + 26 لاکھ لکھا جاسکتا ہے۔

(3) فی صد خطا (Percentage Error) : جب اضافی خطاؤں وزن کو فی صد میں ظاہر کیا جاتا ہے تو انہیں فی صد خطائیں کہتے ہیں۔ اضافی خطا کی فیصد خطا میں تبدیلی بہ آسانی قابل فہم ہے۔

[100×اضافی خطا=فی صد خطا] فی صد خطا $PE = RE \times 100$

فی صد خطا $PE = \text{اضافی خطا} \times 100$

مثال کے طور پر، ریاستی آبادی کے تقرب میں فیصد خطا $-0.0011 \times 100 = -0.11\%$

اور اسی طرح سے دارالحکومت کی آبادی کے تقرب میں فیصد خطا $0.0153 \times 100 = 1.53\%$

دارالحکومت کی فی صد خطا، ریاست کی فی صد خطا سے تقریباً دس گنا زیادہ ہے۔ اس طرح سے اضافی خطا اور فیصد خطا، خطا کی اساس کا لحاظ کرتے ہیں۔ لہذا موازنے کے مقصد سے، اضافی خطا اور فیصد خطا، مطلق خطا کی بہ نسبت زیادہ بامعنی ہوتے ہیں۔

تمثیل 2

اضافی خطا اور فیصد خطا معلوم کیجئے جب کہ 2,234.752 کو

(1) اعشاریہ کے بعد نزدیک ترین دو ہندسوں پر اتصال کیا جائے۔
(2) نزدیک ترین صحیح عدد پر اتصال کیا جائے۔
(3) نزدیک ترین سیکڑہ یعنی 100 ایک سو پر اتصال کیا جائے۔
(4) نزدیک ترین ہزار یعنی 1000 پر اتصال کیا جائے۔

حل

طریقہ اتصال	قدر تقریبی	اعظم ترین مطلق امکانی خطا	اضافی خطا (کالم 2-3)	فیصد خطا (کالم 4 x 100)
1	2	3	4	5
اعشاریہ کے بعد نزدیک ترین				
دو ہندسے	2,234.75	±0.005	± 0.000002 قابل نظر انداز	±0.00002% قابل نظر انداز
نزدیک ترین صحیح عدد	2,235	±0.5	± 0.0002	±0.02%
نزدیک ترین سو	2,200	±50	± 0.0227	±2.27%
نزدیک ترین ہزار	2,000	±500	± 0.25	±25%

اگر آپ مندرجہ بالا تمثیل کا بغور مطالعہ کریں تو مندرجہ ذیل نتائج بر آمد ہوتے ہیں۔

(1) جیسے جیسے اتصال کا سلسلہ بڑھتا ہے، اعظم ترین خطائے مطلق میں اضافہ ہوتا ہے۔ یعنی قابل نظر انداز ہندسوں کی تعداد بڑھتی ہے۔

(2) جیسے جیسے اتصال کا درجہ بڑھتا ہے اسی لحاظ سے خطائے مطلق میں اضافہ ہوتا ہے۔

چنانچہ اعلیٰ درجہ اتصال سے صحت گھٹ جاتی ہے۔

3.4.3 متصل اعداد سے تحسیب Computation with Rounded Numbers

متصل اعداد سے جمع یا تفریق کرتے وقت، اس بات پر غور کرنا اہم ہے کہ اس کا جواب یعنی (حاصل) اقل ترین درست اعداد کی بہ نسبت زیادہ صحیح نہیں ہوسکتا۔ مثال کے طور پر ذیل کے اعداد کو جمع کیجئے (1) 357 (2) 574 (3) 600، جہاں پر 600 اقل ترین درست عدد ہے کیونکہ یہ قریب ترین سو (100) پر متصل ہے۔ ان تینوں اعداد کا حاصل جمع 1,531 ہے لیکن یہاں پر نتیجہ یعنی حاصل جمع کو 1,500 سے ظاہر کیا جانا چاہئیے یعنی قریب ترین سو کے متصل کامل صحت کے حصول کی کوشش کی جائے تو اس کے نتیجہ میں نفی صحت کا احتمال زیادہ رہتا ہے۔ اسی طرح متصل اعداد کے ساتھ ضرب یا تقسیم کی صورت میں یہ اطمینان کر لینا ضروری ہے کہ حاصل میں ملحوظ اعداد (Significant figures) کی تعداد متصل اعداد میں استعمال کئے گئے ملحوظ اعداد کی اقل ترین تعداد سے زیادہ نہیں ہے۔ مثال کے طور پر 2.92 کو 2.6 (دونوں متصل اعداد) سے ضرب دینے پر حاصل ہوگا 7.592 یہاں چونکہ جواب صرف دو ملحوظ اعداد میں ہونا چاہئیے کیونکہ 2.6 میں صرف دو ملحوظ اعداد ہیں۔ لہذا جواب صرف 7.6 ہونا چاہئیے چنانچہ جب متصل اعداد کے ساتھ حسابات (calculations) کئے جاتے ہیں تو قطعی نتیجہ محدود صحت کا حامل ہوتا ہے۔ اب ہمیں اس نکتہ کا مطالعہ کرنا ہوگا۔

3.4.4 ریاضیاتی عمل کا خطاؤں پر اثر Effect of Mathematical Operations on Errors

تقرب شدہ اعداد سے ملحقہ خطائیں، جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے عمل سے متاثر ہوتی ہیں۔ ان نکات کا ہم یکے بعد دیگرے مطالعہ کریں گے۔

جمع کا اثر (Effect of Addition)

دو اعداد کے حاصل جمع کی مطلق خطا، اس کی اجزا کی مطلق خطاؤں کے حاصل جمع کے مساوی ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر، 500 کو (قریب ترین 10 تک) اور 400 کو (قریب ترین 100 تک) جمع کیجئے۔ اس بیان کو حسب ذیل طریقے سے پیش کر سکتے ہیں :۔

$$(500 \pm 5) + (400 \pm 50) = 900 \pm 55$$

اس کی حسب ذیل طریقے سے زیادہ تفصیل کے ساتھ تشریح کی جاسکتی ہے:۔

اعداد	خطا	مطلق خطا	اعظم ترین قدر	اقل ترین قدر
500	قریب ترین 10 تک	5	505	495
400	قریب ترین 100 تک	50	450	350
جملہ		55	955 (= 900 + 55)	845 (= 900-55)

نوٹ کیجئے کہ مطلق خطا ± 55 (یعنی 50 + 5) ہے، اضافی خطا ± 0.061 ($\pm 55/900$) اور فیصد خطا $\pm 6.1\%$ (0.61×100) ہے۔

تفریق کا اثر (Effect of Subtraction)

دو اعداد کے حاصل تفریق کی خطائے مطلق، اس کے اجزائے ترکیبی کی خطائے مطلق کے حاصل جمع کے برابر ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر 500 میں سے (10 کے قریب ترین) 400 (100 کے قریب ترین) کو تفریق کیجئے۔ حاصل تفریق 100 = 400 - 500 کی خطا ہوگی۔ 50 ± 5 = 55 اس کو حسب ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$(500 \pm 5) - (400 \pm 50) = 100 \pm 55$$

اس کی ہم تفصیل سے تشریح کریں گے۔ اعظم ترین خطاء اس وقت واقع ہوتی ہے جب کہ بڑا عدد مزید بڑا اور چھوٹا عدد مزید چھوٹا ہو جاتا ہے یا اس کے برعکس کیفیت ہو۔ حاصل تفریق کی خطائے مطلق حسب ذیل طریقے سے محسوب کی جاسکتی ہے۔

اعداد	خطا	خطائے مطلق	تفریق سے محصلہ اعظم ترین قدر	تفریق سے محصلہ اقل ترین قدر
500	10 سے قریب ترین	5	505 (اعظم)	495 (اقل)
400	100 سے قریب ترین	50	350 (اقل)	450 (اعظم)
100		55	155 (= 100 + 55)	45 (= 100 - 55)

خطائے مطلق ہے 55 ± (یعنی 50 ± 5)، خطائے اضافی ہے 0.55 ± (55/100 ±) اور فیصد خطا ہے (100 x 0.55 ±) ± 55%۔ اگر آپ جمع اور تفریق میں خطاؤں کا موازنہ کریں تو آپ محسوس کریں گے کہ تفریق میں خطائے اضافی بہ نسبت جمع کے بہت زیادہ ہے۔ (قلیل تر اساس کی وجہ سے) جب کہ مطلق خطائیں مساوی ہیں۔ آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ جمع اور تفریق دونوں کی خطائے مطلق اجزائے ترکیبی کی مطلق خطاؤں کا مجموعہ ہے۔

ضرب کا اثر (Effect of Multiplication)

کسی حاصل ضرب کی خطائے اضافی، اس کے اجزائے ترکیبی کی اضافی خطاؤں کے حاصل جمع کے تقریباً مساوی ہوتی ہے۔ 500 (10 کے قریب ترین) کو 40 (اکائی کے قریب ترین) سے ضرب دو۔ اب خطائے مطلق 500 میں 5 ± ہے اور خطائے اضافی 1% ± ہے۔ 40 میں خطائے مطلق 0.5 ± ہے اور خطائے اضافی 1.25% ± ہے۔ 500 اور 40 کا حاصل ضرب ہے 0000 2 اس کو حسب ذیل طریقہ سے پیش کیا جاسکتا ہے :۔

$$(500 \pm 1\%) \times (40 + 1.25\%) = 2{,}000 \pm 2.25\%$$

یہاں پر خطائے اضافی 2.25% ±، حاصل جمع ہے 1% ± اور 1.25% ± کی۔ اس کی مزید وضاحت اس طرح ہوگی۔
حاصل ضرب کی اعظم ترین قدر ہوگی :۔

$$(500 + 5) \times (40 + 0.5) = (500 \times 40) + (500 \times 0.5) + (5 \times 40) + (5 \times 0.5) \quad \ldots\ldots (a)$$

اسی طرح سے، حاصل ضرب کی اقل ترین قدر ہوگی :۔

$$(500 - 5) \times (40 - 0.5) = (500 \times 40) - (5 \times 40) - (0.5 \times 500) + (5 \times 0.5) \quad \ldots\ldots (b)$$

عموماً، جب خطائیں چھوٹی ہوتی ہیں، دونوں خطاؤں کا حاصل ضرب یعنی (a) اور (b) میں رکن (0.5 x 5) کے چھوٹا ہونے کی وجہ سے نظر انداز کر دیا جاتا ہے۔ اس لئے 500 x 40 یعنی 2,0000 میں خطائے مطلق (0.5 x 500) + (5 x 40) ہے جو 450 کے مساوی ہے۔ اس کا مطلب ہے اضافی خطا ہے۔ 450/2,000=0.0225 اور فیصد خطا ہے 2.25 %۔

تقسیم کا اثر (Effect of Division)

حاصل تقسیم کی خطائے اضافی، اس کے اجزائے ترکیبی کی اضافی خطاؤں کے حاصل جمع کے تقریباً مساوی ہوتی ہے۔ اس کو سمجھانے کے لئے، ضرب کے تحت بحث شدہ مثال لے کر اس کو تقسیم کیجئے۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے 500/40 = 12.5 اضافی خطاؤں کو ملحوظ رکھتے ہوئے اس کو اس طرح پیش کیا جاسکتا ہے:۔

$$(500 \pm 1\%) \div (40 \pm 1.125\%) = 12.5 \pm 2.25\%$$

اس کا مطلب ہے حاصل تقسیم میں خطائے مطلق 2.25% ہے جو دو مطلق خطاؤں 1% اور 1.25% کا مجموعہ ہے اس کو جانچنے کے لئے، ہم تقسیم کی اقل ترین اور اعظم ترین قدر معلوم کریں گے اور دیکھیں گے کہ یہ 500/40 کے حاصل تقسیم یعنی 12.5% سے کس قدر کم یا زیادہ ہوتی ہے۔

حاصل تقسیم کی اقل ترین قدر معلوم کرنے کے لیے شمار کنندہ کی اقل ترین قدر 495 ہوگی (495=500-1%) کو نسب نما کی اعظم ترین قدر یعنی (40 ± 1.25) یعنی 40+1.25% (40.5) سے تقسیم کیا جائے تو اقل ترین قدر 12.22 $\left(\frac{495}{40.5}\right)$ حاصل ہوگی۔ 12.50 اور 12.22 کا فرق 0.28 ہے جو کہ خطائے مطلق ہے۔

اضافی خطا ہے (0.28 ÷ 12.5 x 100 = 2.25) جو تقریباً 1.25% + 1% ہے جو کہ دونوں اعداد کے اضافی خطاوں کا مجموعہ ہے اسی طرح تقسیم کی اعظم ترین قدر معلوم کر سکتے ہیں اور یہ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ یہ قدر 12.5 ie 40 ÷ 500 سے کس حد تک زیادہ ہے۔ یہ اس طرح سے ہوگا:۔

$$(500 + 5) \div (40 - 0.5) - 12.5 = 505 \div 39.5 - 39.5 - 12.5 = 0.28$$

یہ بھی سابقہ فرق کے مساوی ہے لہذا کسی خارج قسمت کی اضافی خطا اس کے اجزا کی اضافی خطاؤں کے مساوی ہوتی ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ B

(1) شماریاتی خطاؤں کے ماخذ کیا ہیں؟

.....

.....

.....

.....

(2) تقریبی خطاؤں کے اظہار کے کیا طریقے ہیں؟

.....

.....

.....

.....

(3) لکھیے کہ آیا درج ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط۔

(i) شماریاتی خطاؤں کا مطلب ہے ان کے محسوب کرنے کی غلطیاں۔

(ii) اتصال زیریں سے مثبت خطائیں سرزد ہوتی ہیں۔

(iii) مطلق اور اضافی خطاوں میں کوئی فرق نہیں ہوتا۔

(iv) حاصل ضرب کی جملہ خطائے اضافی، اس کے اجزائے ترکیبی کی مطلق خطاؤں کا حاصل ضرب ہوتی ہے۔

(v) حاصل تقسیم کی خطائے مطلق اس کے اجزائے ترکیبی کی مطلق خطاؤں کا حاصل جمع ہوتا ہے۔

(4) A = 25 ہزار، B = 5 سو۔ مندرجہ ذیل کو محسوب کیجئے اور نتیجہ میں خطا کی حد معلوم کیجئے۔

(i) A + B

(ii) A - B

(iii) A x B

(iv) A ÷ B

3.4.5 میلانی اور غیر میلانی خطائیں Biased and Unbiased Errors

جیسا کہ آپ جانتے ہیں شماریات میں خطاؤں سے بچنا ممکن نہیں ہے۔ اگرچہ خطائیں ناگزیر ہیں لیکن یہ جاننا اہم ہے کہ کہ ایسی خطائیں میلانی ہیں یا غیر میلانی۔ اب ان دو اقسام کی خطاؤں پر بحث کی جائیگی۔

میلانی خطائیں (Biased Errors)

خطائیں جب ایک ہی رخ میں ہوتی ہیں تو انہیں میلانی خطائیں کہا جاتا ہے۔ ان میلانی خطاؤں کی صورت میں تخمینی اعداد کا مجموعہ حقیقی اعداد کے مجموعہ سے یا تو بہت بڑا ہوتا ہے یا بہت ہی چھوٹا۔

فرض کیجئے کہ کسی مشق میں آپ نے سبھی اعداد کا زیریں اتصال کیا ہے۔ ایسی صورت میں میلانی خطا نمودار ہوتی ہے کیونکہ اتصال زیریں کے بعد پورے اعداد، اپنی حقیقی قدروں سے کم ہوں گے۔ مثال کے طور پر 14 کو 10 پر متصل کیا گیا ہو، عدد 132 کو 100 پر اور عدد 5,396 کو 5,000 پر۔ یہاں پر خطائیں صرف ایک ہی سمت میں واقع ہوئی ہیں۔ یہ 4+ ' 32+ اور 396+ ہیں۔ لہذا حقیقی قدروں یعنی 14+132 اور 5396 کا حاصل جمع 5542 اور متصل کردہ قدروں یعنی 10+100 ،اور 5000 کا حاصل جمع 5110 کا فرق 'خطاؤں کے حاصل جمع یعنی 4+32+396 کے حاصل جمع یعنی 432 کے مساوی ہوتا ہے۔ ایسی خطائیں متواتر نوعیت کی ہوتی ہیں اس لئے انہیں بیش پذیر مجموعی خطائیں (Cumulative Errors) کہا جاتا ہے۔ یہ میلانی خطائیں مواد اکٹھا کرنے والے اشخاص یا آلات کے جانبدارانہ رجحان کی وجہ سے رونما ہوتی ہیں مثلاً شخصی جانبداری کی وجہ سے جواب دہندے حقائق کے بیان کرنے میں مبالغہ یا بخل سے کام لے سکتے ہیں۔ کپڑا ناپنے کا پیمانہ (میٹر) حقیقی لمبائی سے چھوٹا ہو سکتا ہے۔ ان پر دو صورتوں میں بیش پذیر یا مجموعی یا رجحانی خطائیں رونما ہوتی ہیں۔ بالائی یا زیریں اتصال سے میلانی خطائیں واقع ہوتی ہیں۔ قریب ترین ہندسہ سے اتصال کی صورت میں میلانی خطاؤں کا امکان ہی نہیں رہتا کیونکہ مشاہدات کی ایک بڑی تعداد میں ہندسوں کے تقرب سے نصف تعداد میں اتصال کی وجہ سے اضافہ ہوتا ہے اور اسی طرح باقی نصف تعداد میں کمی ہو جاتی ہے چنانچہ مجموعی طور پر خطاؤں کا باہم استرداد عمل میں آتا ہے۔

غیر میلانی خطائیں Unbiased Errors

جب خطاؤں میں ایک دوسرے کو رد کرنے کا میلان پایا جائے تو ان کو غیر میلانی یا تلافی کن خطائیں کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر چھ اعداد 27, 26, 24, 21, 22 اور 28 کو قریب ترین 10 پر اتصال کی صورت میں نمود پذیر کل خطا کو محسوب کریں گے۔ پہلے تین اعداد 21, 22 اور 24 میں ہر ایک کو 20 پر تقرب کرنے سے مجموعی خطا 7+ ہوگی باقی اعداد 26, 27 اور 28 میں ہر ایک کو 30 پر تقرب کیا جائے ان کی مجموعی خطا ہوگی 9- ان چھ اعداد کے مجموعے میں کل خطا صرف 2 - = 9 - 7 ہوگی۔ چنانچہ جب خطائیں غیر میلانی ہوں تو کچھ صورتوں میں تقریبی قدر حقیقی قدر سے کم ہوتی ہے اور دیگر صورتوں میں تقریبی قدر حقیقی قدر سے زیادہ ہوتی ہے۔ چونکہ خطائیں مثبت اور منفی دونوں ہوتی ہیں جس کے نتیجہ میں یہ ایک دوسرے کو رد کرتی ہیں۔ لہذا خالص خطا قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ زیر غور مدات کی تعداد جس قدر بڑی ہوگی اسی لحاظ سے غیر میلانی

خطاؤں کی تعداد کم ہوگی۔ جیسے جیسے مشاہدات کی تعداد زیادہ ہوتی ہے، غیر میلانی خطائیں کم سے کم تر ہوتی جاتی ہیں لہذا غیر میلانی خطاؤں کو کم سے کم کرنے کے لئے ایک طریقہ یہ اختیار کیا جاتا ہے کہ مشاہدات کی تعداد میں اضافہ کیا جاتا ہے۔ تمثیل 3 کا بغور مطالعہ کیجئے۔

تمثیل 3

حقیقی اعداد	صورت (i)		صورت (ii)		صورت (iii)	
	غیر میلانی اتصال	غیر میلانی خطا	کم تر (000)	میلانی خطائے مطلق	بالاتر (000)	میلانی خطائے مطلق
17,118	17,000	+ 118	17,000	+ 118	18,000	- 882
8,362	8,000	+ 362	8,000	+ 362	9,000	-638
10,509	11,000	- 491	10,000	+ 509	11,000	- 491
15,443	15,000	+ 443	15,000	+ 443	16,000	- 557
حقیقی مطلق خطا		+ 432		+ 1.432		- 2,568
خطائے اضافی		+ 0.847%		+ 2.864%		- 4.756%

اوپر پیش کی گئی تمثیل 3 سے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ:

(i) غیر میلانی خطا کی صورت میں خطائے مطلق، میلانی خطا کی بہ نسبت کم تر ہے۔

(ii) غیر میلانی خطا کی صورت میں خطائے اضافی بھی کم ہوتی ہے۔ مدوں کی تعداد میں اضافہ کے ساتھ اس خطا میں بھی کمی واقع ہوتی ہے۔

(iii) میلانی خطاؤں کی صورت میں، مطلق اور اضافی دونوں خطائیں اونچی ہوتی ہیں۔ در حقیقت مدات میں اضافے کے ساتھ ان میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔

3.4.6 میلانی اور غیر میلانی خطاؤں کا تخمینہ Estimation of Biased and Unbiased Errors

جب اعداد کا تقرب کیا جاتا ہے تو یہ ضروری ہے کہ اس تقرب میں شامل خطا کی مقدار کا تخمینہ کیا جائے۔ کبھی کبھی، ٹھیک اعداد کا علم نہیں ہوتا اور صرف تقرب شدہ اعداد دیئے جاتے ہیں۔ ایسی صورتوں میں خطا کی حقیقی مقدار یعنی حقیقی اور تقریبی عدد کا درمیانی فرق، نہیں معلوم کیا جاسکتا۔ اس کا صرف تخمینہ کیا جاسکتا ہے۔ تمثیل 3 کو ہی لیجئے اور فرض کیجئے کہ پہلے کالم میں حقیقی اعداد معلوم نہیں ہیں۔ سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ میزان میں خطائے اضافی کیسے معلوم کریں۔ تخمینہ کے طریقہ کا انحصار اس بات پر ہے کہ آیا خطائیں میلانی ہیں یا غیر میلانی۔ اب ہم ان ہر دو صورتوں کا علیحدہ مطالعہ کریں گے۔

خطا کا تخمینہ جب کہ خطا غیر میلانی ہو Estimation when the Error is Unbiased

کسی مد میں مطلق غیر میلانی خطا 0 اور 500 کے درمیان ہوتی ہے جبکہ اعداد قریب ترین ہزار تک متصل کئے جائیں۔ تمثیل 3 میں ایک عدد یعنی 17, 118 میں خطا 118 ہے جو سب سے کم ہے اور دوسرے عدد یعنی 10,509 میں خطا 491 ہے جو سب سے زیادہ ہے۔ ہزار سے متصل کسی بھی عدد میں ممکنہ اقل ترین خطا '0' اور ممکنہ اعظم ترین خطا 500 ہو سکتی ہے۔ چنانچہ کسی بھی عدد میں اوسط مطلق خطا (AAE)250=2÷(0.500) لی جاسکتی ہے۔ مدوں کی کسی بھی تعداد کے مجموعے میں غیر میلانی مطلق خطا کا بہترین تخمینہ، اس اوسط مطلق خطا اور مدوں کی تعداد کے جذر المربع کے حاصل ضرب سے کیا جاتا ہے۔ (اس فارمولے کا ثبوت، اس نصاب کی وسعت سے باہر ہے) ضابطہ حسب ذیل ہے:

مطلق خطا(غیر میلانی قسم کی) $= AAE \times \sqrt{N}$

جہاں پر AAE اوسط مطلق خطا ہے اور N مدات کی تعداد ہے۔

اس فارمولے کے استعمال سے اب ہم موجودہ مثال میں مطلق خطا معلوم کریں گے :۔

$$\text{مطلق خطا} = 250 \times \sqrt{4}$$
$$= 500$$

اسی طرح سے، ہم مندرجہ ذیل فارمولے سے اضافی خطا کا تخمینہ کریں گے۔

$$\text{اضافی خطا} = AAE \times \sqrt{N} \div \text{تقرب شدہ مجموعہ}$$
$$= 250 \times \sqrt{4} \div 51{,}000$$
$$= 0.0098 \text{ یا } 0.98\%$$

خطا کا تخمینہ جب کہ وہ خطا میلانی ہو Estimation When the Error in Biased

ہزاروں میں ظاہر کردہ کسی بھی مد میں (0 اور 999) کے درمیان خطا کا امکان رہتا ہے۔ اسلئے میلانی خطاؤں میں اوسط مطلق خطا (AAE) 0+999÷2=499.5 ہے۔ خطا کا تخمینہ کرنے کا فارمولہ، جبکہ خطا میلانی ہے، ذیل میں پیش کیا گیا ہے:۔

مطلق خطا(میلانی قسم کی) $= AAE \times N$

جہاں پر AAE اوسط مطلق خطا ہے اور N مدات کی تعداد ہے۔

اس ضابطہ کو استعمال کر کے، ہم موجودہ مثال میں مطلق خطا معلوم کریں گے۔

$$\text{مطلق خطا} = 499.5 \times 4 = 1{,}998$$

اسی طرح سے مندرجہ ذیل فارمولے سے ہم اضافی خطا کا بھی تخمینہ کر سکتے ہیں۔

$$\text{اضافی خطا} = AAE \times N \div \text{تقرب شدہ مجموعہ}$$

اضافی خطا(اتصال زیریں کے بعد) $499.5 \times 4 \div 50{,}000 = 0.0399$ یا 3.99%

اضافی خطا(اتصال بالا کے بعد) $499.5 \times 4 \div 54{,}000 = 0.037$ یا 3.7%

اس مثال میں آپ نے غور کیا ہوگا کہ تخمینی اضافی اور تخمینی مطلق خطائیں کالم نمبر 1 میں دستیاب صحیح اعداد سے محسوبہ اضافی اور مطلق خطاؤں سے مختلف ہیں۔ مدات کی تعداد میں اضافہ ہونے پر یہ فرق کافی حد تک کم ہو سکتا ہے۔

3.4.7 نمونہ بندی اور غیر نمونہ بندی خطائیں Sampling and Non Sampling Errors

آپ نے میلانی اور غیر میلانی دونوں قسم کی خطاؤں کے معنی اور انہیں تخمینہ کرنے کے طریقوں کے متعلق سیکھا۔ اب ہم نمونہ بند اور غیر نمونہ بند خطاؤں کے متعلق بحث کریں گے۔

نمونہ بندی خطائیں Sampling Errors

نمونوں کی بنیاد پر آبادی کے متعلق اخذ شدہ نتائج کے ذریعہ پیدا ہونے والی خطاؤں کو نمونہ بندی خطائیں کہتے ہیں۔ نمونہ اکائیوں کے انتخاب میں جانبدارانہ رجحان یعنی میلان کی وجہ سے نمونہ بندی خطائیں نمودار ہوتی ہیں۔ یہ خطائیں اس لئے واقع ہوتی ہیں کہ مطالعہ کی بنیاد آبادی کے ایک حصہ پر ہوتی ہے۔ اگر پوری آبادی کو لیا جائے تو نمونہ بندی خطاؤں کو خارج کیا جاسکتا ہے۔ اگر کسی منصوبے کے بغیر نمونہ بندی طریقے اٹکل نمونہ بندی کے ذریعہ کسی آبادی سے دو یا دو سے زائد نمونہ اکائیاں لی جائیں، تو نتائج کا مشابہہ ہونا ضروری نہیں اور ان میں سے دونوں کے نتائج، آبادی

کے نتیجہ سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ ایسا اس لئے ہے کہ منتخبہ دونوں مدات مشابہہ نہیں ہوتے۔ چنانچہ نمونہ بندی خطاؤں سے مراد نمونہ نتیجہ اور آبادی نتیجہ کے مابین پایا جانے والا بالکل صحیح فرق ہے جبکہ ان دونوں نتائج کو ایک ہی طریقہ عمل یا ایک ہی طریقہ حسابات سے حاصل کیا گیا ہے۔ نمونہ بندی خطا کی ٹھیک مقدار مختلف نمونوں کے لئے مختلف ہوتی ہے۔ نمونہ کے انتخاب میں کامل احتیاط کے باوجود نمونہ بندی خطائیں ناگزیر ہیں۔ بہر حال جائزے کی مناسب خاکہ بندی (ڈیزائینگ) کے ذریعہ نمونہ بند خطاؤں کے امکانات کو کم کیا جاسکتا ہے۔

نمونہ بندی خطائیں دو قسم کی ہوتی ہیں : (1) میلانی نمونہ بندی خطائیں (2) غیر میلانی نمونہ بندی خطائیں۔ اب ہم اس پر تفصیلی بحث کریں گے۔

(1) میلانی نمونہ بندی خطائیں **Biased Sampling Error** : جب کسی جائزے سے حاصل ہونے والی شماریاتی قدروں کا صرف کسی ایک سمت میں جھکاؤ کا رجحان موجود ہو تو اس کو میلان کہا جاتا ہے۔ لہذا اس قسم کی خطا رد نہیں ہوتی۔ یہ خطائیں، نمونہ اکائیوں کے انتخاب، مواد کے طریقۂ یکجائی اور تجزیہ میں رجحان وغیرہ کے سبب نمودار ہوتی ہیں۔ مثال کے طور پر میلانی نمونہ بندی میں خطاؤں کا امکان اس وقت زیادہ ہوتا ہے جب کہ نمونہ اکائیاں اٹکل نمونہ بندی کے بجائے ایک سوچے سمجھے منصوبہ کے تحت کی جائیں۔

مزید یہ کہ اگر اٹکل بندی میں شامل کچھ اکائیوں سے معلومات کا حصول مشکل ہو تو تحقیق کار ان کے بدلے میں آبادی سے دوسری اکائیاں چن سکتا ہے۔ اگر متبدلہ اکائیاں اٹکل نمونہ بندی طریقہ سے نہ چنی گئی ہوں تو پھر جانبدارانہ رجحانات پیدا ہو سکتی ہیں۔ بعض اوقات جواب دہندے درکار معلومات فراہم نہیں کر سکتے تو اس صورت میں تحقیق کار خود معلومات فراہم کرتا ہے۔ اس بنیاد پر بھی جانبدارانہ میلانات کے امکانات پیدا ہو جاتے ہیں۔ بعض صورتوں میں جواب دہندہ کی فراہم کردہ معلومات خود بھی جانبدارانہ ہو سکتی ہیں۔ خاص طور پر اس وقت جب کہ جواب دہندہ تحقیق کار سے حقائق چھپانا چاہتا ہو۔ پیائش میں کوئی مستقل خطا ہو تو بھی جانبدارانہ میلان پیدا ہو سکتا ہے۔ ناموزوں آلات پیائش اور تحقیق کار کی نااہلی سے بھی میلانی خطائیں پیدا ہو سکتی ہیں۔ مواد اکٹھا کرنے کے طریقہ کار کوڈنگ (coding) اور تجزیہ کے طریقہ کار میں منفرد مشاہدات کی تعداد میں اضافہ کے ساتھ ساتھ اس قسم کی خطاؤں میں بھی اضافہ ہوتا ہے میلانی نمونہ بند خطائیں ماہیت کے لحاظ سے بیش پذیر ہوتی ہیں۔

(2) غیر میلانی نمونہ بندی خطائیں **Unbiased Sampling Errors** : نمونہ میں شامل اور غیر شامل آبادی کی اکائیوں کے درمیان امکانی فرق کے سبب یہ خطائیں سرزد ہوتی ہیں۔ خطائیں جو صرف امکان کے باعث پیدا ہوتی ہیں غیر میلانی نمونہ بندی خطائیں کہلاتی ہیں۔ یہ کسی رجحان کا نتیجہ نہیں ہوتیں اور نہ ہی مشاہدوں کی تعداد میں اضافے کے سبب رونما ہوتی ہیں۔ اس کے برعکس مشاہدات کی تعداد میں اضافے کی وجہ سے یہ خطائیں ایک دوسرے کو بے اثر کرنے کی اہلیت رکھتی ہیں۔ اس لئے ان خطاؤں کو تلافی کن خطائیں Compensating یا غیر بیش پذیر خطائیں Non-cumulative کہتے ہیں۔

اس طرح سے جملہ نمونہ بندی خطائیں، میلانی اور غیر میلانی خطاؤں پر مشتمل ہوتی ہیں۔ کسی بھی سروے میں زیر استعمال شماریاتی طریقہ کا اہم مقصد یہ ہوتا ہے کہ کچھ ایسی نمونہ بندی اسکیمیں تیار کی جائیں جن کے ذریعہ ممکنہ حد تک میلانی خطاؤں کو ختم کیا جاسکے اور غیر میلانی خطاؤں کو کم سے کم کیا جاسکے۔

غیر نمونہ بندی خطائیں (Non-Sampling Errors)

یہ غیر نمونہ بندی خطائیں کسی بھی جائزے (سروے) میں رونما ہو سکتی ہیں۔ چاہے وہ گنتی کا ہو یا نمونہ بندی کا۔ غیر نمونہ بندی خطاؤں میں میلانات اور اغلاط دونوں شامل رہتے ہیں۔ یہ امکانی خطائیں نہیں ہیں۔

مکمل گنتی میں میلانات کا سبب بننے والے بیشتر عوامل، نمونہ بندی کے تحت اوپر بیان کئے گئے عوامل سے متشابہہ ہوتے ہیں۔ ان میں آبادی کی غیر محتاط تعریف، مطلوبہ معلومات کے متعلق انٹرویو کے غیر کارکرد طریقہ وغیرہ بھی شامل ہیں۔ غیر موزوں کوڈنگ Coding اور طریقہ عمل کے نتیجے میں بھی غلطیاں پیدا ہو سکتی ہیں۔ غیر نمونہ بندی خطائیں درج ذیل وجوہات میں سے کسی ایک یا زیادہ وجوہات کی بنا پر ظاہر ہوتی ہیں۔

(i) غیر موزوں اور مبہم مواد سے متعلق مخصوص صراحتیں جو کہ مردم شماری یا جائزے کے مقاصد سے ہم آہنگ نہیں ہوتیں۔

(ii) نمونہ بندی کے غیر موزوں طریقے ' نامکمل سوالنامہ اور انٹرویو کے غیر صحیح طریقے۔

(iii) تحقیق کاروں یا معلومات فراہم کرنے والوں کے شخصی میلانات (ذہنی تحفظات)۔

(iv) تربیت یافتہ اور اہل یا لائق تحقیق کاروں کا فقدان۔

(v) تدوین اور جدول سازی میں خطائیں۔

اگر چہ یہ فہرست مکمل نہیں ہے پھر بھی اس سے کچھ ممکنہ اہم اسباب کی نشاندہی ہوتی ہے۔

کل خطائیں (Total errors) نمونہ بندی اور غیر نمونہ بندی خطاؤں کا مجموعہ ہوتی ہیں۔ کسی بھی جائزے کا مقصد یہی ہوتا ہے کہ خطاؤں کو کم سے کم کیا جائے۔ آبادی کی صحیح تعریف کر کے، سوالنامے کو محتاط انداز میں تشکیل دے کر اور اس کی پیشگی جانچ کر کے تحقیق کاروں کی تربیت کے مرحلے پر احتیاط اور نگرانی کر کے غیر نمونہ بندی خطاؤں کو قابو میں رکھا جاسکتا ہے۔ لیکن یہ اُسی وقت ممکن ہے جبکہ مدات کی تعداد کم ہو ورنہ اس کے لئے کافی وقت اور پیسہ درکار ہوتا ہے۔ نمونے کی سائیز کو چھوٹا رکھنے سے نمونہ بندی خطائیں بڑھ جاتی ہیں۔ اس لئے، کسی جائزے کی منصوبہ بندی کے وقت آپ کو اپنے محدود وسائل یعنی پیسہ، وقت اور انسانی وسائل وغیرہ کو احتیاط کے ساتھ استعمال کرنا ضروری ہے تاکہ نمونہ بندی اور غیر نمونہ بندی خطائیں کم سے کم ہوں اور صحت کا کامل درجہ حاصل ہو جائے۔

اپنی معلومات کی جانچ C

(1) میلانی اور غیر میلانی خطاؤں کے فرق کو واضح کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

(2) نمونہ بندی اور غیر نمونہ بندی خطاؤں کو ایک دوسرے سے ممیز کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

(3) غیر نمونہ بندی خطاؤں کے اسباب کیا ہیں؟

.....

.....

.....

.....

(4) لکھیے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) غیر میلانی خطائیں نوعیت کے لحاظ سے بیش پذیر ہوتی ہیں۔

(ii) میلانی خطائیں صرف اس وقت رونما ہوتی ہیں جبکہ مواد کا اتصال کے ذریعہ تقرب کیا جاتا ہے۔

(iii) نمونہ بندی خطائیں صرف نمونہ مطالعہ کی صورت میں نمودار ہوتی ہیں۔

(iv) نمونہ جائزے کی صورت میں غیر نمونہ بند خطائیں سرزد نہیں ہوتیں۔

(v) کسی آبادی سے لئے گئے دو اٹکل نمونوں کی آمدنی یکساں نہیں ہو سکتی۔

(5) 9 تو اعداد کو جمع کیا جائے تو حاصل جمع میں مطلق خطا کیا ہوگی۔ اگر یہ

(i) قریب ترین 000 تک (ii) زیریں 00 تک متصل کئے جاتے ہیں۔

.....

.....

.....

.....

3.5 خلاصہ Let Us Sum Up

شماریاتی مواد بذریعہ گنتی یا پیائش یا بذریعہ تخمین کاری حاصل کیا جاسکتا ہے۔ گنتی کے ذریعہ مدات کی ٹھیک تعداد معلوم کی جاسکتی ہے لیکن پیائش اور تخمینہ سے مطلق صحت حاصل نہیں کی جاسکتی۔ گنتی میں اگرچہ مطلق صحت ممکن ہے لیکن یہ صحت ہمیشہ مطلوب نہیں ہوتی اور نہ ہی اس سے مطلوبہ وضاحت مل سکتی ہے۔ مطلوبہ کمال صحت کا انحصار مطالعہ کے مقصد اور صورتحال پر ہوتا ہے۔ نقلی صحت سے جو کہ مطلق یا مطلوبہ صحت سے بڑھی چڑھی صحت پر دلالت کرتی ہے ممکنہ حد تک گریز کرنا چاہیئے۔ اعداد کی صحت کی مطلوبہ سطح تقرب کے ذریعہ حاصل کی جاسکتی ہے جس کو اتصال کے ذریعہ عمل میں لایا جاسکتا ہے اتصال کی تین قسمیں ہیں (i) بالائی اتصال (ii) زیریں اتصال (iii) قریب ترین اکائی تک اتصال۔ وہ ہندسے جو یہ ظاہر کرتے ہیں کہ ایک عدد کس حد تک صحیح ہے ملحوظ ہندسے **(Significant Number)** کہلاتے ہیں۔

شماریاتی خطا کا مطلب وہ فرق ہے جو حقیقی قدر اور تخمینی قدر کے درمیان پایا جاتا ہے۔ شماریاتی مواد میں خطاؤں کی تین قسمیں ہوتی ہیں : (i) ماخذی خطائیں یعنی ناقص آلات پیائش، ناموزوں شماریاتی اکائیوں کا انتخاب، معلومات فراہم کرنے والوں کے غیر درست جوابات، تحقیق کاروں کے جانبدارانہ رجحان کے سبب خطائیں۔ (ii) عدم اکتفائی خطائیں (Errors of inadequacy) یعنی نمونہ کی قلیل ترین سائز یا نمونہ سے آبادی کی نمائندگی وغیرہ اور (iii) نادانستہ خطائیں یعنی گنتی، پیائش وغیرہ یا بوجہ تقرب ہونے والی خطائیں۔

ملحوظ ہندسوں کے ذریعہ دیئے گئے اعداد کے غیر صحیح تقرب کرنے میں ہمیشہ کچھ نہ کچھ خطائیں واقع ہوتی ہیں۔ ان خطاؤں کی پیائش کے تین طریقے ہیں۔ (i) مطلق خطائیں یعنی حقیقی قدر اور تخمینی قدر کا فرق (ii) اضافی خطائیں یعنی مطلق خطا کی تخمینی قدر سے تقسیم کا حاصل (iii) فیصد خطائیں یعنی اضافی قدر x 100 ۔

تقریبی اعداد سے جب تحقیقات کی جاتی ہیں تو خطاؤں کی تعداد میں اضافہ ہوتا جاتا ہے۔ دو اعداد کے حاصل جمع یا حاصل تفریق میں کل خطائے مطلق، انفرادی اعداد کی مطلق خطاؤں کے حاصل جمع کے برابر ہوتی ہے۔ اسی طرح سے، دو اعداد کو ضرب دینے یا تقسیم کرنے میں کل اضافی خطا، انفرادی اعداد کی اضافی خطاؤں کا مجموعہ ہوتی ہے۔ میلانی خطائیں وہ ہوتی ہیں جو صرف ایک ہی سمت میں واقع ہوتی ہیں۔ نوعیت کے لحاظ سے یہ جمع ہوتی ہیں اور مدوں کی تعداد میں اضافے کے ساتھ ساتھ بڑھتی جاتی ہیں۔

نمونہ بندی خطائیں وہ ہیں جو نمونہ کی بنیاد پر آبادی کے متعلق نتائج کے اخذ کرنے کے باعث نمودار ہوتی ہیں۔ یہ دو قسم کی ہو سکتی ہیں: (i) میلانی نمونہ بندی خطائیں بہ وجہ ناقص اکائیاں، مواد کی ناقص جمع بندی وغیرہ۔ تجزیہ کے ناقص طریقے وغیرہ اور (ii) غیر میلانی نمونہ بندی خطائیں یعنی خطائیں جو امکانی فرق chance difference سے نمودار ہوتی ہیں یا آبادی اور نمونہ اقدار کے درمیان فرق سے پیدا ہوتی ہیں۔ میلانی نمونہ

بندی خطاؤں کاازالہ کیا جاسکتا ہے۔ غیر میلانی نمونہ بندی خطاؤں کا بالکلیہ طور پر ازالہ نہیں کیا جاسکتا لیکن ممکنہ حد تک کمی کی جاسکتی ہے۔ غیر نمونہ بندی خطائیں وہ ہیں جو آبادی کے مطالعہ کے دوران رونما ہوتی ہیں۔ ان کی نوعیت اکثر جانبدارانہ ہوتی ہے۔

3.6 کلیدی الفاظ Key Words

خطائے مطلق (Absolute Error) : حقیقی قدر اور تخمینی قدر کا درمیانی فرق۔

میلانی خطائیں (Biased Errors) : جبکہ خطائیں ایک ہی رخ پر ہوں۔

غیر نمونہ بندی خطائیں (Non Sampling Errors) : وہ خطائیں جو آبادی کے مطالعے میں بھی وقوع پذیر ہو سکتی ہیں۔

فیصد خطا (Percentage Error) : خطائے اضافی جو بطور فیصد ظاہر کی گئی ہو یعنی خطائے اضافی × 100۔

اضافی خطا (Relative Error) : تخمینی قدر میں سے خطائے مطلق کو منہا کرنے سے حاصل ہونے والا فرق۔

اتصال (Rounding) : آخری چند ہندسوں کو حذف کر کے، بڑے اعداد کو سادہ شکل میں ظاہر کرنا۔

زیریں اتصال (Rounding Down) : عدد کو نچلی متصل مکمل اکائی تک گھٹانا۔

بالائی اتصال (Rounding Up) :اعداد کو اگلی متصل مکمل اکائی تک بڑھانا۔

نمونہ بندی خطائیں (Sampling Errors) :نمونہ کی بنیاد پر آبادی کے متعلق نتیجے اخذ کرنے سے پیدا شدہ خطائیں۔

ملحوظ ہندسے (Significant Digits) : اعداد کو صرف ان ہندسوں کی شکل میں پیش کرنا جو صحیح ہیں۔ یہ وہ اعداد ہیں جو حقیقی معلومات کے حامل ہوتے ہیں۔

نقلی صحت (Spurious Accuracy) : صحت جو اپنی حقیقی یا مطلوبہ صحت سے زیادہ ہے۔

شماریاتی خطا (Statistical Error) : کسی مد کی حقیقی قدر اور تخمینی یا تقریبی قدر کے درمیان کا فرق۔

غیر میلانی خطائیں (Unbiased Errors) : خطائیں جو ایک دوسرے کو رد کرنے کا رجحان رکھتی ہیں۔

3.7 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات Answers to Check Your Progress

A .4 (i) صحیح (ii) غلط (iii) صحیح (iv) غلط

.5 (i) 262 ہزار (ii) 88 ہزار (iii) 96 ہزار (iv) 4400 ہزار (v) 322 ہزار

.6 (i) 23 سو (ii) 76ہزار (iii) 8.9 (iv) 0.0064 (v) 2.0

B .3 (i) غلط (ii) صحیح (iii) غلط (iv) غلط (v) صحیح

.4 (i) $25,500 \pm 500$ (ii) $24,500 \pm 550$

(iii) $1,25,00,000 \pm 12\%$ (iv) $50 \pm 12\%$

C .4 (i) غلط (ii) غلط (iii) صحیح (iv) غلط (v) صحیح

.5 (i) $\pm\sqrt{9 \times 250} = \pm 750$ (ii) $\pm 9 \times 49.5 = \pm 445.5$

3.8 امتحانی سوالات / مشقیں Terminal Questions/Exercises

سوالات

(1) شماریات میں مختلف اقسام کی خطائیں کون سی ہیں؟ ان کے وقوع کے لئے ذمہ دار عوامل کی تشریح کیجئے۔

(2) شماریاتی تحقیقات (انکوائیریوں) میں کس معیار کی صحت درکار ہوتی ہے؟ تقرب کے مختلف طریقے اور شماریات میں ان کی افادیت بیان کیجیے۔

(3) میلانی اور غیر میلانی خطاؤں میں کیا فرق ہے؟ ان کی تخمین کے طریقوں کی وضاحت کیجیے۔

(4) مندرجہ ذیل پر مختصر نوٹ لکھیے۔

(i) تقرب کی خطائیں۔

(ii) نمونہ بندی اور غیر نمونہ بندی خطاؤں میں کیا فرق ہے؟

(iii) میلانی اور غیر میلانی خطاؤں میں فرق کیجیے۔

مشقیں

(1) قریب ترین ہندسے تک اتصال کے قواعد کو استعمال کر کے، مندرجہ ذیل اعداد کو پہلے چار ملحوظ ہندسوں تک، بعد ازاں تین ملحوظ ہندسوں تک اور آخر میں دو ملحوظ ہندسوں پر اتصال کیجئے۔

(i) 5.6994 (ii) 47.251 (iii) 3.0009 (iv) 0.0064251 (v) 5.34651

(2) کسی شہر کی آبادی کا تخمینہ 49,000 کیا گیا ہے اور حقیقی آبادی 50,000 ہے۔ محسوب کیجئے:۔

(i) مطلق خطا (ii) اضافی خطا (iii) فیصد خطا

جواب: (i) 1,000 (ii) 0.02 (iii) 2%

(3) شہری حدود سے دو پٹرول پمپوں کے فاصلے 0.5 ± 225 کیلو میٹر اور 0.3 ± 175 کیلو میٹر پیمائش کئے گئے ہیں۔ (1) پہلی صورت میں مطلق خطا، اضافی خطا اور جملہ فاصلہ معلوم کیجیے (2) دوسری صورت میں دونوں فاصلوں کا فرق۔

جواب: (1) مطلق خطا ± 0.8 ، اضافی خطا ± 0.002 (2) 0.8 ± ، اضافی خطا ± 0.0166

(4) دو پیمائشیں ہیں A = 375 اور B = 25 ۔ ان دونوں میں سے ہر ایک میں 10% + کی خطا کا امکان ہے۔ مندرجہ ذیل صورتوں میں مطلق خطا اور اضافی خطا کا حیطہ (Range) معلوم کیجئے۔

(i) مجموعہ (A + B)

(ii) حاصل ضرب (AB)

(iii) حاصل تفریق (A - B)

(iv) حاصل تقسیم (A/B)

جوابات

(i) مطلق خطا 40 ± اضافی خطا 10 ± (ii) مطلق خطا 1969 ± ، اضافی خطا 21 ±

(iii) مطلق خطا 40 ± ، اضافی خطا 11.4 ± (iv) مطلق خطا 3.3 ± ، اضافی خطا 22.2 ±

(5) 8 کیلو شکر کی قیمت 13 روپے ہے۔اگر ایک کیلو شکر کی قیمت 1.60 روپے بتائی جاتی ہے تو مطلق خطااور فیصد خطا معلوم کیجئے۔

جواب: مطلق خطا 0.025 ، فیصد خطا 1.5%

(6) اگر کل فاصلہ کو 1440 کیلو میٹر میں اور وقت کو 70.5 گھنٹوں میں اتصال کیا جائے تو اوسط رفتار کو محسوب کرنے میں مطلق خطااور فیصد خطا معلوم کیجئے۔

جواب: مطلق خطا 0.022 ، اضافی خطا 0.0011

(7) کسی کمپنی کے علاقائی دفاتر کی فروخت حسب ذیل ہے۔

علاقے	اکائیاں
شمال	13,434
جنوب	54,682
مشرق	36,482
مغرب	17,804
مرکزی	34,384

مندرجہ بالا اعداد کو قریب ترین ہزار تک تقرب کیجئے۔اس مفروضہ کے تحت کل فروخت کی اضافی خطا کا تخمینہ لگائیے کہ حقیقی اعداد فروخت نامعلوم ہیں۔اعداد فروخت کو حقیقی عدد کے فوراً بعد کے ہزار پر تقرب کریں تو تخمینی اضافی خطا میں کیا تبدیلی ہوگی؟ تخمینی اضافی قدر اور حقیقی اضافی قدر کا موازنہ کیجئے۔

(جواب: 0.004)

نوٹ : یہ سوالات آپ کو اس اکائی کے سمجھنے میں مددگار ثابت ہوں گے۔ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجئے۔لیکن آپ کے جواب یونیورسٹی کو مت بھیجئے۔یہ آپ کی مشق کے لئے ہیں۔

اکائی 4 نسبتیں، فیصد اور شرح

UNIT:4 - RATIOS, PERCENTAGES AND RATES

ساخت Structure

4.0	مقاصد	Objectives
4.1	تمہید	Introduction
4.2	مختلف شماریاتی مشتقات کے معنی	Meaning of Various Statistical Derivatives
4.2.1	نسبت	Ratio
4.2.2	فی صد	Percentage
4.2.3	شرح	Rate
4.3	شماریاتی مشتقات کا مقصد	Purpose of Statistical Derivatives
4.4	نسبتوں کی قسمیں	Types of Ratios
4.5	نسبتوں کی تحسیب	Computation of Ratios
4.6	نسبتوں کا اطلاق	Application of Ratios
4.7	مشتقات کے استعمال میں احتیاط	Caution in the Use of Derivatives
4.8	لوکارتم	Logarithms
4.8.1	لوکارتم کے معنی	Meaning of Logarithms
4.8.2	کسی عدد کی لوکارتمی قدر معلوم کرنا	To Find the Log Value of a Number
4.8.3	لوکارتم کے ذریعہ تحسیب	(Computation by Logarithms)
4.9	خلاصہ	Let Us Sum Up
4.10	کلیدی الفاظ	Key Words
4.11	اپنی معلومات کی جانچ: جوابات	Answers to Check Your Progress
4.12	امتحانی سوالات / مشقیں	Terminal Questions/Exercises

4.0 مقاصد Objectives

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:۔

- نسبتوں، فیصدوں اور شرحوں کے معنی کی وضاحت کر سکیں۔
- نسبتوں، فیصدوں اور شرحوں کے محسوب کرنے میں شامل تحسیبی پہلوؤں پر بحث کریں۔
- نسبتوں، فیصدوں اور شرحوں کے استعمال میں احتیاط کی وضاحت کر سکیں۔
- کاروبار اور نظم و نسق میں نسبتوں، فیصدوں اور شرحوں کے استعمال کی تمثیلی توضیح کر سکیں۔
- حسابات مثلاً ضرب، تقسیم، جذر وغیرہ میں لوکارتم کا استعمال کر سکیں۔

4.1 تمہید Introduction

آپ نے قبل ازیں شماریاتی مواد کے مختلف ماخذوں اور مواد اکٹھا کرنے کے مختلف طریقوں کا مطالعہ کیا۔ مواد میں در آنے والی مختلف قسم کی خطاؤں اور ان کے محسوب کرنے کے مختلف طریقوں سے بھی آپ کو آگاہی ہوئی۔ مواد کو کامل صحت کے ساتھ اکٹھا کرنا ہی نتائج کے اخذ کرنے کے لئے کافی نہیں ہے کیونکہ اعداد و شمار بذات خود کچھ نہیں کہتے۔ شماریاتی مواد کے موزوں تجزیہ اور موازنہ سے متعدد نتائج اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ مقداری مواد کی بامعنی انداز میں تلخیص کر کے اس کو عام فہم بنایا جاسکتا ہے تاکہ اس کی بہتر تاویل ہو سکے۔ مختلف عام طریقوں کے منجملہ ایک عام طریقہ شماریاتی مشتقات کو محسوب کرنا ہے۔ نسبتیں، فی صدیں اور شرحیں عام نوعیت کے شماریاتی مشتقات ہیں۔ یہ پیمانے مختلف عوامل میں موجود ربط کو واضح کرتے ہیں جس کی مدد سے صحیح شماریاتی تاویل کی جاسکتی ہے۔ آپ اس اکائی میں مختلف قسم کی نسبتوں، فی صدوں اور شرحوں کے معنی، مقصد اور ان کے محسوب کرنے اور شماریاتی تجزیہ میں ان کے استعمال میں روا رکھی جانے والی احتیاطی تدابیر سے متعلق معلومات حاصل کریں گے۔ طویل حسابات میں لوکارتم کے استعمال کے تعلق سے بھی آپ اس اکائی میں سیکھیں گے۔

4.2 مختلف شماریاتی مشتقات کے معنی
Meaning of Various Statistical Derivatives

جیسا کہ کہا گیا ہے، معنی خیز نتائج کے اخذ کرنے کے لیے، اکٹھا کیے ہوئے مواد کے ذخیرے کا موزوں طریقے سے تجزیہ کرنا ضروری ہے اور مختلف طریقوں میں سے ایک عام طریقہ شماریاتی مشتقات کو محسوب کرنا ہے۔ شماریاتی مشتقات تین قسم کے ہوتے ہیں۔ (1) نسبتیں (2) فی صد (3) شرح ۔ اب ہم ان میں سے ہر ایک کے معنی پر غور کریں گے۔

4.2.1 نسبت Ratio

نسبت، ایک ہی قسم کی دو مقداروں کی قدر کے درمیان رابطے کو ظاہر کرتی ہے اور یہ بتلاتی ہے کہ دونوں میں سے ایک مقدار دوسری میں کتنی مرتبہ شامل ہے۔

دو مقداریں "A" اور "B" کے درمیان رابطے کو ایک نسبت کی شکل میں A : B کے طور پر پیش کیا جاتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ وہ A ، B کی نسبت میں ہے۔ نسبت میں پہلے رکن A کو سباق (antecedent) اور دوسرے رکن B کو سیاق (consequent) کہتے ہیں۔ نسبت A:B اور A/B کے طور پر بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح سے ان دو اعداد "A" اور "B" کے درمیان نسبت کا تصور صرف "B" کی "A" سے تقسیم ہے۔ نسبت کو تقسیم کے طور پر ظاہر کرنا سہولت بخش نہیں اگرچہ کہ نسبت سے مراد معنوی تقسیم ہے یا حقیقی تقسیم۔ مثال کے طور پر اگر کسی "فیکٹری میں مرد مزدوروں اور مزدورنیوں کی نسبت کا موازنہ مطلوب ہو تو 550/110 ناقابل فہم ہے۔ اس کو 110 : 550 یا 1 : 5 لکھا جاسکتا ہے اور جس کو بآسانی سمجھا جاسکتا ہے۔ اس طرح سے، نسبت کی شکل میں اظہار سے عدد کا سائز بھی چھوٹا ہو جاتا ہے۔ جس سے موازنے میں آسانی ہوتی ہے اور اسے تیزی سے سمجھا جاسکتا ہے۔ جب کسی نسبت کے دونوں ارکان کو باہم تبدیل کر لیا جاتا ہے تو اس طرح حاصل ہونے والی دوسری نسبت کو 'معکوس نسبت' کہا جاتا ہے۔ اس طرح سے A : B کی معکوس نسبت B : A ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر کسی جماعت میں 80 طلبہ ہیں جس میں 50 لڑکے اور 30 لڑکیاں شامل ہیں۔ اب لڑکوں سے لڑکیوں کی نسبت 3 : 5 ہے اور لڑکیوں سے لڑکوں کی نسبت 5 : 3 ہے۔ غور کیجئے کہ 3 : 5 کی نسبت '1' سے زیادہ ہے جب کہ 5 : 3 کی نسبت '1' سے کم ہے۔ صورت حال کی مناسبت سے کوئی بھی نسبت کی قدر ایک سے زیادہ، ایک سے کم یا ایک کے برابر ہو سکتی ہے۔ لہٰذا کسی عدد یا مقدار کے دوسرے کے ساتھ پائے جانے والے رابطہ کو نسبت کہا جاتا ہے جس کی قدر، پہلے کو دوسرے سے تقسیم کرنے پر حاصل ہونے والے خارج قسمت کے طور پر ظاہر کی جاتی ہے۔

لیکن، بہر حال نسبت کے تصور کو تین یا تین سے زائد اعداد تک بھی وسعت دی جاسکتی ہے۔ تین یا تین سے زائد اعداد کو موازنہ کے ذریعہ سے بہ

مشکل A : B : C : D وغیرہ میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر، کسی جماعت کے 100 قانون کے طلبہ میں، 70 کامرس کے، 20 سائنس کے اور 10 آرٹس کے طلبہ ہیں۔ تب کامرس، سائنس اور آرٹس کے طلبہ کا موازنہ 1 : 2 : 7 سے تعبیر کیا جاسکتا ہے جیسے جیسے زمروں کی تعداد میں اضافہ ہوتا ہے۔ تناسب اظہار کے لئے بہتر مشتق ثابت ہوتا ہے کیونکہ یہ آسان ہونے کے علاوہ کم پیچیدہ ہوتا ہے۔ اگر کل N مدات کی تعداد کو تین زمروں میں تقسیم کیا جاتا ہے تو پہلے زمرے میں N1، دوسرے زمرے میں N2 اور تیسرے زمرے میں N3 ہے۔ تب پہلے، دوسرے اور تیسرے زمرے کا تناسب علی الترتیب N1/N ' N2/N اور N3/N ہوگا۔ اس تناسب میں نسب نما، مدات کی کل تعداد اور شمار کنندہ، متعلقہ زمرہ میں مدوں کی تعداد ہے۔ تناسب کی قدر ہمیشہ ایک سے کم ہوتی ہے اور تمام تناسبوں کا حاصل جمع ایک کے مساوی ہوتا ہے۔ نسبت کو ہمیشہ تناسب میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر مرد اور عورت کی نسبت 2 : 3 ہے، تب مردوں کا تناسب ہوگا 3/(3+2)=0.6 اور عورتوں کا تناسب ہوگا 2/(3+2) = 0.4 ۔

4.2.2 فیصد Percentage

نسبتوں اور تناسبوں کو اکثر فیصدوں میں ظاہر کیا جاتا ہے کیونکہ اضافی پیمانوں کو فیصد میں ظاہر کرنے سے ان کا ایک واضح تصور ذہن میں ابھرتا ہے۔ فیصد کا مطلب ہے فی سو (100)۔ نسبتوں کو فی صدوں میں تبدیل کرنے کے لئے کسی ایک عدد کو اساس مان کر اس کو سو سے ضرب دیا جاتا ہے مثلاً 1988 اور 1989 میں دھان کی فصل کی پیداوار 3 : 2 ہے اس کو فیصد میں ظاہر کرنے کے لئے 1988 کی پیداوار یعنی 2 کو اساس کے طور پر لیا جاتا ہے۔ اس صورت میں 1989 میں پیداوار گذشتہ سال کی پیداوار کا 3/2 x 100 = 150% ہوگی۔ آپ کو جاننا چاہئے کہ فیصدوں کا مجموعہ 100 ہونا چاہئے اور یہ اسی صورت میں ممکن ہے جبکہ تمام زمرے بے میل اور جامع ہوں (یعنی ایک مدصرف ایک ہی زمرے سے متعلق ہو اور کوئی جملہ تعداد سے خارج نہ ہو)۔

4.2.3 شرح Rate

عام طور پر جب ایک ہی قسم کے دو مقداروں کا موازنہ مقصود ہو تو، اصطلاح "نسبت" کا استعمال ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی کارخانے میں مرد اور عورت مزدوروں کی نسبت کو لیجئے۔ یہاں پر مرد اور عورتیں دونوں کسی کارخانے میں مزدور ہیں۔ لہٰذا اس معنی میں یہ دونوں ایک ہی زمرہ سے متعلق ہیں۔ مختلف اکائیوں کے رقوم میں ظاہر شدہ نسبت کو اکثر شرح کہا جاتا ہے۔ مثلاً فی کس آمدنی کی صورت میں شمار کنندہ کل آمدنی اور نسب نما کل آبادی ہوتی ہے۔ شرح کی دوسری مثالیں ہیں، شرح اموات، شرح پیدائش، شرح حادثات وغیرہ۔ شرح کا تصور تبدیلی پر مشتمل ہوتا ہے۔ شرحیں عام طور پر متحرک نوعیت کی ہوتی ہیں جن کا تعلق وقت سے ہوتا ہے۔ شرح ایک خارج قسمت ہے جو کہ شمار کنندہ اور نسب نما میں وقوع پذیر تبدیلی کو ظاہر کرتا ہے۔ کسی بھی شرح کا عموماً بلحاظ نسب نما معیار مقرر کیا جاتا ہے۔ کسی عدد کو جب کسی دوسرے عدد سے تقسیم کیا جاتا ہے اور خارج قسمت کو 1,000 سے ضرب دیا جاتا ہے تو حاصلہ عدد کو شرح فی ہزار کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر اموات کی تعداد کو کل آبادی سے تقسیم کیا جائے اور خارج قسمت کو 1000 سے ضرب دیا جائے خام شرح اموات حاصل ہوگی۔

قدر ضربی: شرح فی اکائی کو قدر ضربی (Coefficient) کہا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ شرح اموات تقریباً 1.9% یا 19 فی ہزار ہے تو اموات کی قدر ہوگی 0.019 ۔ اگر اسی قدر کو کل آبادی سے ضرب دیا جائے تو کل اموات کی تعداد حاصل ہوگی ۔

4.3 شماریاتی مشتقات کا مقصد Purpose of Statistical Derivatives

آپ نے مختلف شماریاتی مشتقات (یعنی نسبتیں، فیصد اور شرح) سے متعلق معلومات حاصل کیں۔ اب سوال یہ ہے کہ ان شماریاتی مشتقات کو محسوب کرنے کا مقصد کیا ہے؟ جیسا کہ قبل ازیں کہا گیا ہے شماریاتی مشتقات کے محسوب کرنے کا اصلی مقصد تقابل کرنا ہے۔ نسبت، فیصد اور شرح کے معنی سے یہ ظاہر ہے کہ یہ سب اضافی تصویر پیش کرتے ہیں۔

بہر حال جب ایک یا دو سے زائد اعداد کا کسی ایک دوسرے عدد سے موازنہ / تقابل کیا جاتا ہے، جس عدد کو ہم موازنے کے لئے معیار تصور کرتے ہیں اسے اساس (base) کا نام دیا جاتا ہے۔ کس قسم کی اساس منتخب کرنی ہے؟ اس کا انحصار صورت حال پر ہوتا ہے۔ عام طور پر کوئی بھی بذات خود، کسی دیئے گئے مسئلہ کا معنی خیز تجزیہ نہیں کر سکتا۔ مثلاً یہ کہا جائے کہ کمپنی کو جاریہ سال سرمایہ کاری پر 18% منافع ہوا۔ آپ پوچھ سکتے ہیں آیا یہ اونچے درجے کی شرح آمدنی ہے یا نہیں۔ مشتقوں کے بامقصد استعمال کے لئے ضروری ہے کہ اس کا کسی معیاری پیمانے سے تقابل کیا جائے تاکہ اس کی قدر پیمائی کی جاسکے۔ 18% شرح آمدنی کا تقابل سال گذشتہ کی آمدنی یا کسی دوسری فرم کی آمدنی سے کیا جاسکتا ہے جبکہ یہ قابل تقابل ہوں۔

مختلف گروپوں کا تقابل کرنے کے لئے مشتقات کا استعمال کیا جاتا ہے۔ عام طور پر ان کو ایک مشترکہ نسب نما کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے تاکہ تقابل نہایت سہل اور بامعنی بن جائے۔ فرض کیجئے کہ دو کاروباری ادارے بالترتیب 50,000 روپے اور 1,20,000 روپوں کے سرمائے سے شروع کئے گئے ہیں۔ سال کے آخر میں پہلے ادارے نے 20,000 کا نفع کمایا اور دوسرے کا منافع 40,000 روپے تھا۔ بظاہر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ دوسرے ادارے نے پہلے ادارے کی بہ نسبت دوگنا منافع کمایا لیکن ان کو یک مشترک نسب نما 100 تک گھٹا کر تقابل کیا جائے تو پتہ چلے گا کہ پہلے ادارہ نے اپنے سرمائے کا 40% منافع حاصل کیا ہے جب کہ دوسرے ادارہ نے اپنے سرمائے کا صرف 33% منافع حاصل کیا ہے۔ مطلق اعداد کے مطالعہ کے تاثرات اب بالکل برعکس ہو جاتے ہیں لہذا، منافع بطور سرمائے کا فیصد حقیقتاً اپنے آپ میں ایک مفہوم رکھتا ہے۔ نامعلوم مقدار کا تخمینہ کرنے میں بھی مشتقات نہایت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔ مثال کے طور کسی مخصوص علاقے میں شرح پیدائش معلوم ہے اور بجا طور پر یہ فرض کیا جاسکتا ہے کہ ایک رات تک یہ شرح مستقل رہے گی۔ اگر آپ کسی خاص نقطۂ وقت پر جملہ نو مولود بچوں کی تعداد جانتے ہوں تو آپ اس نقطۂ وقت پر آبادی کا تخمینہ کر سکتے ہیں۔ اس طرح سے، مشتقات نامعلوم مقداروں کے تخمینے کرنے میں فائدہ مند ہیں اور مواد کو سادہ اور قابل تقابل بنانے میں ممد و معاون ہوتے ہیں۔

اپنی معلومات کی جانچ A

(1) نسبت کیا ہے؟

.....

.....

.....

.....

(2) فیصد کیا ہے؟

.....

.....

.....

.....

(3) شرح کیا ہے؟

.....

.....

.....

.....

(4) شماریات کے عملی کاموں میں مستعمل مختلف قسم کی نسبتوں کے نام لکھیے۔

.....

.....

.....

.....

(5) تحریر کرو کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) نسبت ہمیشہ ایک ہی قسم کی دو مقداروں کے درمیان معلوم کی جاتی ہے۔

(ii) فی صد محسوب کرنے کے لیے اساس ہمیشہ 100 لی جاتی ہے۔

(iii) نسبت کو تناسب میں تحویل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

(iv) شرح فی اکائی کو قدر ضربی کہتے ہیں۔

(6) کالم A کے مدات کو کالم B کے مدات سے جوڑیئے۔

کالم A		کالم B
(i) کسی کاروباری فرم میں ، احمد اور شفیق کے سرمائے میں حصے 3 : 2 ہیں۔	(a)	شرح
(ii) ہندوستان میں 1000 میں سے 20 افراد قلب پر حملے کا شکار ہوتے ہیں۔	(b)	تناسب
(iii) کسی شہر میں، مردوں اور عورتوں کی آبادی 0.4 : 0.6 ہے۔	(c)	فیصد
(iv) ہندوستان میں 100 میں سے 70 اشخاص دیہات میں رہتے ہیں۔	(d)	نسبت

4.4 نسبتوں کی قسمیں Types of Ratios

شماریاتی کام میں کئی اقسام کی نسبتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ استعمال شدہ نسبت کی قسم کا دارومدار اس کی اساس پر ہوتا ہے۔ اگر ایک یا ایک سے زیادہ اعداد کا کسی اور عدد سے مقابلہ کیا جاتا ہے تو اس عدد کو جس سے مقابلہ کیا جاتا ہے اساس کہتے ہیں ہم مختلف اقسام کی نسبتوں کے متعلق بحث کریں گے :

(a) تقسیمی نسبت **The Distribution Ratio** : ایک جزاور کل کے درمیان پائی جانے والی نسبت کو تقسیمی نسبت کہا جاتا ہے جبکہ وہ جزء اس کل میں شامل ہو۔ فرض کرو کہ کسی کمپنی کے 1,000 مزدوروں میں 300 عورتیں شامل ہیں۔ اس صورت میں عورتوں کی (تقسیمی نسبت) ہے 10 : 3 = 300/1000 ہے اس کا مطلب ہے کہ کل مزدوروں کی تعداد کا 30% عورتیں ہیں۔ اس مثال میں 1,000 مزدوروں میں 300 عورتیں بھی شامل ہیں۔ تقسیمی نسبت کے تصور کا اطلاق ایک سے زیادہ گروپوں پر بھی کیا جاسکتا ہے۔ اس قسم کی نسبت کو "کل بہ نسبت اجزا" (Total to parts ratio) کہا جاتا ہے۔

(b) بین اجزا اور بین جماعت نسبت **Interpart and Interclass Ratio** : کسی کل کے دو اجزا میں پائی جانے والی نسبت کو بین اجزا نسبت کہتے ہیں۔ کسی ایک جز کو تقابل کے لئے اساس کے طور پر لیا جاتا ہے کیونکہ بنیادی طور پر دونوں اجزا کا ایک دوسرے سے تقابل کیا جاتا ہے۔ کسی آبادی میں جنسی نسبت اس کی ایک مثال ہے کیونکہ جنسی نسبت کو عموماً فی ہزار مردوں میں عورتوں کی تعداد سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس سے فی 1,000 کی آبادی میں عورتوں کی تعداد ظاہر نہیں کی جاتی۔

(c) زمانی نسبت Time Ratio : یہ نسبت ایک ایسا پیمانہ ہے جو کہ بہ لحاظ وقت ترتیب کردہ قدروں کے ایک طویل سلسلہ میں رونما ہونے والے تغیرات کو ظاہر کرتا ہے۔ عموماً اس نسبت کو ماضی: حال کہا جاتا ہے۔ ان نسبتوں کی دو اہم قسمیں ہیں (i) وہ نسبتیں جن میں ایک مخصوص مدت کو بطور اساس لیا جاتا ہے اور (ii) وہ نسبتیں جن میں ایک متحرک اساس کو استعمال کیا جاتا ہے۔ قائم اساسی مدت طریقہ کے تحت ایک مخصوص سال یعنی 1980 کو اساسی سال کے طور پر چنا جاتا ہے اور سال رواں کی پیداوار کا تقابل اساسی سال یعنی 1980 کے دوران پیداوار سے کیا جاتا ہے جبکہ متحرک اساسی طریقہ کے تحت اساس متواتر تبدیل کیا جاتا ہے۔ سال حال کی چائے کی پیداوار کو معلوم کرنے کے لئے سال گزشتہ میں چائے کی پیداوار کو بطور اساس فرض کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح سال آئندہ کی پیداوار کو معلوم کرنے کے لئے سال حال کی پیداوار کو اساس فرض کر لیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ سال 1982 کے اعداد معلوم کرنے کے لئے سال 1981 کے اعداد کو بطور اساس استعمال کیا جائے گا اور سال 1983 کے اعداد معلوم کرنے کے لئے سال 1982 کے اعداد کو اساس کے طور پر استعمال کیا جائے گا۔ یہ حسابات بنیادی طور پر دو متواتر وقفوں سے متعلقہ مواد کو قابل موازنہ و مقابلہ بناتے ہیں۔

(d) مخلوط نسبت Hybrid Ratio : مواد کے مختلف زمروں کے متعلقہ اجزاء کے مابین پائی جانے والی نسبت سے مخلوط نسبت حاصل ہوتی ہے۔ اس صورت میں شمار کنندہ اور نسب نما دو مختلف اکائیوں میں ہوتے ہیں مثلاً اگر یہ کہا جائے کہ ایک کار 30 میل فی گھنٹہ "کی رفتار سے سفر کر رہی ہے تو ہم مخلوط نسبت کا استعمال کر رہے ہیں۔ اس صورت میں میل کی تعداد کو گھنٹوں کی تعداد سے تقسیم کیا جارہا ہے اور ان دونوں اکائیوں کو نتیجہ کے اظہار میں استعمال کیا جارہا ہے۔ مخلوط نسبتوں کی دوسری عام مثالیں ہیں فی کس آمدنی، فی گھنٹہ یا فی دن پیداوار، اشخاص فی مربع کیلو میٹر، فی خاندان بچوں کی تعداد، فی پاسنجر میل لاگت، فی میل سرمایہ کاری وغیرہ۔ کیونکہ اس قسم کی نسبتوں میں شمار کنندہ اور نسب نما مختلف زمروں سے تعلق رکھتے ہیں۔ اسی وجہ سے مخلوط نسبتوں کو شرحوں کے مفہوم میں بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

4.5 نسبتوں کی تحسیب Computation of Ratios

آپ نے قبل ازیں نسبتوں کے معنوں اور اقسام کا مطالعہ کیا ہے۔ اب ہم نسبت شماری کے دوران قابل غور پہلوؤں سے بحث کریں گے۔ ہر شماریاتی نسبت میں تین نکات پر دھیان دینا ضروری ہے۔ (1) مربوط طلب متغیرے (2) منطقی اساس یا نسب نما کا انتخاب (3). نسب نما میں اکائیوں کا انتخاب۔ اب ہم ان تینوں نکات کا تفصیلی مطالعہ کریں گے۔

(1) مربوط طلب متغیرے (Variables to be Related) : شمار کنندہ اور نسب نما کے درمیان ایک مخصوص رابطہ ہونا چاہئے۔ مثال کے طور پر اگر آپ سال رواں کے دوران کسی کمپنی کی سرمایہ کاری پر آمدنی معلوم کرنا چاہیں تو سال رواں کی سرمایہ کاری پر آمدنی محسوب کرنی چاہیئے نہ کہ قیام کمپنی کے زمانے کی سرمایہ کاری پر۔ ایک دوسری مثال فی ایکڑ زرعی پیداوار کی ہو سکتی ہے اس ضمن میں زرعی پیداوار فی ایکڑ جملہ زمین کے بجائے زرعی پیداوار فی ایکڑ زیر کاشت رقبہ زیادہ بامعنی ہوگی کیونکہ جملہ زمین میں بنجر زمین، جنگلات اور صحرا وغیرہ میں شامل رہتے ہیں۔

(2) اساس کا انتخاب (Choice of Base) : کسی بھی شماریاتی نسبت کی اساس یا نسب نما ہمیشہ ایک ایسا معیار ہوتا ہے جس کی مدد سے شمار کنندہ کا تقابل کیا جاتا ہے۔ جیسا کہ آپ جانتے ہیں، نسبت کے ذریعہ ہم دو مدات کے درمیان رابطہ قائم کرتے ہیں۔ یہاں پر تعین کرنا ضروری ہے کہ دونوں مدات میں سے کس کو اساس کے طور پر استعمال کیا جائے گا۔ بعض صورتوں میں اساس کا انتخاب واضح ہے جبکہ دوسری صورتوں میں یہ غیر واضح رہتا ہے۔ بہر حال اساس کے انتخاب میں چند عام اصول قائم کئے جاتے ہیں۔

(i) جز اور کل کے مقابلے میں، کل ہمیشہ اساس ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر، بیروزگاروں کی تعداد کو جملہ مزدوروں کی تعداد سے جوڑنا ہے تو مزدوروں کی جملہ تعداد، نسبت کا نسب نما ہوتی ہے۔

(ii) یکساں نوعیت کے مدات کے بہ لحاظ زمانہ تقابل (نسبت زمانی) کی صورت میں پہلے پیش آنے والے واقعہ کو ہمیشہ اساس کے طور پر

لیا جاتا ہے مثلاً سال گذشتہ کے بالمقابل سال رواں کی فروخت میں تبدیلی معلوم کرنا ہو تو سال گذشتہ کی فروخت کو اساس کے طور پر لینا چاہیئے۔

(iii) دو متغیروں میں کسی ایک کا دوسرے پر انحصار ہو تو ان میں موجود ربط کو معلوم کرتے وقت اس دوسرے متغیرہ کو بطور اساس لیا جاتا ہے مثلاً جملہ حادثات کو جملہ پاسنجر میل سے جوڑنا ہو تو عموماً موخر الذکر کو برائے تقابل بطور اساس لیا جاتا ہے۔

(3) نسب نما اکائیوں کا انتخاب (Choice of Units in Denominator) : نسب نما (یعنی اساس) میں اکائیوں کی تعداد کا تعین رواج، سہولت اور اثر انگیزی (effectiveness) کے پیش نظر کیا جاتا ہے۔

(a) اکثر صورتوں میں نسبت کی اساس کو ایک واحد اکائی کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے۔ مثلاً فی کس آمدنی، فی پاسنجر میل، فی ایکڑ پیداوار وغیرہ۔

(b) اکثر اوقات نسبتوں کو فیصدوں کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے مثلاً پچھلے سال کی تعداد میں سے آج سرگرم عمل ٹیلیفون لائنوں کی تعداد گذشتہ سال کی تعداد کا 150% ہے۔ اس صورت میں فیصد کی شکل میں بیان کردہ عدد ظاہر کرتا ہے کہ ہر سو نسب نما اکائیوں کے لئے شمار کنندہ کی کتنی اکائیاں موجود ہیں۔ اساس کو 100 کی اکائیوں میں ظاہر کرنا بہت آسان عمل ہے۔

(c) ہزار، دس ہزار یا اس سے زائد تعداد کی اکائیاں بطور اساس استعمال کی جاسکتی ہیں مثلاً یہ بیان کہ: 1,000 آدمی گھنٹوں 4.5 حادثات فی 1,000 آدمی گھنٹوں کو اس طرح سے بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔ 45 حادثات فی 10,000 آدمی گھنٹے یا 0.004 حادثات فی آدم گھنٹہ۔

ذیل میں چند رہنمایانہ خطوط دیئے جارہے ہیں جو یہ تعین کرنے میں مدد دیں گے کہ آیا ایک یا ایک سے زیادہ اکائیوں کی طاقت کو بطور اساس استعمال کرنا چاہیئے۔

(i) بطور اساس استعمال کئے جانے والا عدد کافی بڑا ہونا چاہیئے تاکہ شمار کنندے کی قدر ایک صحیح عدد کی شکل میں ظاہر ہو، لیکن اعشاری نقطے کے بائیں جانب دو یا دو سے زائد ہندسہ نہ رکھتا ہو۔ ایسا کہنا زیادہ سہولت بخش ہے کہ فی 10,000 شخص گھنٹوں میں 45 حادثات ہوتے ہیں بجائے اس کے کہ فی 10,00,000 شخصی گھنٹوں میں 4,500 حادثات ہوتے ہیں۔

(ii) بطور اساس استعمال ہونے والا عدد (نسب نما) اصلی مواد کے عدد سے بڑا نہیں ہونا چاہیئے۔ مثلاً کسی فرم میں صرف 12 افراد ملازم ہیں اور ان میں سے 9 کے پاس کاریں ہیں تو اس صورت میں یہی مناسب ہوگا کہ اصلی مواد کو استعمال کیا جائے کیونکہ اس صورت میں مطلوبہ ربط اتنا واضح ہے کہ اس کے اظہار کے لئے نسبت کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ اگر یہ کہا جائے کہ 75% ملازم کار استعمال کرتے ہیں تو اگرچہ مطلب وہی ہوگا لیکن اس سے واضح تاثر نہیں مل سکتا۔ اس صورت میں جو نسب نما 100 استعمال کیا گیا ہے وہ اصلی عدد یعنی 12 سے زیادہ ہے۔

چنانچہ شماریاتی نسبتوں کو محسوب کرتے وقت پہلے یہ تصفیہ کرلینا چاہیئے کہ کونسا متغیرہ نسب نما ہوگا اور کونسا شمار کنندہ اور مطلوبہ نسبت میں نسب نما کی کتنی اکائیاں درکار ہیں۔

4.6 نسبتوں کا اطلاق Application of Ratios

نسبتیں، شرح ضربی قدریں ہر قسم کے مطالعہ میں نہایت کار آمد ہیں۔ فی کس آمدنی Percapita Income ، فی مربع کیلو میٹر آبادی (Population Per Square Kilometer) ، فی ایکڑ پیداوار (Production Per Acre) ، شرح فروخت (Turn Over Ratio) ، قائم اثاثے نسبت (Fixed Assets Ratio) ، مقیاس ذہانت (Intelligence Quotient) ، فریٹ، ریوینیو فی میل (Freight Revenue Per Mile) ، سرمایہ کاری فی میل (Investment per Mile) ، محنت پیداوار نسبت (Labour to output Ratio) ، سرمایہ، مصنوعات نسبت (Capital Output Ratio) وغیرہ چند مقبول عام نسبتیں ہیں۔ عام استعمال کی نسبتوں کے

متعلق تفصیلات درج ذیل ہیں۔ یہ مثالیں اگرچہ جامع نہیں ہیں لیکن معاشیات، تجارت اور آبادی کے مطالعہ میں شماریاتی پیمانوں کے طور پر نسبتوں کی اہمیت ان سے واضح ہو جاتی ہے۔

(1) 1987-88 میں ہمارے ملک کی فی کس آمدنی 3,184 روپے تھی۔ اس کو حاصل کرنے کے لئے قومی آمدنی 2,49,905 کروڑ روپیوں کو آبادی 785 ملین سے تقسیم کرنا پڑتا ہے۔

(2) چار بڑے شہروں کے لئے کچھ نسبتوں کی فہرست جدول 4.1 میں دی گئی ہے۔

جدول 4.1

چار بڑے شہروں کا خاکہ

	بمبئی	کلکتہ	دہلی	مدراس
1. عورتوں کی تعداد فی 1,000 مرد	772	781	808	930
2. آبادی فی مربع کیلو میٹر (ہزاروں میں)	13.7	10.8	10.6	7.5
3. شرح خواندگی (%)	68.2	65.6	62.7	67.4
4. کامگار آبادی کی نسبت (%)	34.7	30.5	32.2	28.2
5. سڑک حادثے فی 10,000 موٹر کار	607	279	74	417
6. فی کس پینے کے پانی کی دستیابی فی یوم (لیٹر)	112	259	239	73
7. شفاخانوں کے بستر فی 1,000 آبادی (تعداد)	3.3	4.1	2.1	3.2

Source : Statistical Outline of India, 1988-89

جدول 4.1 میں چار بڑے شہروں سے متعلق کئی نسبتیں دی گئی ہیں۔ اب آپ ان نسبتوں کا تقابل کر سکتے ہیں۔ یہ نسبتیں ماہرین معاشیات اور منصوبہ سازوں کے لئے آبادیاتی مطالعوں میں بے حد کار آمد ہیں۔

(3) حساب داری نسبتوں (Accounting Ratio) میں ایک مشہور نسبت ہے رواں اثاثہ جات بمقابل رواں واجبات کسی کارپوریشن کے رواں اثاثے 30 لاکھ روپے ہیں اور رواں واجبات 10 لاکھ روپے ہے تو رواں نسبت ہوگی 1 : 3 ۔ مختلف قسم کی صنعتوں اور کاروبار کے لئے مختلف قسم کی معیاری رواں نسبتیں مقرر کی گئی ہیں جو ان صنعتوں اور کاروبار میں مصروف کار افراد/اداروں کے لئے رہنمایانہ خطوط کا کام کرتی ہیں۔

(4) آج کل آبادی کے مطالعوں میں نسبتوں کا استعمال بہت عام ہو چکا ہے۔ موجودہ آبادی میں اضافے کی شرح 2.2% محسوب کی گئی ہے۔ آبادی میں اضافے کی اس شرح کا تعین شرح اموات' شرح پیدائش اور بہ لحاظ عمر آبادی کی ساخت کو ملحوظ رکھ کر کیا گیا ہے۔

1985ء میں بچوں کی شرح اموات (پیدا شدہ فی ہزار 1000 بچوں میں اموات کی تعداد) ہندوستان میں 97 تھی۔ 1986ء کے اعداد وشمار کے مطابق، شرح پیدائش اور شرح اموات فی 1,000 آبادی کے لئے علی الترتیب 33.2 اور 12.2 ہے۔ یہ تمام نسبتیں نظریاتی اور حسابی آلودگیوں سے پاک وصاف ہوتی ہیں۔ اس لیے ان کو خالص نسبتیں کہا جاتا ہے۔ خالص نسبت سے مراد وہ نسبت ہے جس میں نسب نمایا شمار کنندہ یا دونوں کو اس طرح ہم آہنگ کیا جاتا ہے کہ اس سے ان تمام خارجی عوامل کی نفی ہوتی ہے جو ان دونوں کے مابین موجود راست تعلق کو مائل کرنے کار جحان رکھتے ہیں مثلاً کسی کارخانے میں محنت' لاگت اور کل صناعی لاگت کے درمیان نسبت نہایت کار آمد نسبت ہے لیکن نسب نما دو قسم کی لاگتوں پر مشتمل ہے یعنی قائم لاگت اور متغیر لاگت۔ محنت' لاگت اور کل متغیر لاگت کے درمیان نسبت، کارکردگی کا جائزہ لینے کے لئے انتظامیہ کے واسطے نہایت اہم نسبت ہوتی ہے۔ کسی نسبت کو دوسری نسبتوں سے بہتر طریقے سے

موازنے اور مقابلے کے قابل بنانے کے لئے اس نسبت کے اجزائے ترکیبی میں ہم آہنگی پیدا کر کے اس کو معیاری بنایا جاسکتا ہے۔ معیاری نسبتوں کا استعمال حیاتیاتی شماریات میں اہمیت کا حامل ہے، جہاں پر مختلف شہروں یا ملک کے مختلف حصوں کے تقابل کے لئے معیاری شرح اموات، شرح پیدائش وغیرہ استعمال کی جاتی ہیں۔ معیاری شرحوں کی حساب داری وزنی اوسط کے تصور پر مبنی ہوتی ہے۔ اس لئے اس اکائی کی وسعت سے باہر ہے۔

4.7 مشتقات کے استعمال میں احتیاط Caution in The Use of Derivatives

مشتقات کے استعمال میں کئی خطائیں، ان کے صحیح معنی کے اظہار میں ناکامی سے پیدا ہوتی ہیں۔ مشتقات کی تحسیب اور ان کے استعمال میں پیدا ہونے والی دشواریوں کے عموماً مندرجہ ذیل اسباب ہو سکتے ہیں۔

(1) اساس سے متعلق انتشار **Confusion Regarding the Base** : فرض کیجئے کہ جاریہ سال کے دوران کسی چیز کی قیمت 2,000 روپوں سے بڑھ کر 2,500 روپے ہو گئی ہے۔ موجودہ قیمت گزشتہ سال کی قیمت کا 125% ہو گی۔ ایک متبادل بیان یہ بھی ہو سکتا ہے کہ جاریہ سال میں قیمت گزشتہ سال کی بہ نسبت 25% زیادہ ہو گئی۔ ایسے اعداد کی غلط تاویل اس طرح کی جائے گی کہ جاریہ سال میں قیمت گزشتہ سال کی قیمت کی بہ نسبت 25% زیادہ ہے یا اس سال قیمت 125% بڑھ گئی ہے۔ اسی مثال کو جاری رکھتے ہوئے فرض کیجئے کہ اگلے سال تک قیمت کم ہو کر 2000 روپے ہو گئی ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ قیمت میں کمی 500 روپے ہے جو گذشتہ سال کے اضافے کے برابر ہے۔ نوٹ کیجئے کہ مطلق معنوں میں تبدیلی وہی ہے یعنی 500 روپے لیکن اگر پہلی صورت میں اس کو بطور فیصد ظاہر کیا گیا تو اضافہ 25% تھا اور اب کمی صرف 20% (یعنی 2,500 میں 500) ہے۔ ان دونوں صورتوں میں فیصد تبدیلی راست طور پر تقابل کے قابل نہیں کیونکہ فی صدوں کو دو الگ الگ اساس سے محسوب کیا گیا ہے۔ اگر ان کا اوسط نکالنے کی کوشش کی جائے تو غلط نتیجے پر پہنچنے کی کافی گنجائش رہتی ہے۔ مثال کے طور پر 25% اور 20% کا اوسط 2.5% + ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ اوسطاً ان دو برسوں میں قیمتیں فی سال 2.5% کے حساب سے بڑھی ہیں۔ اس قسم کا حساب کتاب صحیح نہیں ہے۔ در حقیقت ان دو تبدیلیوں کے بعد قیمت اپنی اصلی قدر پر لوٹ آتی ہے۔ اس تمثیل سے یہ ظاہر ہے کہ مطلق رقم 500 کے مساوی متواتر تبدیلی ہو تو اضافہ کی صورت میں (یعنی 2000 میں 500 کا اضافہ ہو تو) تبدیلی فیصد میں اضافہ ہوتا ہے (یعنی 25%) اور کمی کی صورت میں (یعنی (یعنی 2500 میں 500 کی کمی ہو تو) فیصد تبدیلی 20% ہوتی ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ اول الذکر (یعنی اضافہ کی) صورت میں اساس کے طور پر چھوٹا عدد یعنی 2000 (500/2000) لیا گیا ہے اور موخر الذکر (یعنی کمی کی) صورت میں اساس کے طور پر بڑا عدد یعنی 2500 (500/2500) لیا گیا ہے۔ لہذا یہ معلوم ہوا کہ اساسوں کے حوالہ کے بغیر فیصد تبدیلیوں کا تقابل جائز نہیں قرار پاتا۔

دوسری صورت حال پر غور کیجئے کہ جہاں کسی چیز کی قیمت 2000 روپے ہے جس میں 20% کا اضافہ ہو رہا ہے اور پھر فوراً 20% کی کمی ہوتی ہے۔ 20% اضافے سے قیمت 2400 ہوتی ہے اس میں 20% (480) کی سے اس چیز کی قیمت (2400) 1920 ہو گی جو کہ اصلی قدر سے کم ہے لہذا یہ معلوم ہوا کہ قیمت میں یکساں فی صدی متواتر اضافہ اور کمی سے قطعی قدر ابتدائی قدر سے کم ہوتی ہے۔

اگر کوئی قدر 100% کم ہو جاتی ہے تو اس کی قدر صفر ہو جاتی ہے۔ لاگت، اجرت، محنت جیسی مقداروں میں 100% سے زیادہ کمی نہیں ہو سکتی اور اگر ایسا ہو تو اس سے خطا کی موجودگی ظاہر ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر اگر 2000 روپیوں کی قیمت 800 روپے تک گھٹ جائے تو 1200 روپیوں کی کمی قطعی قیمت کے 1200/800 15% کے طور پر ہو گی جو کہ ایک غیر صحیح بیان ہے کیونکہ یہاں پر اساس کا انتخاب صحیح طور پر نہیں ہوا ہے۔ 15% کی کمی سے عموماً قیمت منفی ہو جاتی ہے جو یہاں پر صحیح نہیں ہے۔ فی صد کمی کو اصلی عدد یعنی 2000 کو بطور اساس لے کر محسوب کر لیں تو 1200/2000 قیمت میں 60% کمی ہو گی جو کہ ایک صحیح بیان ہے۔ بہر حال ایسی صورتیں بھی موجود ہیں جب کہ فی صد کمی 100 سے زیادہ ہوتی ہو۔ کسی فرم پر غور کرو جس نے ایک سال میں ایک لاکھ روپے منافع کمایا ہے اور اگلے سال میں 50,000 روپے کا نقصان ہوا۔ تب منافع میں جملہ کمی 1,50,000 روپے یا اصلی منافع کے عدد کا 150%

ہو گی۔ یہاں پر کوئی غلطی نہیں ہے کیونکہ آخر عدد منفی ہے کیونکہ یہ نقصان ہے۔ مواد مثلاً منافع منفی قدر اختیار کر سکتا ہے ایسی صورت میں فیصد کمی 100 سے بھی زیادہ ہو سکتی ہے۔

(2) چھوٹی اساسوں کے سبب تحریفیں Distortions Caused by Smal Bases : ایک اور مثال پر غور کیجئے جہاں پر چھوٹی اساسوں کے سبب توڑ مروڑ سے غیر صحیح نتائج بر آمد ہو سکتے ہیں۔ فرض کیجیے کہ فرم A کے منافع 1000 سے بڑھ کر 10,000 روپے ہو گئے اور فرم B کے منافع 50 لاکھ روپے سے بڑھ کر 70 لاکھ

روپے ہو گئے۔ پہلی صورت میں یہ اضافہ 9000 روپیوں کا ہوا جو کہ $\left(\frac{100}{1000} \times 9000\right)$ یعنی 900% اضافہ ہوا اور دوسری صورت

میں یہ اضافہ 50 لاکھ سے 70 لاکھ یعنی 20 لاکھ ہوا جو کہ $\left(\frac{100}{50} \times 20\right)$ صرف 40% ہے۔ فرم A کی صورت میں اضافہ کا فیصد

بہت اونچا ہے۔ ان اعداد و شمار کی تاویل میں نہایت احتیاط لازمی ہے۔ یہ نتیجہ اخذ کرنا کہ فرم A کا انتظامیہ نہایت کارکرد ہے حق بجانب نہ ہو گا۔ چونکہ فیصد صرف اضافی قدر کی نشاندہی کرتا ہے، اس سے مطلق مقداروں کے متعلق کوئی بھی نتیجہ اخذ نہیں کرنا چاہئے۔ اس صورت میں صرف مطلق اعداد استعمال ہوں تو صحیح تصویر سامنے آتی ہے۔

(3) غیر مشابہہ صورتحال پر مبنی تقابل Comparisons Based on Dissimilar Situations : شرحوں اور نسبتوں کے محسوب اور استعمال کرنے میں مواد کا متجانس ہونا ضروری ہے۔ مثال کے طور پر کسی شہر یا ملک کی عام شرح اموات، اموت کی تعداد کو کل آبادی سے تقسیم کر کے 1000 سے ضرب دے کر حاصل کی جاسکتی ہے لیکن یہ عام شرح اموت جس کو خام شرح اموات، بھی کہا جاتا ہے غیر متجانس اعداد سے تعلق رکھتی ہے، کیونکہ شرح اموات عمر، جنس اور آبادی کی ساخت وغیرہ کے ساتھ ساتھ تبدیل ہوتی ہے۔

ایک اور مثال پر توجہ کیجئے۔ مقام A میں 1,000 اشخاص میں سے 500 اشخاص ہیضہ سے متاثر ہوئے اور مقام B میں 1000 میں صرف 100 اس کا شکار ہوئے۔ اگر مقام A میں آپ ان لوگوں کا مقابلہ جو اس بیماری سے متاثر ہوئے اُن لوگوں سے کریں جو متاثر نہیں ہوئے ہیں تو نسبت ہو گی 1 : 1 اور مقام B میں یہ نسبت ہو گی 9 : 1 اس نسبت سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ مقام B میں صحت کا نہایت عمدہ انتظام ہے اور اس کے لوگ بہت صحتمند ہیں۔ ایسا صحیح ہونا ضروری نہیں کیونکہ مقام B کے لوگوں نے ہیضے کے انسداد کا ٹیکہ لگوا لیا ہو گا۔

ایک اور بیان پر غور کیجئے "سال گزشتہ کے مقابلے میں سال رواں میں شہر میں جرائم کی تعداد 45% بڑھ گئی ہے"۔ اس بیان سے صاف نتیجہ نکلتا ہے کہ جرائم میں اضافہ ہو رہا ہے۔ اگر نسبت کے ذریعے دو غیر مشابہہ حالات کا تقابل کیا جائے تو اس قسم کا نتیجہ اخذ نہیں کیا جاسکتا۔ فرض کیجیے کہ سابق میں کوئی مناسب رپورٹنگ سسٹم موجود نہ تھا اور سال رواں کے آغاز میں ایک نیا رپورٹنگ سسٹم رائج کیا گیا تو ایسی صورت میں یہ دعویٰ نہیں کیا جاسکتا کہ جرائم میں اضافہ ہوا ہے۔ ہو سکتا ہے کہ جدید نظام سے پورے کے پورے جرائم کی اطلاع دی جا رہی ہے جبکہ سابق میں ایسا ممکن نہ تھا۔ اس کا مطلب ہے کہ موازنہ دو غیر مشابہہ حالات کا کیا گیا ہے۔ اسی طرح سے ایسی کمپنیاں جہاں لاگت اور منافع کی تعریفیں مختلف ہیں، فیصد منافع جات اور لاگتوں کا تقابل نہیں کیا جانا چاہئے۔ موازنے سے اہم نتائج اخذ کرنے سے پہلے یہ معلوم کرنا اشد ضروری ہے کہ آیا تجزیہ طلب مواد قابل موازنہ ہے کہ نہیں۔

(4) چھوٹے مطلق اعداد پر مبنی حسابات Calculations Based on Small Absolute Numbers :اگر مدات کی سائز چھوٹی ہے، فیصد گمراہ کن نتائج پیش کر سکتے ہیں۔ فرض کیجئے کہ کسی مدرسہ سے صرف پانچ طلبہ نے ایس ایس سی کا امتحان دیا اور پانچوں کامیاب ہو گئے۔ تب نتیجہ 100% ظاہر کیا جائے گا۔ اس مثال میں اساس اور قابل تقابل قدر دونوں چھوٹے اعداد ہیں۔ اس قسم کا بیان

غلط تاثر پیش کرتا ہے۔ اس لئے اگر مدات کی ضخامت (magnitude) چھوٹی ہے تو فیصدوں کا استعمال کرنا چاہیئے۔ اگر مدات کی جسامت (magnitude) بہت چھوٹی ہو ایسی صورتحال پیش آسکتی ہے کہ جہاں پر اساس بہت چھوٹی ہے اور اس سے تقابل کی قدر بہت بڑی ہے۔ ایسی صورت میں ایک بہت اونچے فیصد کا حصول ممکن ہے جس سے موازنہ آسان نہیں ہو سکتا۔ مثال کے طور پر فرض کرو کہ کسی جنس کی قیمت فی اکائی 10 روپے ہے۔ ایک مدت کے دوران اس قیمت میں 400 روپیوں کا اضافہ ہوا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ اخذ ہوتا ہے کہ قیمتیں 4,000% اضافہ ہوئی ہیں۔ اس صورت میں تقابل آسان ہونے کے بجائے مشکل ہو جاتا ہے۔ یہ بیان کہ پینے کے پانی میں جراثیم، آبادی کے 0.0002% کو بیمار کر سکتے ہیں۔ بعید از حقیقت اور غیر واضح بیان ہے۔ اس کے برعکس اگر یہ کہا جائے کہ 500,000 اشخاص میں تقریباً ایک شخص بیمار ہو سکتا ہے تو یہ ایک واضح بیان ہوگا۔ چنانچہ اگر اساس، شمار کنندہ سے بہت بڑی ہو یا شمار کنندہ اساس سے نسبتاً چھوٹا ہو تو اظہار حقیقت نہایت واضح ہوگا جس کے لئے اصلی اعداد کو نسبتوں یا فیصدوں میں ظاہر کرنے کی ضرورت نہیں۔

(5) حسابی غلطیاں **Arithmetic Mistakes** : اعشاریہ کے نقطے غلط مقام پر لگانے سے غلط تاویل کے امکانات بہت زیادہ ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر اس بیان کو لیجئے "سال گذشتہ کے بمقابل سال رواں کے دوران ٹیکس میں 14% کا اضافہ ہوا"۔ اعشاریہ کا نقطہ غلط مقام پر لگانے سے اوپر کا بیان اس طرح پڑھا جائے گا " ٹیکس میں 0.14 اضافہ ہوا"۔ یہ بیان اوپر کے بیان سے بالکل مختلف اور گمراہ کن مفہوم کا حامل ہے۔ دو شہروں A اور B کی آبادی کی نسبت 1 : 8 ظاہر کی گئی جبکہ دونوں کی آبادی بالترتیب 8 لاکھ اور 1.5 لاکھ ہے۔ درحقیقت صحیح نسبت ہے 1 : 5.3 اس طرح سے نسبتوں میں حسابی غلطیاں بھی غلط تصویر پیش کر سکتی ہیں۔

(6) ناموزوں اوسط نکالنا **Improper Averaging** : فیصدوں کا اوسط نکالنا ایک بحث طلب مسئلہ ہے کیونکہ کئی صورتوں میں یہ اوسط غلط نکالا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر بولٹ تیار کرنے والی ایک فیکٹری کو لیجئے جہاں پر تین مشینیں A ' B اور C ہیں جو بولٹ تیار کرتی ہیں۔ ان مشینوں کے تیار کردہ کچھ بولٹ عیب دار ہیں۔ A ' B اور C میں تیار کردہ عیب دار بولٹوں کی شرح بالترتیب 3% ' 2% اور 4% ہے۔ ان تینوں فیصدوں کا سادہ اوسط 3% ہے جو شرح عیب کو پیش کرتا ہے یعنی 3 ÷ (4 + 2 + 3)۔ یہ حقیقی شرح عیب نہیں ہو سکتی کیونکہ ہر مشین سے تیار کئے جانے والے بولٹوں کی تعداد کا یکساں ہونا ضروری نہیں۔ موزوں اوسط جاننے کے لئے یہ معلوم کرنا ضروری ہے کہ ہر مشین کتنی تعداد میں بولٹ تیار کرتی ہے۔ فرض کرو کہ مشین A 300 بولٹ، مشین B 100 بولٹ اور مشین C 600 بولٹ تیار کرتی ہے۔ اب ناقص بولٹوں کا اوسط درج ذیل طریقے سے معلوم کیا جا سکتا ہے :۔

مشین	عیب دار بولٹ (فیصد)	تیار کردہ بولٹوں کی تعداد	عیب دار بولٹوں کی حقیقی تعداد (کالم 2 x 3 ÷ 100)
(1)	(2)	(3)	(4)
A	3	300	9
B	2	100	2
C	4	600	24
جملہ		1000	35

عیب دار بولٹوں کی اوسط شرح = (35/1000) x 100 = 3.5% اس طرح سے 3.5% بولٹ عیب دار ہیں۔ یہ اس سادہ اوسط سے واضح طور پر مختلف ہے جو سابق میں محسوب کیا گیا ہے۔ اوپر کی گئی بحث سے یہ صاف ظاہر ہے کہ نسبت اور فیصد کو نہایت احتیاط کے ساتھ محسوب کیا جانا چاہیئے تاکہ بامعنی، نتائج برآمد کئے جا سکیں۔ جب بھی ممکن ہو نسبتوں کے ساتھ ساتھ اصلی مواد بھی دیا جائے تاکہ قاری کے لئے ان کے مابین موجود ربط کی تصدیق اور خطاؤں کی نشاندہی ممکن ہو جائے اور وہ اس قابل ہو جائے کہ خود اپنی تاویلات پیش کر سکے۔

اپنی معلومات کی جانچ B

(1) نسبتوں کو محسوب کرنے کے لئے نسب نما کے انتخاب کرنے میں رہنما خطوط کی فہرست دیجئے۔

.....

.....

.....

.....

(2) ان وجوہات کو قلم بند کیجئے جو عموماً شماریاتی مشتقات کی غلط تاویل کا باعث ہوتے ہیں۔

.....

.....

.....

.....

(3) لکھیے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) زمانی موازنوں میں عموماً سابقہ واقعہ کو بطور اساس لیا جاتا ہے۔

(ii) کسی نسبت کے محسوب کرنے میں اساس کے طور پر مستعمل عدد تقابل طلب اعداد کی سائز سے کوئی تعلق نہیں رکھتا۔

(iii) دو (2) (فیصدی اعداد) کے تقابل کیلئے نسب نما کی حقیقی قدر کا جاننا ضروری ہے جن پر ان دونوں کا انحصار ہے۔

(iv) آپ اس وقت تک پختہ نتائج اخذ نہیں کر سکتے جب تک کہ مواد کے تجزیہ کا طریقہ مقصد سے موزونیت نہ رکھتا ہو۔

(v) نامعلوم مقداروں کے تخمینے میں شماریاتی مشتقات کو استعمال نہیں کیا جاسکتا۔

(vi) تقسیمی نسبت کل مجموعے کے ایک حصے کا دوسرے حصے سے تقابل کرتی ہے۔

(vii) زمانی نسبتوں کو معلوم کرنے کے لئے قائم اساس کا استعمال کرنا ضروری نہیں ہے۔

(viii) مخلوط نسبتوں (Hybrid ratios) کو عام طور پر فیصد شکل میں لکھا جاتا ہے۔

4.8 لوگارتم Logarithms

نسبتوں اور فیصدوں کی طرح لوگارتم بھی اضافی مطالعہ میں ممد و معاون ہیں۔ لوگارتم خصوصاً ریاضیائی حسابات میں بہت کار آمد اور مفید ہیں۔ ضرب، تقسیم، جذر نکالنے اور بڑے اعداد کی قوت معلوم کرنے کے لئے لوگارتم سے کافی مدد لی جاسکتی ہے۔

4.8.1 لوگارتم کے معنی The Meaning of Logarithms

دو اعداد 4 اور 16 پر غور کیجئے۔ یہ اعداد مساوات $16 = 4^2$ کے ذریعہ سے ایک دوسرے سے مربوط ہو سکتے ہیں۔ قوت نما (Exponent) 2 اساس 4 پر 16 کا لوگارتم ہے اور اسے بطور $\log_4 16 = 2$ لکھا جاتا ہے۔ اس مثال سے واضح ہوتا ہے کہ لوگارتم وہ قوت ہے جس پر کسی

اساس (4) کو ایک خاص عدد (16) حاصل کرنے کے لئے اٹھایا جاتا ہے۔ عام طور پر اگر $y = b^t$، تب $t = \log_b y$ جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ log of y ($\log_b y$) وہ قوت ہے جس پر اساس b کو اٹھانے سے قدر y حاصل ہوتی ہے۔ لوگارتم کے مندرجہ ذیل خواص کو ذہن نشیں کر لینا چاہیئے۔

(1) منفی عدد اور صفر لوگارتم کا حامل نہیں ہو سکتا۔

(2) ایک غیر صفری متناہی نمبر اساس کا لوگارتم صفر ہے کیونکہ $1 = 3^0$ لہذا $\log_3 1 = 0$۔

(3) کسی عدد کا لوگارتم جبکہ وہی عدد بطور اساس لیا جائے تو اکائی ہوتا ہے۔

$$(\log^3 3 = 1 \text{ as } 3^1 = 3)$$

لوگارتم کی اساس کو کسی خاص عدد پر مختص کرنا ضروری نہیں لیکن عملی طور پر اسی میں دو اعداد کو بطور اساس لیا جاتا ہے یعنی عدد '10' اور عدد 'e' جب اساس **10** ہوتی ہے تو لوگارتم کو عام لوگارتم **Common Logarithms** کہتے ہیں جس کا علامتی اظہار $\log_{10}$ ہے اس کو یا صرف log سے تعبیر کرتے ہیں۔ "نے پیر مستقل" (Napier's constant) 'e' (جس کی قیمت تقریباً 2.71828 ہے)، بطور اساس، لوگارتم کو طبعی لوگارتم **(Natural Logarithms)** سے موسوم کرتے ہیں اور **'ln'** سے تعبیر کرتے ہیں۔

تجرباتی کام میں، طبعی لوگارتم، عام لوگارتم سے زیادہ مفید ثابت ہوتے ہیں۔ اس یونٹ میں حسابی مقاصد کے لئے لوگارتم کے استعمال پر زور دیا گیا ہے۔ ریاضیاتی حسابات میں اکثر عام لوگارتم کا زیادہ استعمال ہوتا ہے۔ اس لئے اب ہم بحث کریں گے کہ کس طرح ریاضیاتی حسابات میں ان کو استعمال کیا جاتا ہے۔

$\log_{10} 1000 = 3$ (because $10^3 = 1000$)

$\log_{10} 100 = 2$ (because $10^2 = 100$)

$\log_{10} 10 = 1$ (because $10^1 = 10$)

$\log_{10} 1 = 0$ (because $10^0 = 1$)

$\log_{10} 0.1 = -1$ (because $10^{-1} = 0.1$)

$\log_{10} 0.01 = -2$ (because $10^{-2} = 0.01$)

مندرجہ بالا سے ظاہر ہے کہ 10 تا 100 کے درمیان کسی عدد کا عام لوگارتم 1 اور 2 کے درمیان رہنا چاہیئے اور 1 تا 10 کے درمیان کسی عدد کا لوگارتم ایک مثبت کسر ہونی چاہیئے۔ فرض کیجئے کہ کوئی عدد N سے زیادہ اور 100 سے کم ہے یعنی اس کے دو ہندسے ہیں تو logN، 1 اور 2 کے درمیان ہوگا یعنی a + 1، جہاں پر '1' صحیح عددی جز اور a کسری جز ہوگا۔ کسری جز کو اعشاری نقطے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر N '100' سے زیادہ اور 1000 سے کم ہو تو N کا لوگارتم b + 2 ہوگا جہاں پر 2 صحیح عددی جز ہے اور b کسری جز ہوگا۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ سہ ہندسی عدد کے لوگارتم کا صحیح عددی جز 2 ہے۔ اس بحث کو جاری رکھتے ہوئے جب کوئی عدد **'1'** سے زیادہ ہے اور اس کے صحیح عددی جز میں n ہندسے شامل ہوں تو اس کے لوگارتم میں صحیح عددی جز **n - 1** ہوگا۔

اب فرض کیجیے کوئی عدد N اپنی قدر 1 اور 0.1 کے درمیان رکھتا ہے مثلاً 0.8 تو اس کا لوگارتم 0 اور 1- کے درمیان ہوگا یعنی اس کو +1-c کے طور پر لیا جاسکتا ہے جہاں پر c ایک مثبت کسر ہے۔ اسی طرح سے اگر عدد N '0.1' اور 0.01 کے درمیان ہے مثلاً 0.03 تو اس کا لوگارتم 1- اور 2- کے درمیان ہوگا یعنی اس کو 2 + d کے طور پر لے سکتے ہیں، جہاں پر d ایک مثبت کسر ہے۔ بحث آگے جاری رکھنے پر اگر عدد N 0.01 اور 0.001 کے درمیان ہو جیسے .004 تو اس کا لوگارتم 2- اور 3- کے درمیان ہوگا یعنی اس کو 3 + f سے تعبیر کیا جاسکتا ہے جہاں پر f ایک مثبت کسر ہے۔ لہذا ہمیں یہ معلوم ہوا کہ لوگارتم کا صحیح عددی جز منفی ہوتا ہے اور مقام اعشاریہ کے بعد اور N نمبر کے ملحوظ ہندسہ سے قبل صفروں کی تعداد سے ایک نمبر زائد رہتا ہے۔

سلسلہ بحث جاری رکھتے ہوئے، اگر کوئی عدد 1 سے کم ہے (کئی صفر) اور اعشاری نقطے کے بعد اور پہلے ملحوظ عدد سے قبل x صفرات رکھتا ہو تو لوکارتم کا صحیح عددی جز منفی ہوگا اور صفروں کی تعداد سے ایک زیادہ ہوگا۔ یعنی (x + 1) -

کسی عام لوکارتم کے صحیح عددی جز کو ممیز (characteristic) اور کسری جز کو مان ٹسا (Mantissa) کہتے ہیں۔ غور کیجئے کہ ممیز، صفر، مثبت یا منفی ہو سکتا ہے لیکن مان ٹسا ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

4.8.2 کسی عدد کی لوکارتمی قدر معلوم کرنا Finding the Log Value of a Number

کسی عدد کی لاگ قدر معلوم کرنے کا طریقہ تین اہم مرحلوں پر مشتمل ہے۔ یہ ہیں (1) ممیز معلوم کرنا (2) مان ٹسا معلوم کرنا (3) معکوس لوکارتم معلوم کرنا۔ اب ہم ان تین مراحل پر تفصیل سے بحث کریں گے۔

(1) **ممیز معلوم کرنا (Finding Charecteristic)** : پہلے مرحلے میں، ہم کو ممیز معلوم کرنا ہوگا۔ جیسے کہ پہلے بحث کی گئی تھی، اگر عدد میں ہندسے ایک سے زیادہ ہوں، ممیز، اعشاری نقطے کے بائیں جانب واقع ہندسوں کی تعداد سے ایک کم ہوگا۔ مثال کے طور پر 415.42 کا ممیز ہوگا 2، کیونکہ اعشاری نقطے کے بائیں جانب ہندسوں کی تعداد 3 ہے۔ اسی طرح سے 17.23 کا ممیز '1' ہے اور 7.23 کا '0' ہے۔

اگر اعداد ایک سے کم ہوں تو، ممیز، اعشاری نقطے کے بعد اور ملحوظ ہندسے سے پہلے صفروں کی تعداد سے ایک زیادہ ہوگا۔ مثال کے طور پر 0.98 کا ممیز 1- ہے۔ 0.098 کا 2- اور 0.00908 کا 3- ہے وغیرہ۔

(2) **مان ٹسا معلوم کرنا (Finding Mantissa)** : کسی عدد کا مان ٹسا معلوم کرنے کے لیے آپ کو لوکارتمی جدول استعمال کرنا پڑے گا۔ لوکارتمی جدول اس اکائی کے آخر میں پیش کیے گیے ہیں مثلاً آپ کو عدد 3451 کا مان ٹسا معلوم کرنا ہے۔ پہلے آپ کو لوکارتمی جدول میں 34 کے متناظر قطار کو دیے گیے عدد کے پہلے دو ہندسے) اس کے بعد دیے گیے عدد کے تیسرے ہندسہ 5 کے متناظر کالم پر نظر ڈالنے سے مان ٹسا 5378 حاصل ہوگا جس میں دیے گیے ہندسہ کے چوتھے عدد 1 کا اوسط فرق Mean difference کے تحت کالم میں دی گئی قدر 1 کو 5378 میں جمع کرنے سے عدد 5379 حاصل ہوگا۔ آپ پہلے ہی سے جانتے ہیں کہ اس عدد یعنی 3451 کا ممیز 3 ہے۔ اس لیے لاگ قدر ہوگی 3.5379 = log 3451 ∴ -

نوٹ کیجئے کہ مان ٹسا ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔ یہ اعشاریہ نقطے کے مقام سے متاثر نہیں ہوتا۔ اس کا مطلب ہے کہ '.00245 '.000245 '245 '24.5 '0.245 '0245- کا مان ٹسا ایک ہی ہوگا۔ جدول دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ 245 کا مان ٹسا 0.3892 ہے۔ کسی عدد کا ممیز معلوم کرنے کے لئے، اس عدد میں شامل ہندسوں کو دیکھنا پڑتا ہے اور مان ٹسا حاصل کرنے کے لئے پہلے ملحوظ ہندسوں کو استعمال کر کے لوکارتم جدول سے استفادہ حاصل کرنا پڑتا ہے۔ مندرجہ ذیل جدول کا بغور مشاہدہ کیجئے کہ کس طرح مان ٹسا کی قدر میں تبدیلی کے بغیر، ممیز میں تبدیلی واقع ہوتی ہے۔

عدد	لاگ قدر
2450.0	3.3892
245.0	2.3892
24.5	1.3892
2.45	0.3892
0.245	1.3892
0.0245	2.3892
0.00245	3.3892

نوٹ : کچھ لاگ قدروں کے لئے، آپ کو ممیز پر بار (bar) نظر آئے گا مثلاً $\bar{1}$ ۔ ممیز پر بار رکھنے کا مطلب ہوگا کہ وہ حصہ جس پر بار ہے منفی ہے اور مان ٹسا (اعشاری حصہ) مثبت ہے۔

(3) معکوس لوکارتم معلوم کرنا **(Finding Antilogarithms)** : جیسا کہ آپ جانتے ہیں لوکارتم جدول سے کسی عدد کے لوکارتم میں مان ٹسا کی قدر معلوم ہوتی ہے۔ جبکہ معکوس لاگ جدول میں اس عدد کی قدر دی جاتی ہے جس کی لاگ قدر لوکارتمی معلوم ہے۔

اوپر بیان کی گئی مثال میں لاگ کی قدر 3.3892 معلوم ہے اب ہمیں اس بات سے دلچسپی ہے کہ وہ متعلقہ حقیقی عدد معلوم کریں کہ جس کی لاگ قدر 3.3892 یعنی وہ نمبر 2450 ہے۔ یہ بھی کہا جاسکتا ہے 3.3892 کی معکوس لاگ قدر 2450 ہے۔ اب ہم معکوس لاگ جدول سے معکوس لاگ قدر معلوم کرنے کا طریقہ سیکھیں گے۔

3.3892 کا معکوس لاگ معلوم کرنے کے لئے پہلے صرف مان ٹسا جز یعنی .3892 پر غور کیا جائے۔ معکوس لاگ جدول میں .38 سے متعلقہ قطاریں اور ہندسہ 9 کے کالم میں دیکھنے پر اس کی قدر 2449 حاصل ہوتی ہے پھر اوسط فرق کالم میں اسی قطار میں 2 پر دیکھنے سے قدر 1 حاصل ہوگی۔ اب اس 1 کو 2449 میں جمع کرنے سے قدر 2450 حاصل ہوگی جو کہ 3.3892 لاگ قدر کی حقیقی قدر ہے۔ لہذا قبل ازیں بحث شدہ قاعدوں کے مطابق، معکوس لاگ عدد میں ممیز میں ایک کا اضافہ کرکے چار ہندسوں کے بعد نقطہ اعشاریہ لگایا جاتا ہے۔ لہذا اعشاری نقطے کو چار ہندسوں کے بعد تعین کیجئے یعنی اصل قدر 2450.0 ہوگی۔ 2.3892 کے متعلقہ عدد (Corresponding number) معلوم کرنے میں جدول کے ذریعہ حاصل شدہ معکوس لاگ قدر میں ہندسے وہی ہوں گے جو سابق میں حاصل کئے گئے ہیں۔ صرف اعشاری نقطہ کا مقام تبدیل ہوگا جس کا ممیز کے ذریعہ تعین کیا جائے گا۔ اس صورت میں ممیز 2 ہے اس لیے اس سے پہلے بیان کردہ قواعد کی رو سے معکوس لاگ '1' سے کم ہونا چاہیے اور اعشاری نقطے کے بعد اور پہلے ملحوظ ہندسے سے قبل ایک صفر ہونا چاہیئے۔ اس طرح سے $\bar{2}.3892$ کا معکوس لاگ 0.0245 ہوگا۔

4.8.3 لوکارتم کے ذریعہ تحسیب (Computation by Logarithms)

ہم نے بحث کی کہ کس طرح لاگ اور معکوس لاگ قدریں حاصل کی جاسکتی ہیں۔ اب ہم مطالعہ کریں گے کہ کس طرح مختلف قسم کے حسابات میں لوکارتم کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔ لوکارتم عموماً ضرب، تقسیم اور کسی عدد کی قوت، جذر معلوم کرنے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں۔ حسابات، قواعد کے ایک سیٹ پر مبنی ہوتے ہیں۔ اب ہم مطالعہ کریں گے کہ یہ کیسے کیا جاتا ہے۔

(1) اعداد کو ضرب دینے کے لئے **(To Multiply Numbers)** : جن، اعداد کو ضرب دینا مطلوب ہے، ان کا لوکارتم معلوم کیجئے انہیں جمع کیجئے اور حاصل جمع کا معکوس لوکارتم معلوم کیجئے۔ اس طرح سے

$$a \times b = \text{Antilog}(\log a + \log b)$$

یہ اس قاعدہ پر مبنی ہے کہ $\log(a \times b) = \log a + \log b$

تمثیل 1

84.5 کو 32.8 سے ضرب دیجیے :۔

مرحلہ I $\log 84.5$ اور $\log 32.8$ معلوم کیجئے۔

$\log 84.5 = 1.9269$

$\log 32.8 = 1.5159$

مرحلہ II دونوں لاگ قدروں کو جمع کیجئے۔

$\log 84.5 + \log 32.8 = 1.9269 + 1.5159 = 3.4428$

مرحلہ III 3.4428 کا معکوس لوکارتم معلوم کیجیے۔

Antilog 3.4428 = 2772.0 (معکوس لاگ)

∴ اس لیے 84.5 x 32.8 = 2772

نوٹ : اگر 84.5 کو 32.8 سے راست ضرب دیا جائے تو حاصل ہوگا 2771.6 لوکارتم جدول صرف 4 ملحوظ ہندسوں کی حد تک اعداد پیش کرتے ہیں۔اس لئے لوکارتم سے حاصل کردہ نتیجہ (2771.6) کو 4 ملحوظ ہندسوں تک تبدیل کرنا ہوگا یعنی 2772 ہوگا۔

تمثیل 2

59.3 کو 0.0892 سے ضرب دیجئے۔

تمثیل 1 کے مراحل پر عمل کرتے ہوئے

log 59.3 = 1.7731

log 0.0892 = 2.9504

لاگ قدروں کو جمع کرنے سے، قدر ہوگی 0.7235

غور کیجئے کہ مان ٹسا کو جمع کرنے سے آگے بڑھنے والی قدر '1' ہے لہذا ممیز (characterstic) جمع کرتے وقت '2' مثبت اور '2' منفی ایک دوسرے کو رد کرتے ہیں۔اس لئے حاصل جمع کا ممیز '0' ہوگا۔ ممیزوں کو جمع کرتے وقت ممیزوں کی علامات کا لحاظ رکھا جانا چاہیئے۔

اب Antilog 0.7235 = 5.290 (معکوس لاگ)

اس لئے 59.3 x 0.0892 = 5.0892 (4 نمایاں ہندسوں تک)

(2) تقسیم کرنے کے لیے **(To Divide)** : کسی عدد کو دوسرے عدد سے تقسیم کرنے کے لئے، شمار کنندے اور نسب نما کا لوکارتم معلوم کیجئے۔ تب نسب نما کے لوکارتم کو شمار کنندے کے لوکارتم میں سے تفریق کیجئے۔ حاصل تفریق کا معکوس لاگ معلوم کیجئے جو کہ مطلوبہ عدد ہوگا۔

a/b = antilog (log a - log b)

یہ ذیل کے قاعدے پر مبنی ہے log a/b = log a - log b

تمثیل 3

1465.2 کو 18.6 سے تقسیم کیجئے۔

مرحلہ I 1465.2 اور 18.6 کے لوکارتم معلوم کیجئے۔

log 1465.2 = 3.1659

log 18.6 = 1.2695

مرحلہ II log 1465.2 میں سے log 18.6 کو تفریق کیجئے۔

یعنی 3.1659 - 1.2695 = 1.8965

مرحلہ III

1.8964 کا معکوس لوکارتم معلوم کیجئے۔

antilog 1.8964 = 78.77

∴ 1465.4 ÷ 18.6 = 78.77

تمثیل 4

0.009 کو 0.045 سے تقسیم کیجئے۔

تمثیل 3 کے مراحل کے مطابق

$\log (0.009) = \bar{3}.9542$

$\log (0.045) = \bar{2}.6532$

$\bar{3}.9542 - \bar{2}.6532 = \bar{1}.301$

Antilog $\bar{1}.301 = 0.2000$

$\therefore 0.009 \div 0.045 = 0.2000$

(3) کسی عدد کو معلوم قوت تک اٹھانے کے لیے **(To Raise a Number to a Power)** : کسی عدد کو مطلوبہ قوت تک اٹھانے کے لئے اس عدد کے لاگ کو قوت نما سے ضرب دے کر اس کا معکوس لاگ معلوم کیا جائے یعنی

$a^n = \text{Antilog } (n \times \log a)$

یہ ذیل کے قاعدے پر مبنی ہے : $\log a^n = n \log a$

تمثیل 5

$(0.4)^3$ معلوم کیجئے۔

مرحلہ I اساس یعنی 0.4 کا لوکارتم معلوم کیجئے۔

$\log 0.4 = \bar{1}.6021$

مرحلہ II لاگ قدر کو مطلوبہ قدر سے ضرب دیجئے۔

یعنی $\bar{1}.6021 \times 3 = \bar{2}.8063$

نوٹ کیجئے کہ مان ٹسا کو 3 سے ضرب دینے پر آگے بڑھنے والا عدد '1' ہے جو مثبت ہے۔ مینز کو 3 سے ضرب دینے پر منفی 3 حاصل ہوتا ہے لہذا $-2 = 1 + -3$ یا 2۔

مرحلہ III

نتیجہ کا معکوس لوکارتم معلوم کرو یعنی $\bar{2}.8063$

Antilog $2.8063 = 0.0640$

$\therefore (0.4)3 = .0640$

(4) کسی عدد کا جذر معلوم کرنا **(To Find the Root of a Number)** : کسی عدد کا جذر معلوم کرنے کے لئے، اس عدد کے لوکارتم کو جذر کے اشاریہ سے تقسیم کیجئے اور معکوس لاگ معلوم کیجئے یعنی:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} = \text{antilog}\left(\frac{\log a}{n}\right)$$

یہ اسی قاعدے پر مبنی ہے جو (iii) کے تحت ہے جس کو بطور ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\log a^{1/n} = \frac{1}{n} \times \log a$$

تمثیل 6

$\sqrt[4]{85.6}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

مرحلہ I

85.6 کی لاگ قدر معلوم کیجئے۔

یعنی log 85.6 = 1.9325

مرحلہ II

85.6 کی لاگ قدر کو 4 سے تقسیم کیجئے کیونکہ چوتھا جذر مطلوب ہے۔

1.9325 ÷ 4 = 4831

مرحلہ III

0.4831 کا معکوس لاگ معلوم کیجئے۔

antilog 0.4831 = 3.042

$\therefore \sqrt[4]{85.6} = 3.042$

تمثیل 7

$\sqrt[6]{0.00856}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

مندرجہ بالا تمثیل کے مراحل کا اعادہ کرکے

log 0.00856 = $\bar{3}.9325$

$\bar{3}.9325$ کو 6 سے تقسیم کرنے کے لئے آپ $\bar{3}.9325$ کو بطور $3.9325 + 6 -$ لکھیں اس لئے کہ $\bar{3}.9325$ میں ممیز 3- ، چونکہ منفی ہے اس سے تقسیم کرنے پر صحیح عدد نہیں دیتا بلکہ 0.5 - دیتا ہے۔ اگر حاصل تقسیم کو کسی عدد کا لوکارتم ہونا ہے تو صحیح عددی جز منفی ہو سکتا ہے لیکن عشری جز مثبت ہونا چاہیئے۔

اسی لئے

$$\therefore \frac{\bar{3}.9325}{6} = \frac{\bar{6} + 3.9325}{6} = \bar{1}.6554$$

اب Antilog 1.655 = 0.4523

لہذا $\therefore \sqrt[6]{0.00856} = 0.4523$

تمثیل 8

$$\sqrt{\frac{1.764 \times 89.727}{0.00406 \times 5684}}$$

مختصر کیجئے

فرض کیجئے آخری جواب x ہے۔

$$\therefore X1 = \sqrt{\frac{1.764 \times 89.727}{0.00406 \times 5684}}$$

دونوں جانب کا لوکارتم لینے سے

$$\log X = \log\left(\frac{1.764\times 89.727}{0.00406\times 5684}\right)^{1/2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{1.764\times 89.727}{0.00406\times 6584} \text{ (By rule } \log a^n = n\log a\text{)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\log(\log 1.764\times 89.727 - \log 0.00406\times 6584)$$

$$\text{(By rule } \log\frac{a}{b} = \log a - \log b\text{)}$$

$$= \tfrac{1}{2}[\log 1.764 + \log 89.727 - (\log 0.0006 + \log 6584)]$$

$$\text{(By rule } \log a\times b = \log a + \log b\text{)}$$

$$= \tfrac{1}{2}[0.3465 + 1.9529 - (\overline{3}.6085 + 3.8162)]$$

نوٹ: لوکارتمی جدول کو صرف 4 ملحوظ ہندسوں تک پڑھا جاسکتا ہے۔ لیکن 89.727 میں 5 ہندسے ہیں۔ اس لئے پہلے اس کو 4 ملحوظ ہندسوں تک تبدیل کیا جاتا ہے یعنی 8973 اور بعد ازاں جدول کو دیکھا جاتا ہے۔ عبارت بالا کو سادہ کرنے سے

$\text{Logx} = \tfrac{1}{2}(0.7747) = 0.3874$ (صرف 4 ملحوظ ہندسے لینے پر)

$$\therefore X = \text{Antilog } 0.3874$$
$$= 2.440$$

لہذا دی گئی عبارت کی قدر ہوگی 2.440

تمثیل 9

$\tfrac{1}{2}^{10}$ کی قیمت معلوم کرو۔

فرض کیجئے $X = \tfrac{1}{2}^{10}$

تمثیل 8 کے خطوط پر بڑھتے ہوئے

$$\text{Log}X = \log\tfrac{1}{2}^{10}$$
$$= \log 1 - \log 2^{10}$$
$$= \log 1 - 10\log 2$$
$$= 0 - 10(0.3010)$$
$$= -3.010$$

نوٹ : **2** کامان ٹسا معلوم کرنے کے لئے لوکارتم جدول سے استفادہ حاصل کرتے وقت اس کو ہم بطور 2.00 لیں گے یا 200 کے لئے دیکھے جدول۔

2 : ہمیں حاصل ہے۔ $\log x = -3.010$ ۔اس کا مطلب ہے صحیح عددی جز 3 اور اعشاری جز 010 دونوں منفی ہیں۔ اگر 3.010- کو کسی عدد کا لوکارتم ہونا ہے تو اس کے اعشاری جز (مان ٹسا) کو مثبت ہونا پڑے گا۔ لہذا ہم 3.010- کو '1' جمع و تفریق کر کے دوبارہ اس طرح لکھتے ہیں کہ اعشاری جز مثبت ہو جاتا ہے۔

$$\text{Log}X = -3.010$$
$$= -3.010 + 1 - 1$$
$$= -3 - .010 + 1 - 1$$
$$= -3 - 1 + 1 - .010$$
$$= -4 + .990$$
$$= \bar{4}.990$$
$$\therefore\ x = \text{antilog } 4.990$$
$$= 0.0009772$$

معکوس لاگ کی جدولیں دیکھتے وقت ، ہم نے مان لیا 0.900 کے لئے دیکھا جس میں صرف 3 ملحوظ ہندسے ہیں۔لہذا، حاصل شدہ نتیجے میں 3 ملحوظ ہندسوں کی حد تک صحت ہونی چاہیئے۔

لہذا $1/2^{10} = 0.0009772$

لوکارتم کے دیگر استعمال (Others Uses of Logarithms)

لوکارتم شماریاتی حسابوں میں نہایت کار آمد ہیں۔لوکارتم متناسب تغیرات کے مطالعہ میں استعمال کئے جاتے ہیں۔ مثلاً 10 تا 100 کے اضافی تغیر کا درجہ وہی ہوتا ہے جو 100 تا 1000 کا ہے۔دونوں صورتوں میں اعداد دس گنا ہو جاتے ہیں۔اس کو لوکارتم کے ذریعے آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے۔ 10 کا لوکارتم (1) اور 100 کا لوکارتم (2) ہے۔اس لئے لوکارتم میں تغیر '1' سے '2' ہے۔اسی طرح سے 100 سے 1000 کا تغیر ان کے لوکارتم میں 2 سے 3 کے تغیر کا باعث بنتے ہیں۔ '1' سے '2' تک اضافہ، '2' سے '3' تک کے اضافے کے مساوی ہے۔ لہذا جب لوکارتم میں تغیر مساوی ہوتا ہے تو اس سے پتہ چلتا ہے کہ اصلی اعداد میں اضافی تغیر یکساں ہے۔لوکارتم کے تصورات ترسیم میں بھی استعمال ہوتے ہیں۔اس کے ذریعے بالیدگی (growth) کی شرح ، مختلف قدر یا غیر مشابہہ اکائیاں رکھنے والے سلسلوں کا موازنہ ایک ہی سلسلے کے اندر اتار چڑھاؤ کا تقابل، نسبتوں کا جانچنا، فیصد تبدیلیاں وغیرہ بتلائے جاتے ہیں۔ ترسیمی اظہار میں لوکارتم کے استعمال سے متعلق تفصیلات اس نصاب میں شامل نہیں ہیں۔

اپنی معلومات کی جانچ C

(1) مندرجہ ذیل کو جمع کیجئے۔

(i) 2.6213 اور $\bar{1}.8346$

(ii) 2.9431 اور $\bar{3}.1680$

.....

.....

(2) مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجئے۔

(i) $\bar{2}.2163 - 3.8304$

(ii) $\bar{3}.1694 - 2.4560$

(iii) $0.3483 - \bar{2}.8631$

(iv) $0.1294 - \bar{1}.0643$

(3) مندرجہ ذیل کو مختصر کیجئے۔ اپنے نتیجے کو اس شکل میں لکھیے کہ اس کو کسی عدد کے لوکار تم کے بطور لیا جا سکے۔

(i) $8 \times \overline{1.4631}$

(ii) $\overline{2.1625}/3$

(iii) -8.864

(iv) $0 - 2.4831$

(4) لوکار تم استعمال کر کے مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجئے۔

(i) 3.45×138.034

(ii) 0.083×0.0048

(iii) $183.45/3.56$

(iv) $0.0136/1.26$

(v) $(3.14)5$

(5) لوکارتم کے استعمال سے مندرجہ ذیل کی قیمت حاصل کیجئے۔

(i) $\frac{4.31 \times 68.453}{20.56 \times 9}$ (ii) $\frac{83}{564 \times 33.05}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4.9 Let Us Sum Up خلاصہ

بامقصد اور کار آمد نتائج حاصل کرنے کے لئے، جمع شدہ مواد کا شماریاتی مشتقات جیسے نسبتوں، فیصدوں، شرحوں وغیرہ کی شکل میں تجزیہ کرنا ضروری ہے۔ نسبت کوئی دو مقداروں کی قدر میں موجود ربط کو ظاہر کرتی ہے۔ عام طور پر اس کو A : B یا A/B سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر زمروں کی تعداد بڑھ جائے تو تناسب کا مشتق نہایت موزوں ہوتا ہے۔ تناسب وہ نسبت ہے جو کسی ایک زمرے اور تمام زمروں کے مجموعے کے درمیان پائی جاتی ہے۔ نسبتوں اور تناسبوں کو بہ طور فیصد بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔ دو مختلف قسم کے مواد (یعنی شمار کنندے میں ایک مواد اور نسب نما میں دوسرا مواد) کے درمیان نسبت کو شرح کہتے ہیں۔ کسی شرح کو عموماً فی 1,000 یا فی 100 وغیرہ کے بطور ظاہر کیا جاتا ہے۔ شرح کو فی اکائی کے بطور ظاہر کیا جاتا ہے تو اسے قدر ضربی (Coefficient) کہتے ہیں۔ ان مشتقات کو محسوب کرنے کا اصلی مقصد تقابل میں آسانی پیدا کرنا ہے۔ یہ شمار کنندہ یا نسب نما کے متعلق مواد کی نامعلوم مقداروں کے تخمینے میں بھی فائدہ مند ہے۔ نسبتوں کی کئی قسمیں ہیں یعنی تقسیمی نسبت، بین حصصی اور بین جماعتی نسبت، زمانی نسبت، مخلوط نسبت۔ نسبت زمانی کو دو طریقوں سے محسوب کیا جاسکتا ہے۔ (1) قائم اساس کے ذریعہ یا (2) متحرک اساس کے ذریعہ۔ مخلوط نسبت کو مواد کے مختلف زمروں کے متعلقہ حصوں کے درمیان محسوب کیا جاتا ہے۔ ان کو عموماً بطور فی اکائی بتلایا جاتا ہے نہ کہ فی صد۔ اس مفہوم میں ان کو بطور شرح بھی دیکھا جاسکتا ہے۔ ان نسبتوں کو محسوب کرنے میں، نسب نما یا اساس کو ہمیشہ ایک معیار کی حیثیت حاصل رہتی ہے۔ جس سے شمار کنندے کا تقابل کیا جاتا ہے۔ وقت کے تقابل میں سابقہ واقعہ کو بطور اساس لیا جاتا ہے۔ بطور اساس استعمال شدہ نسب نما اکائیوں کی تعداد کا تعین، عام رواج، سہولت اور تاثیر کے مطابق کیا جاتا ہے۔ یہ تعداد بہت بڑی ہونی چاہیئے تاکہ شمار کنندے کی قیمت ایسے صحیح عدد میں ظاہر ہوسکے جس کے ہندسے دو یا تین سے زیادہ نہ ہوں۔ بطور اساس (نسب نما) استعمال ہونے والا یہ عدد، اصلی مواد کے عدد سے بڑا نہیں ہونا چاہیئے۔ نسبتوں، فیصدوں وغیرہ کی غلط تاویل یا غلط استعمال کی عموماً درج ذیل وجوہات ہوسکتی ہیں۔ (1) اساس کے متعلق تذبذب الجھن (2) چھوٹی اساسوں کے سبب تخفیف۔ (3) غیر مشابہ صورتحال پر مبنی نسبتوں کا تقابل (4) تحسیب میں غلطیاں (5) چھوٹے مطلق اعداد پر مبنی حسابات (6) اوسط نکالنے کا ناموزوں طریقہ۔ شماریاتی مشتقات کا معلوم کرتے وقت اور نتائج اخذ کرنے کے دوران، ان مسائل کو دھیان میں رکھنا چاہیئے۔

ریاضیاتی حسابات میں لوکارتم بہت مددگار ہوتے ہیں۔ لوکارتم وہ قوت ہے جس پر "y" اساس کو ایک خاص عدد حاصل کرنے کے لئے اٹھایا جاتا ہے۔

اگر $y = b^t$ اور $[\log_b y = t$ اساس 10 پر لوکارتم عام لوکارتم کہلاتے ہیں اور یہ حسابات میں استعمال کئے جاتے ہیں۔ لوکارتم میں صحیح عددی جز کو ممیز اور اعشاری جز کو مان ٹسا کہتے ہیں۔ ممیز مثبت ہو سکتا ہے یا منفی اور اعشاری نقطے کے بائیں جانب واقع ہندسوں کی تعداد کو دیکھ کر معلوم کیا جاسکتا ہے یا عدد '1' سے کم ہونے کی صورت میں اعشاری نقطے کے بعد اور پہلے ملحوظ ہندسے سے قبل موجود صفروں کی تعداد کا شمار کر کے تعین کیا جاتا ہے۔ مان ٹسا ہمیشہ مثبت ہوتا ہے اور لاگ جدول کی مدد سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ عدد 't' کا معکوس لوکارتم 10^t ہوتا ہے۔ اس کو معکوس لوکارتم کے جدول سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ لوکارتم کے ذریعہ حسابات مندرجہ ذیل تین قاعدوں کی مدد سے کئے جاتے ہیں۔

$$\log a \times b = \log a + \log b \quad (1)$$

$$\log a./b = \log a - \log b \quad (2)$$

$$\log a^n = n \times \log a \quad (3)$$

4.10 کلیدی الفاظ Key Words

لوکارتم کا ممیز Characteristic of Logarithm: یہ عام لوکارتم کا صحیح عددی جز ہے۔

عام لوکارتم Common Logarithm: جب لوکارتم کی اساس 10 ہو تو اسے عام لوکارتم کہتے ہیں۔

تقسیمی نسبت Distributive Ratio : جز کی کل سے نسبت جس میں جز شامل ہے۔ یہ تناسب سے مشابہہ ہے۔

مخلوط نسبت Hybrid Ratio: مواد کے مختلف زمروں کے متعلقہ حصوں میں نسبت۔ یہ شرح کے مماثل ہے۔

لوکارتم Logarithm : کسی دیئے گئے عدد کا لوکارتم (log Y) وہ قوت ہے جس کو (فرض کردہ) اساس پر اٹھایا جاتا ہے تاکہ دیا گیا عدد حاصل ہو۔ اگر $y = b^t$ اور $t = \log_b y$۔

لوکارتم کا مان ٹسا Mantissa of a Logarithm : عام لوکارتم کی قدر میں اعشاری حصہ۔

فیصد Percentage: شمار کنندے کی ضخامت (magnitude) جب کہ کسی نسبت کا نسب نما 100 ہوتا ہے۔

تناسب Proportion: ایک زمرے میں مذات کی تعداد کی اور تمام زمروں میں کل مذات کی تعداد میں پائی جانے والی نسبت۔

شرح Rate: ایک نسبت جس میں شمار کنندہ اور نسب نما دو مختلف اکائیوں میں ظاہر کئے جاتے ہیں۔

نسبت Ratio : ایک ہی قسم کی دو مقداروں کی قدر کے درمیان رابطہ کو ظاہر کرتی ہے اور بتلاتی ہے کہ کتنی مرتبہ ایک مقدار دوسری مقدار میں شامل ہے۔

نسبت زمانی Time Ratio : عموماً فیصدوں میں ظاہر کی جاتی ہے۔ یہ ایک ایسا پیمانہ ہے جو بہ لحاظ وقت ترتیب دی گئی قدروں کے طویل سلسلہ میں رونما ہونے والی تبدیلیوں کو ظاہر کرتا ہے۔

4.11 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات Answers to Check Your Progress

A 5. (i) غلط (ii) صحیح (iii) غلط (iv) صحیح

6. (i) d (ii) a (iii) b (iv) c

B 3. (i) صحیح (ii) غلط (iii) غلط (iv) صحیح (v) غلط (vi) غلط (vii) صحیح (viii) غلط

C .1	2.4559 (i)	4.1111 (ii)		
.2	4.3859 (i)	6.7134 (ii)	3.4852 (iii)	1.0651 (iv)
.3	5.7048 (i)	1.3875 (ii)	9.136 (iii)	1.5169 (iv)
.4	476.2 (i)	0.0004 (ii)	51.53 (iii)	0.011 (iv)
.5	1.263 (i)	0.5903 (ii)		

305.2 (v)

4.12 امتحانی سوالات / مشقیں Terminal Questions/Exercises

(1) نسبتوں، فیصدوں اور شرحوں کے معنی اور مقاصد کی تشریح کیجئے۔

(2) شماریاتی مشتقات کی غلط تاویل کے ذمہ دار عوامل کی وضاحت کیجئے۔

(3) مختلف قسم کی نسبتیں کون سی ہیں؟ نسبتوں کے محسوب کرنے کے دوران کن عوامل کو ذہن نشین رکھنا چاہیے، وضاحت کیجئے۔

مشقیں

(1) کسی شفاخانے (Hospital) میں سالانہ تعداد پیدائش دی گئی ہے۔ مندرجہ ذیل کو محسوب کیجئے۔

(a) ہر سال مردوں اور عورتوں کا فیصد۔

(b) زمانی نسبت (i) قائم اساس طریقہ سے (1982) اور (ii) متحرک اساس طریقے سے

سال	مرد	عورتیں
1982	1,847	1,754
1983	1,915	1,816
1984	1,823	1,733
1985	1,670	1,588
1986	1,608	1,529

(2) ایک شخص ماہ گزشتہ کے دوران کسی ایک شہر میں T.V. کے تین برانڈ یعنی x ' y ' z کی فروخت کا تقابل کرنے میں دلچسپی رکھتا ہے۔ ان تین برانڈوں کو فروخت کرنے والے چار چلر فروشوں کی شناخت کی گئی جن کی فروخت کے اعداد و شمار حسب ذیل ہیں:۔

چلر فروش	فروخت شدہ ٹی وی سٹوں کی تعداد		
	برانڈ X	برانڈ Y	برانڈ Z
چلر فروش 1	4	3	1
چلر فروش 2	8	4	3
چلر فروش 3	8	6	1
چلر فروش 4	10	7	0

مندرجہ ذیل کو محسوب کیجیے۔

(a) کل فروخت شدہ ٹی وی کی تعداد میں x برانڈ کی تعداد کی تقسیمی نسبت اور فیصد۔

(b) کل فروخت میں، x اور y برانڈ کی مجموعی تعداد کی تقسیمی نسبت اور فیصد۔

(c) فروخت شدہ x ٹی وی اور y ٹی وی کی تعداد کے درمیان بین جماعتی نسبت۔

(d) x ٹی وی اور y ٹی وی کی جملہ تعداد کی z ٹی وی کے ساتھ بین جماعتی نسبت۔

جواب :

(a) 0.545; 54.55%

(b) 0.909; 90.91%

(c) 3 : 2

(d) 10 : 1

(3) کسی کاروباری ادارے میں A نیا سیلز مین اور B تجربہ کار سیلز مین ہے۔ A نے اپنے پہلے مہینے کی بہ نسبت دوسرے مہینے میں، اپنی فروخت میں 50% سے زیادہ اضافہ کیا ہے۔ اسی مدت میں، B کی فروخت 5% زیادہ ہوئی ہے۔ کیا اس سے ثابت ہوتا ہے کہ A ، B سے بہتر سیلز مین ہے؟ تشریح کیجیے۔

(4) مندرجہ ذیل نسبتوں میں سے ہر ایک کے نسب نما میں کیا نفاست Refinement مطلوب ہے۔

(a) کسی بس حادثے میں ہلاک ملازمین کی ریلوے کے ملازمین کی کل تعداد سے نسبت۔

(b) کسی طبقہ میں بیروزگاروں کی تعداد اور اس طبقہ کے کل اراکین کی تعداد کے مابین نسبت۔

(c) بی اے ڈگری کامیاب کرنے والے طلبہ کی تعداد اور شہر میں طلبہ کی کل تعداد کے مابین نسبت۔

(d) خسرے (measles) کے مریضوں اور شہر کی جملہ آبادی کے مابین نسبت۔

(5) دو مختلف ریاستوں میں قرض دینے والے اداروں کے متعلق، مندرجہ ذیل معلومات دی گئی ہیں۔ مختلف نسبتوں کو محسوب کر کے مواد کی تاویل کیجیے۔ آپ نے کیا نتائج اخذ کیے ہیں؟

ریاست	اداروں کی تعداد	اراکین کی تعداد (ہزاروں میں)	سال کے دوران دیا گیا قرض	
			عدد (ہزاروں میں)	رقم (ہزاروں میں)
A	962	2,240	1,340	4,55,800
B	481	546	240	28,900

(6) لوکارتم کے استعمال سے مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) $100 \times \sqrt{\frac{280 \times 234}{232 \times 194}}$

$32 \div \sqrt{176.5 \times 60}$ (ii)

$(34.1)^{5.1}$ (iii)

جواب : 120.7 (i) 0.9874 (ii) 6,56,60,000 (iii)

(7) r کی قیمت معلوم کیجئے جبکہ $\left(1 \times \frac{r}{100}\right)^5 = 2$

جواب : 14.9

نوٹ : یہ سوالات آپ کو اس اکائی کے سمجھنے میں مددگار ثابت ہوں گے۔ ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجئے۔ لیکن آپ کے جواب یونیورسٹی کو نہ بھیجیے۔ یہ آپ کی مشق کے لئے ہیں۔

SOME USEFUL BOOKS چند مفید کتب

Elhance, D.N., and veena Elhance, 1988, Fundamentals of Statistics, Ketab Mahal : Allhabad (Chapter 1, 2 & 7)

Gupta, C.B., An Introduction to Statistical Methods, Vikas Publishing House: New Delhi, (Chapters 2, 4).

Gupta, S.P., 1989, Elementary Statistical Methods, Sultan Chand & Sons: New Delhi. (Chapters 1-4).

Sancheti, D.C., and Kapoor, V.K., 1989, Statistics Theory Methods and Applications, Sultan Chand & Sons: New Delhi. (Chapter 1 & 2)

Shenoy, G.V., Srivastava V.K., and Sharma, S.C., 1989. Business Statistics, wiley Eastern: New Delhi, (Chapter 1 & 2)

Simpson, G, and Kafka, F. Basic Statistics, Oxford & IBH Publishing: New Delhi (Chapters 1, 2 & 7).

☆☆☆

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
حیدرآباد

بلاک

2

مواد اکٹھا کرنا، درجہ بندی اور اظہار

Collection, Classification and Presentation of Data

اکائی 5 مواد اکٹھا کرنا	Collection of Data	5
اکائی 6 مواد کی درجہ بندی	Classification of Data	21
اکائی 7 جدولی اظہار	Tabular Presentation	46
اکائی 8 شکلی اظہار	Diagrammatic Presentation	62
اکائی 9 ترسیمی اظہار	Graphic Presentation	87

مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی

Maulana Azad National Urdu University



Urdu Translation
Under the Supervision of: Translation Division,
Maulana Azad National Urdu University

Translator
Dr. Mohd. Jahangir Ali,
Lecturer in Commerce

Editor
Dr. Mohd. Osman Ahmed
Lecturer in Commerce, Anwar-ul-uloom College,

Language Consultant
Dr. Mustafa Ali Khan Fatimi
Maulana Azad National Urdu University

اردو ترجمہ
زیر اہتمام ٹرانسلیشن ڈویژن
مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

مترجم
ڈاکٹر محمد جہانگیر علی، لکچرر کامرس

ایڈیٹر
ڈاکٹر محمد عثمان احمد، لکچرر کامرس، انوار العلوم کالج

ناظر زبان
ڈاکٹر مصطفیٰ علی خاں فاطمی، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

EMESCO BOOKS,HYDERABAD YEAR-2011

Indira Gandhi National Open University

Expert Committee

Prof. B.S. Sharma
Vice-Chancellor, IGNOU

Prof. J. Satyanarayana (*Chairman*)
Osmania University, Hyderabad

Prof. G.V. Shenoy
Institute of Rural Management, Anand

Prof. B.S. Bhatia
Punjabi University, Patiala

Prof. P.K. Ghosh
Delhi University, Delhi

Prof. Rakesh Khurana
Director
School of Management Studies, IGNOU

Prof. R.B. Upadhyaya
University of Rajasthan Jaipur

Prof. I.H. Farooqi
Aligarh Muslim University, Aligarh

Mr. A.K. Majumdar
Institute of Chartered Accountants
of India, New Delhi

Prof. Amar Chand
Madras University, Madras

Course Preparation Team

Dr. Vidya Ratan
Sri. Ram College of Commerce
Delhi University, Delhi

Dr. C.R. Kothari
Rajasthan University, Jaipur

Dr. N.K. Kakkar
Ramjas College
Delhi University, Delhi

Faculty Members Indira Gandhi National
Open University

Dr. R.K. Grover
Dr. N.V. Narasimham
Ms. Madhu Surya
Mr. Nawal Kishor
Dr. Madhu Tyagi
Prof. G. Sambasiva Rao (*Language Editor*)

© *Indira Gandhi National Open University, 1990 (Reprint January, 1994)*
All rights reserved. No part of this work may be reproduced in any form, by mineograph or any other means, without permission in writing from the Indira Gandhi National Open University

بلاک 2 مواد اکٹھا کرنا، درجہ بندی اور اظہار

COLLECTION, CLASSIFICATION AND PRESENTATION OF DATA

بلاک 1 میں مواد اکٹھا کرنے کے لئے شماریاتی جائزے کی منصوبہ بندی اور تنظیم سے متعلق مختلف پہلوؤں کے بارے میں آپ نے معلومات حاصل کیں۔ مواد کو مختلف طریقوں کے ذریعے ابتدائی ماخذ یا ثانوی ماخذ سے اکٹھا کیا جاسکتا ہے۔ اکٹھا شدہ مواد اکثر منظم اور فوری استعمال کے لائق نہیں ہوتا۔ اس لئے اس کے تجزیہ سے پہلے اس کی درجہ بندی کر کے اس کو جامع شکل میں پیش کرنا چاہیئے۔ اس باب میں آپ، مواد کی یکجائی، درجہ بندی اور پیشکش کے مختلف طریقوں کی تفصیلات سے واقف ہوں گے۔ اس باب میں پانچ یونٹ شامل ہیں۔

اکائی 5 میں مختلف ماخذوں سے مواد اکٹھا کرنے کے مختلف طریقوں کی تفصیل سے وضاحت کی گئی ہے۔ اس کے علاوہ مواد اکٹھا کرنے کے دوران درپیش مسائل اور اکٹھا شدہ مواد کے استعمال میں درکار احتیاطی تدابیر کی تشریح کی گئی ہے۔

اکائی 6 میں درجہ بندی کی تعریف کی گئی ہے، درجہ بندی کے مختلف طریقوں پر بحث کے ساتھ ساتھ تعددی تقسیم کی تیاری کی تفصیل سے وضاحت کی گئی ہے۔ اس کے علاوہ تعددی تقسیم کی مختلف قسموں اور اس سے متعلق مختلف اصطلاحوں اور تعددی تقسیم کے مختلف طریقوں کی تشکیل سے بھی اس اکائی میں بحث کی گئی ہے۔

اکائی 7 جدول بندی سے متعلق ہے۔ اس میں جدول بندی کے مقاصد کو سمجھایا گیا ہے نیز شماریاتی جدول کی قسموں، شماریاتی جدول کے مختلف حصوں ، اچھی شماریاتی جدول کے لوازمات اور شماریاتی جدول تیار کرنے کے طریقوں پر اس اکائی میں تفصیلی روشنی ڈالی گئی ہے۔

اکائی 8 مواد کے شکلی اظہار سے متعلق ہے۔ اس میں شکلی اظہار اور مختلف قسم کی اشکال کی تیاری کے طریقوں کی تشریح کی گئی ہے۔

اکائی 9 مواد کے ترسیمی اظہار سے تعلق رکھتی ہے۔ یہ اکائی ترسیم کی اہمیت اور ترسیمات کی تیاری کے دوران کی جانے والی عام احتیاطوں کو واضح کرتی ہے اور مختلف قسم کی ترسیمات کی تیاری کے طریقوں کی بھی صراحت کرتی ہے۔

اکائی 5 مواد اکٹھا کرنا

UNIT:5 - COLLECTION OF DATA

Structure ساخت

Objectives — مقاصد 5.0

Introduction — تمہید 5.1

Factors Affecting Choice of Data — مواد کے انتخاب کو متاثر کرنے والے عوامل 5.2

Problems in Collecting Primary Data — ابتدائی مواد اکٹھا کرنے میں درپیش مسایل 5.3

Methods of Collecting Primary Data — ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے طریقے 5.4

Observation — مشاہدہ 5.4.1

Personal Interviewing — شخصی انٹرویو 5.4.2

Through Local Reports and Correspondents — مقامی رپورٹوں اور نامہ نگاروں کے ذریعے 5.4.3

Questionnaire — سوال نامے 5.4.4

Schedule — شیڈیول 5.4.5

Choice of Method — طریقہ کا انتخاب 5.4.6

Sources of Secondary Data — ثانوی مواد کے ماخذ 5.5

Published Sources — مطبوعہ ماخذات 5.5.1

Unpublished Sources — غیر مطبوعہ ماخذات 5.5.2

Precautions in Using Secondary Data — ثانوی مواد کے استعمال میں احتیاطیں 5.6

Advantages and Disadvantages of Secondary Data — ثانوی مواد کے فوائد اور نقصانات 5.7

Let Us Sum Up — خلاصہ 5.8

Key Words — کلیدی الفاظ 5.9

Answers to Check Your Progress — اپنی معلومات کی جانچ: جوابات 5.10

Terminal Questions — امتحانی سوالات 5.11

5.0 مقاصد Objectives

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:۔

- مواد کے انتخاب کو متاثر کرنے والے عوامل کی وضاحت کر سکیں۔
- ابتدائی مواد اکٹھا کرنے میں درپیش مسائل کی تشریح کر سکیں۔
- ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے مختلف طریقوں کی صراحت کر سکیں۔
- ثانوی مواد کے ماخذوں کو بیان کر سکیں۔

- ثانوی مواد کے استعمال کے دوران کی جانے والی احتیاطوں کو سمجھا سکیں۔
- ثانوی مواد استعمال کرنے کے فوائد اور نقصانات کی وضاحت کر سکیں۔

5.1 تمہید Introduction

اکائی 2 میں ہم نے ابتدائی اور ثانوی مواد کے معنی، ابتدائی مواد حاصل کرنے کے مختلف طریقوں اور ثانوی مواد حاصل کرنے کے ماخذوں سے متعلق مختصر بحث کی۔ اس یونٹ میں ہم مواد کے انتخاب کا تعین کرنے والے مختلف عوامل، ابتدائی مواد حاصل کرنے میں پیش آنے والے مسائل اور ابتدائی مواد حاصل کرنے کے مختلف طریقوں کے متعلق تفصیل سے بحث کریں گے۔ آپ ثانوی مواد کی خوبیوں اور خامیوں، ثانوی مواد کے وسائل اور ثانوی مواد کے استعمال کرنے میں اختیار کی جانے والی احتیاطی تدابیر کا بھی مطالعہ کریں گے۔

5.2 مواد کے انتخاب کو متاثر کرنے والے عوامل
Factors affetcing Choice of Data

آپ جانتے ہیں کہ مواد کی بطور ابتدائی مواد اور ثانوی مواد، زمرہ بندی کی جاسکتی ہے۔ ابتدائی مواد وہ ہے جس کو تحقیق کار پہلی مرتبہ بطور اصلی مواد اکٹھا کرتا ہے۔ ابتدائی مواد عام طور پر خام مال کی شکل میں ہوتا ہے جس کا تجزیہ کرنے کے لئے شماریاتی طریقے استعمال کئے جاتے ہیں۔ اگر تحقیق کار وہ مواد اکٹھا کرتا ہے جس کو اس سے پہلے کسی اور نے بھی اکٹھا اور مدون کیا ہے تو ایسے مواد کو ثانوی مواد کہا جاتا ہے۔ ثانوی مواد پختہ مال کی شکل میں ہوتا ہے کیونکہ اس کو قبل ازیں کسی ایک یا دیگر صورت میں مدون کیا گیا ہے۔ جب آپ شماریاتی جائزہ کی منصوبہ بندی کرتے ہیں تو آپ کو اس بات کی نشاندہی کرنی چاہیئے کہ آپ ابتدائی مواد اکٹھا کرنا چاہتے ہیں یا ثانوی۔

یہ ایک بنیادی مسئلہ ہے جس کا فیصلہ مواد اکٹھا کرنے کے آغاز سے قبل کرنا چاہیئے۔ مواد کے انتخاب کا انحصار کئی عوامل پر ہوتا ہے جس کا تذکرہ ذیل میں کیا گیا ہے:

(1)	تحقیق کا مقصد	Object of the Enquiry
(2)	تحقیق کی وسعت	Scope of the Enquiry
(3)	مالیہ وسائل	Financial Resources
(4)	عامل وقت	Time Factor
(5)	تحقیق کار ایجنسی کا مرتبہ	Status of the Investigation Agency
(6)	انسانی وسائل	Human Resources
(7)	ثانوی مواد کی دستیابی	Availability of Secondary Data
(8)	مطلوبہ صحت کا درجہ	Degree of accuracy desired

(1) تحقیق کا مقصد (Object of the Enquiry) : مواد کے انتخاب کو متاثر کرنے والا یہ سب سے اہم عامل ہے۔ آپ کو ایسا مواد اکٹھا کرنا ہے جو تحقیق کے مقصد کو پورا کرتا ہے۔ مقصد ہی جائزے کے لیے درکار معلومات کی نوعیت کا تعین کرتا ہے۔ اگر ابتدائی مواد کے ذریعہ مقصد براری ممکن ہو تو آپ ابتدائی مواد حاصل کرنے کی کوشش کریں گے۔

(2) تحقیق کی وسعت (Scope of the Enquiry) : وسعت تحقیق سے مراد احاطۂ تحقیق ہے جس میں معلومات کی نوعیت، جائزے

کے جغرافیائی حدود اور بنیادی موضوعات شامل ہوتے ہیں۔ اگر مطلوبہ معلومات جامع اور بنیادی قسم کی ہوں تو اس کے لیے ابتدائی مواد نہایت موزوں ثابت ہوگا۔

(3) مالیہ وسائل (Financial Resources) : شماریاتی جائزے میں درحقیقت مالیہ ایک بڑی رکاوٹ ہے اور آپ کو دستیاب مالیہ کے مطابق کام کرنا پڑے گا۔ مالیہ کی فراہمی بڑی حد تک تحقیق کے دوران مواد کی نوعیت کا تعین کرتی ہے۔ اکثر صورتوں میں، ثانوی مواد کی بہ نسبت ابتدائی مواد کے اکٹھا کرنے میں زیادہ مالیہ کی ضرورت پڑتی ہے۔ اگر مالیہ محدود ہے تو ہم ثانوی مواد سے استفادہ کر سکتے ہیں۔ اگر مالیہ کافی مقدار میں دستیاب ہے تو ابتدائی مواد اکٹھا کرنا مناسب ہے۔

(4) عامل وقت (Time Factor) : یہ فیصلہ کرنے کے لئے کہ آیا ابتدائی مواد منتخب کرنا ہے یا ثانوی مواد استعمال کرنا ہے تو ابتدائی اور ثانوی مواد کے لئے درکار وقت پر بھی غور کرنا چاہیئے۔ ثانوی مواد کی بہ نسبت ابتدائی مواد کو اکٹھا کرنے میں کافی وقت درکار ہوتا ہے۔ اگر تحقیق کے لئے کافی وقت ہے تو ہم ابتدائی مواد استعمال کر سکتے ہیں۔ لیکن اگر وقت محدود ہے تو ہم عموماً ثانوی مواد استعمال کرتے ہیں لہذا جائزے کے لئے مواد اکٹھا کرنے کے طریقے میں وقت کی دستیابی بہت اہم کردار ادا کرتی ہے۔

(5) تحقیق کار ایجنسی کا رُتبہ (Status of the Investigating Agency) : مواد اکٹھا کرنے کے طریقہ انتخاب میں یہ ایک اور اہم عامل ہے۔ بہت کچھ اس بات پر منحصر ہے کہ آیا تحقیق کرنے والی ایجنسی حکومت ہے، یا عوامی تنظیم برادرہ یا فرد واحد۔ پہلی صورت میں بڑے پیمانے پر ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے متعلق سوچا جاسکتا ہے۔ تاہم افراد کے لئے بڑے پیمانے پر مواد اکٹھا کرنا بہت دشوار کام ہے۔ فرد واحد کے لئے ثانوی مواد کا استعمال کفایتی اور قابل عمل ہے۔ سرکاری تنظیمیں اور ادارے بھی درکار معلومات حاصل کرنے کے لئے عملی جائزوں کا انتظام کر سکتے ہیں لیکن خانگی اداروں کے لئے یہ ناممکن ہے۔ حکومت یا سرکاری ادارے، ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے لئے زیادہ پیسہ خرچ کرنے اور کافی تعداد میں تربیت یافتہ اور قابل عملے کی خدمات حاصل کرنے کے موقف میں ہوتے ہیں لیکن بعض افراد یا خانگی اداروں کو اس معاملے میں بہت سی رکاوٹوں کا سامنا کرنا پڑتا ہے۔

(6) انسانی وسائل (Human Resources) : مواد کے انتخاب پر انسانی وسائل کی دستیابی بھی کافی اثر انداز ہوتی ہے۔ جیسا کہ آپ جانتے ہیں، مواد اکٹھا کرنے کے لئے بہت سارے افراد کی ضرورت ہوتی ہے۔ اگر آپ کے پاس قابل اور تربیت یافتہ عملہ موجود ہے تو آپ آسانی سے عملی جائزہ منظم کر سکتے ہیں اور ابتدائی مواد حاصل کر سکتے ہیں۔ اگر آپ کے پاس انسانی وسائل کا فقدان ہے تو آپ اپنی تحقیق کے لئے ثانوی مواد استعمال کر سکتے ہیں۔

(7) ثانوی مواد کی دستیابی (Availability of Secondary Data) : اگر ثانوی مواد وافر مقدار میں دستیاب ہے تو اس کو استعمال کیا جاسکتا ہے ورنہ ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے سوا دوسرا چارہ نہیں رہ جاتا۔

(8) مطلوبہ درجہ صحت (Degree of Accuracy Desired) : مواد کے انتخاب کا دارومدار مطلوبہ درجہ صحت پر بھی ہوتا ہے۔ مواد کا انتخاب کرنے سے پہلے، مطلوبہ صحت کے درجے کا تعین کرنا چاہیئے۔ اگر مطلوبہ صحت کا درجہ، ثانوی مواد سے حاصل ہوتا ہے تو ثانوی مواد استعمال کیا جاسکتا ہے بصورت دیگر صحت کی مطلوبہ سطح حاصل کرنے کے لئے ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کی منصوبہ بندی کی جائے۔

مواد کے انتخاب میں مندرجہ بالا تمام عاملین کی یکساں اہمیت ہے اور کسی ایک کو مواد کے انتخاب کی بنیاد قرار نہیں دیا جاسکتا۔ اور ان تمام کو مد نظر رکھ ابتدائی یا ثانوی مواد کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔

5.3 ابتدائی مواد اکٹھا کرنے میں درپیش مسایل
Problems in Collecting Primary Data

ہم نے مختلف عوامل پر بحث کی جو مواد کے انتخاب کا فیصلہ کرنے میں اثر انداز ہوتے ہیں۔ اب ہم مواد اکٹھا کرنے میں درپیش مسائل پر توجہ دیں

گے۔ در حقیقت ابتدائی مواد حاصل کرنے کے مسائل، ثانوی مواد حاصل کرنے کے مسائل سے مختلف ہوتے ہیں۔ ابتدائی مواد کے حصول کے دوران عام طور پر مندرجہ ذیل مسائل کا سامنا کرنا پڑتا ہے :

(1) جب آپ ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کا فیصلہ کرتے ہیں تو آپ کو عملی کام کی منصوبہ بندی نہایت جامع انداز میں کرنی ہوگی۔ یہ اس لئے ضروری ہے کہ تحقیق کے نتائج کا معیار بڑی حد تک مواد اکٹھا کرنے کی ابتدائی تیاریوں پر منحصر ہوتا ہے۔ تحقیق کی منصوبہ بندی کے مختلف مراحل پر قبل ازیں اکائی 2 میں بحث کی گئی ہے۔

(2) ابتدائی مواد حاصل کرنے کے لئے اس اکائی کو جس کے ذریعہ مواد اکٹھا کرنا مقصود ہے، نہایت واضح اور غیر مبہم طور پر بیان کرنا ہوگا۔ اس اکائی کو ایک اچھی شماریاتی اکائی کے جملہ اوصاف کا حامل ہونا ضروری ہے۔ واضح اور موزوں اکائی، ابتدائی مواد کے حصول کے لئے شرط اولین کی حیثیت رکھتی ہے۔

(3) مواد اکٹھا کرنے کی تکنیک سے متعلق مسئلہ بھی قابل غور ہے۔ جیسا کہ آپ جانتے ہیں مواد اکٹھا کرنے کے دو طریقے ہیں (i) مردم شماری طریقہ (ii) نمونہ بندی طریقہ۔ اول الذکر طریقہ میں آبادی کی تمام اکائیوں سے مواد اکٹھا کرنا مطلوب ہوتا ہے جبکہ آخر الذکر طریقے میں آبادی کے ایک حصے سے معلومات حاصل کی جاتی ہیں۔ تحقیق کار کو فیصلہ کرنا پڑتا ہے کہ کون سا طریقہ اختیار کیا جائے۔ وسائل اور وقت کی دستیابی، تحقیق کی نوعیت اور وسعت اور اسی قسم کے دیگر عوامل تحقیق کے انتخاب پر اثر انداز ہوتے ہیں۔ نمونہ بندی تکنیک میں نمونہ بندی کے خاکے (ڈیزائن) کی احتیاط سے صراحت کی جانی چاہیئے۔

(4) مواد اکٹھا کرنے سے قبل تحقیق کے فریم (سانچہ) کی تیاری ایک دوسرا اہم مسئلہ ہے۔ خاکہ سے مراد فہرست، نقشہ یا اکائی سے متعلق دیگر خصوصی توضیحات ہیں جو کسی مخصوص تحقیق کے لئے نامزد آبادی سے متعلق دستیاب معلومات کی حیثیت رکھتی ہیں۔ اگر کوئی مناسب خاکہ پہلے سے ہی موجود ہو تو مواد آسانی کے ساتھ اکٹھا کیا جاسکتا ہے ورنہ مواد اکٹھا کرنے سے پہلے ایک موزوں فریم وضع کرنا پڑے گا۔

(5) ابتدائی مواد اکٹھا کرنے سے پہلے مطلوبہ درجہ صحت کا تعین نہایت ضروری ہے جیسا کہ آپ واقف ہیں، تمام شماریاتی تحقیقات میں معقول سطح کی صحت از حد ضروری ہے۔ غرض تحقیق کے پیش نظر مطلوبہ درجہ صحت کا تعین ضروری ہے۔

(6) ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے معاملے میں ایک اور مسئلہ مواد اکٹھا کرنے کے لئے فارموں (نمونوں) کے ڈیزائن تیار کرنا ہے۔ زیر استعمال مختلف فارموں (جیسے سوالنامہ، شیڈیول وغیرہ) کو نہایت احتیاط سے تیار کرنا چاہیئے تاکہ مطلوب مواد اکٹھا کیا جاسکے۔ مواد اکٹھا کرنے سے پہلے ان کی پیشگی جانچ کر لینی چاہیئے تاکہ معلوم ہو سکے کہ یہ کتنے مفید و موثر ہیں۔ پیشگی جانچ میں اگر کچھ نقائص کی نشاندہی ہو تو دستاویز یعنی فارم کو قطعی شکل دینے سے قبل ان کا ازالہ کر لیا جانا چاہیئے۔

(7) ثانوی مواد کی بہ نسبت، ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے لئے فیلڈ اسٹاف (میدانی عملہ) کے انتخاب، تربیت اور نگرانی کی کافی اہمیت ہے چونکہ جائزے کی کامیابی کا تمام تر دارومدار اسی عملہ پر ہوتا ہے۔ یہ لازمی ہے کہ ان کو موزوں طریقے سے منتخب کیا جائے، مکمل طور پر ان کو تربیت دی جائے اور ان کے کام کی نگرانی کی جائے۔ منتخب شمار کنندوں (Enumerators) کا دیانت دار، ذہین اور محنتی ہونا ضروری ہے۔ جواب دہندوں سے مطلوبہ معلومات حاصل کرنے میں ان کو مہارت ہونی چاہیئے۔

(8) اس کے بعد آتا ہے عملی کام/فیلڈ ورک کے معیار کو قابو میں رکھنے کا مسئلہ۔ یہ یقین کرنے کے لئے کہ انٹرویو لینے والے، سونپا گیا کام دیانت داری اور قابلیت سے کر رہے ہیں یا نہیں۔ گاہے گاہے موقعہ معائنہ ضروری ہے۔ غیر متوقع عوامل پر موثر نگرانی ضروری ہے تاکہ مواد اکٹھا کرنے کے عمل کو ممکنہ حد تک حقیقت پسند بنایا جاسکے۔ بہ الفاظ دیگر، مواد کو اکٹھا کرنے کے عمل کو قابو میں رکھنے کے لئے مناسب اقدامات کئے جائیں تاکہ جمع شدہ معلومات پہلے سے طے شدہ معیارِ صحت سے ہم آہنگ ہوں۔ مزید عمل پیرائی سے قبل جمع شدہ مواد کو بھول چوک، عدم تسلسل اور دیگر غلطیوں سے پاک و صاف کرنا ضروری ہے۔

(9) بساط بھر کوششوں کے باوجود، جواب دہندوں کے عدم تعاون کا مسئلہ اپنی جگہ برقرار رہتا ہے۔ اس مسئلے سے نپٹنے کے لئے کچھ نہ کچھ کرنا

ضروری ہے۔اس مسئلے کو سلجھانے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ جواب نادہندوں کی ایک فہرست مرتب کی جائے اور ان کا ایک چھوٹا سا نمونہ لے کر ماہرین کے تعاون سے جواب حاصل کرنے کی کوشش کی جاسکتی ہے۔ کسی بھی صورت میں شمار کنندوں کو جواب دہندوں کے بجائے کسی اور شخص سے معلومات حاصل کرنے کی اجازت نہیں دی جانی چاہیے۔ لہذا کسی مناسب ادارہ کا قیام اس لئے ضروری ہے کہ مواد جمع کرنے کا کام بآسانی آگے بڑھتا رہے۔ یہ مسئلہ اس وقت مزید سنجیدہ ہو جاتا ہے جب کہ تحقیق کا کام اعلیٰ پیمانے پر جاری ہے۔ مواد جمع کرنے کے مختلف طریقوں مثلاً مشاہدہ، سوالنامے، جدول اور انٹرویو وغیرہ کا منصفانہ انتخاب بے حد ضروری ہے جو کہ ہمارے مطالعہ کے لیے مناسب ثابت ہو سکتا ہے۔ ان طریقوں کے انتخاب کے وقت تحقیق کی نوعیت، مقصد، وقت کی دستیابی اور مطلوبہ صحت وغیرہ پر بھی دھیان رکھنا از حد ضروری ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ A

(1) ابتدائی اور ثانوی مواد میں موجود فرق کو واضح کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

(2) کسی تحقیق میں استعمال کئے جانے والے مواد کے انتخاب پر اثر انداز ہونے والے عوامل کی تفصیل لکھیے۔

.....

.....

.....

.....

(3) کسی تحقیق کار کو ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے دوران پیش آنے والے کوئی پانچ مسائل بیان کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

.....

(4) بیان کیجیے کہ مندرجہ ذیل بیانات آیا صحیح ہیں یا غلط؟

(i) ابتدائی مواد کی بہ نسبت ثانوی مواد اکٹھا کرنے میں زیادہ وقت درکار ہوتا ہے۔

(ii) حکومت کے ذریعہ قومی آمدنی سے متعلق جمع شدہ مواد تحقیق کار کے لیے ثانوی مواد ہے جس کو وہ اپنے مطالعہ میں استعمال کرتا ہے۔

(iii) انفرادی طور پر غور کردہ کوئی بھی عامل مواد کے انتخاب کی بنیاد نہیں بن سکتا۔

(iv) ابتدائی مواد جمع کیا جائے یا ثانوی مواد استعمال کیا جائے، بہر صورت تحقیق کار کے مسائل مختلف نہ ہوں گے۔

(v) اگر اطمینان ہو جائے کہ ثانوی مواد قابل اعتماد، کافی اور موزوں ہے تو اس کو استعمال کرنا چاہیئے۔

(vi) ایک موزوں سانچہ (فریم) / خاکہ (ڈیزائن) تیار کرنے کا مسئلہ اس وقت پیدا ہوتا ہے جب کہ ثانوی مواد زیر استعمال ہو۔

(vii) فیلڈ اسٹاف (میدانی عملہ) کے انتخاب، تربیت اور نگرانی کا مسئلہ اس وقت رونما ہوتا ہے جب کہ اس مقصد کے لئے زیر استعمال طریقہ کا لحاظ کئے بغیر ہم ابتدائی مواد جمع کرتے ہیں۔

(viii) جواب نادہندگی کا مسئلہ ثانوی مواد کی صورت میں بہت بڑا مسئلہ ہے۔

5.4 ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے طریقے
Methods of Collecting Primary Data

ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے کئی طریقے ہیں۔ جائزے کی نوعیت کو مد نظر رکھتے ہوئے ان میں سے کوئی بھی طریقہ اختیار کیا جاسکتا ہے۔ اکائی 2 میں مختصراً آپ نے ان طریقوں کا مطالعہ کیا۔ اب کچھ اور تفصیلات ہم یہاں پیش کریں گے۔

5.4.1 مشاہدہ Observation

مشاہدہ سے مراد کائنات میں وقوع پذیر ہونے والے مخصوص مظاہر کو اہتمام کے ساتھ بغور دیکھنا ہے۔ مطلوبہ معلومات کو دوسروں کی رپورٹوں کے ذریعہ حاصل کرنے کے بجائے براہ راست مشاہدے سے حاصل کیا جاتا ہے۔ انسانی طرز عمل کو معلوم کرنے کے لئے کسی شخص کے قول کو سننے کے بجائے کہ وہ کیا کہتا ہے، اس کے فعل کو دیکھا جاتا ہے کہ وہ کیا کرتا ہے؟ اطلاع دہندے اگر صحیح معلومات یا ٹھیک جواب نہ دے پا رہے ہیں تو سوال کرنا زیادہ کار آمد نہیں ہوتا بلکہ صرف مشاہدے کا طریقہ اختیار کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر آپ ایسے چھوٹے بچوں کے رویہ کا مطالعہ کر رہے ہیں جو بول نہیں سکتے تو مختلف حالات کے تحت بچوں کا مشاہدہ کر کے آپ مطلوبہ معلومات حاصل کر سکتے ہیں۔ آپ کو یاد رکھنا چاہیئے کہ تمام مظاہر کا کھلے طور پر مشاہدہ نہیں کیا جاسکتا اور اگر کوئی مظہر مشاہدے کے لئے کھلا ہو بھی تو اس کو دیکھنے والے کا موجود رہنا ضروری نہیں۔

مشاہدہ سانجھے داری مشاہدہ ہو سکتا ہے یا غیر سانجھے داری (غیر شرکتی)۔ سانجھے داری یا شرکتی مشاہدے کے طریقے Participant observation method میں مشاہدہ کرنے والا زیر مطالعہ گروہ یا تنظیم کی روزمرہ زندگی میں شامل ہو جاتا ہے۔ سماج کے اراکین کو درپیش واقعات کا وہ مطالعہ کرتا ہے اور اس کے اراکین کے برتاؤ پر گہری نظر رکھتا ہے۔ وہ ان سے گفتگو کرتا ہے تاکہ آس پاس ہونے والے واقعات پر ان کا رد عمل معلوم کیا جاسکے۔ غیر سانجھے داری (غیر شرکتی) طریقے میں، مشاہدہ کرنے والا معلومات اکٹھا کرنے کے لئے، زیر مطالعہ گروہ یا تنظیم میں شامل نہیں ہوتا بلکہ باہر سے ہی اس پر نظر رکھتا ہے۔

خوبیاں : اس طریقے کے فوائد مندرجہ ذیل ہیں۔

(1) جب اطلاع دہندے معلومات فراہم کرنے کے قابل نہ ہوں یا صحیح معلومات نہیں پیش کر سکتے تو یہ طریقہ نہایت موزوں طریقہ ہے۔

(2) یہ براہ راست معلومات فراہم کرتا ہے اور مسئلے کو گہری نظر سے دیکھنے کا موقعہ فراہم کرتا ہے لہذا یہ گہرے مطالعہ کے لئے کار آمد ہے۔

کوتاہیاں : اس طریقے میں مندرجہ ذیل کوتاہیاں پائی جاتی ہیں۔

(1) کئی صورتوں میں آپ یہ پیشن گوئی نہیں کر سکتے کہ واقعات کب وقوع پذیر ہوں گے۔ اس لئے کسی صورت حال کے لئے جو مشاہدے کے لئے کھلی ہے، کوئی بچشم خود دیکھنے والا موجود ہونا ضروری نہیں ہے۔

(2) بصورت دیگر مشاہدہ کرنے والے کو زیر مشاہدہ واقعات کی تادیل میں نہایت معروضی ہونا چاہیئے ورنہ اس کا جانبدارانہ میلان نتائج کو متاثر کر سکتا ہے۔

(3) یہ بڑے پیمانے پر وسیع مطالعہ کے لئے موزوں نہیں ہے۔

(4) مشاہدہ کرنے والے کی موجودگی، زیر مشاہدہ افراد کے برتاؤ پر اثر انداز ہو سکتی ہے۔ اس صورت میں وہ صحیح معلومات نہیں حاصل کر سکتا۔

5.4.2 شخصی انٹرویو Personal Interviewing

اس طریقے کے تحت تحقیق کار، انٹرویو کے ذریعہ شخصی طور پر معلومات اکٹھا کرتا ہے۔ اس لئے تحقیق وسیع ہونے کی بہ نسبت عمیق ہوتی ہے۔ اس طریقے کے تحت تحقیق کار اطلاع دہندوں سے شخصی ملاقات کرتا ہے۔ تحقیق سے متعلق سوالات کرتا ہے اور مطلوبہ معلومات حاصل کرتا ہے۔ لہذا، اگر کوئی شخص نیشنل بال بیرنگ کمپنی (National Ball Bearing Company) کے مزدوروں کی اجرت کے متعلق مواد اکٹھا کرنا چاہتا ہے تو وہ اس کمپنی کے کارخانے پر پہنچتا ہے، مزدوروں سے ملاقات کرتا ہے اور متعلقہ معلومات اکٹھا کرتا ہے۔ اسی لیے عام طور پر یہ طریقہ چھوٹے سائز کے جائزوں میں استعمال کیا جاتا ہے جو چھوٹے مقامات تک محدود ہوتے ہیں۔ انٹرویو رسمی اور غیر رسمی ہو سکتے ہیں۔ رسمی انٹرویو میں طے شدہ سوالات پوچھے جاتے ہیں، اور ان کے جوابات کو معیاری شکل میں ریکارڈ کر لیا جاتا ہے۔ بڑے پیمانے پر انٹرویوز میں یہ عام عمل ہے جہاں پر انٹرویو لینے کا کام تحقیق کاروں کی ایک بڑی تعداد کو سونپا جاتا ہے۔ رسمی انٹرویو میں، انٹرویو لینے والے کے جانبدارانہ میلان کو ممکنہ حد تک کم کیا جاتا ہے۔ جب آپ جانتے ہیں کہ جائزے کے لئے کس قسم کی معلومات درکار ہیں، تو اس قسم کا انٹرویو نہایت موزوں ثابت ہوتا ہے۔ غیر رسمی انٹرویو کی صورت میں تحقیق کار کے پاس سوالات کا سٹ رہنا ضروری نہیں، بلکہ وہ کچھ ایسے کلیدی نکتوں سے کام لیتا ہے جن کے ارد گرد وہ انٹرویو کا خاکہ تیار کرتا ہے۔ انٹرویو لینے والے کو یہ آزادی حاصل ہوتی ہے کہ وہ سوالات کے سلسلے کو تبدیل کر سکے، ان کے معنی سمجھا سکے، سوالات میں اضافہ کر سکے، اور الفاظ تبدیل کر سکے۔ غیر رسمی انٹرویو کو کھوجی جائزوں (Explorative Surveys) پر ترجیح دی جاسکتی ہے، جہاں یہ یقینی نہیں ہوتا کہ کس قسم کے مواد کو اکٹھا کرنا ہے۔

خوبیاں : اس طریقے کی اہم خوبیاں مندرجہ ذیل ہیں :

(1) انٹرویو دینے والے افراد کا ردعمل کافی حوصلہ افزا ہوتا ہے کیونکہ شخصی طور پر ملنے سے وہ معلومات فراہم کرنے کے لئے رضامند ہو جاتے ہیں۔

(2) حاصلہ معلومات زیادہ صحیح ہو سکتی ہیں کیونکہ اطلاع دہندے کے شکوک و شبہات کو تحقیق کار خود رفع کر سکتا ہے۔

(3) اطلاع دہندوں کے ذاتی اوصاف کے متعلق بھی مزید معلومات حاصل کی جاسکتی ہیں جن کو بعد ازاں نتائج کے تجزیے کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

خامیاں : اس طریقہ کی خامیاں مندرجہ ذیل ہیں۔

(1) اس طریقہ کی بڑی خامیاں ہیں موضوعی عوامل یا تحقیق کار کے جانبدارانہ میلانات جو جانے یا انجانے طور پر داخل ہو جاتے ہیں۔

(2) یہ بہت مہنگا ہے اور وقت طلب طریقہ ہے، خصوصاً جب کہ انٹرویو لئے جانے والے افراد کی تعداد زیادہ ہو اور یہ وسیع علاقے میں پھیلے ہوئے ہوں۔ اس لئے یہ طریقہ بڑے جائزوں کے لئے موزوں نہیں ہے۔

5.4.3 مقامی رپورٹوں اور نمائندوں کے ذریعہ
Through Local Reports and Correspondents

اس طریقے کے تحت تحقیق کار اپنے زیر تحقیق علاقے کے مختلف مقامات پر مقامی نمائندوں یا نمائندوں کا تقرر کرتا ہے جو تحقیق کے مختلف شعبوں سے متعلق معلومات حاصل کرتا ہے۔ یہ نمائندے معلومات اکٹھا کر کے تحقیق کار کے دفتر کو روانہ کرتے ہیں۔ اخبارات کی ایجنسیاں عموماً اس طریقے کو اختیار کرتی ہیں۔ نسبتاً وسیع رقبے سے باقاعدہ معلومات حاصل کرنے کے لئے حکومت کے مختلف شعبے بھی یہ طریقہ کو استعمال کرتے ہیں۔ فصلوں کا تخمینہ تیار کرنے یا قیمت کی اشاریہ سازی اور مختلف اجناس کی قیمتوں کے بارے میں باقاعدہ معلومات حاصل کرنے کے لئے، عام طور پر یہ طریقہ استعمال کیا جاتا ہے۔

خوبیاں : اس طریقے کی سب سے بڑی خوبی یہ ہے کہ یہ نسبتاً سستا ہے، نیز اس سے اچھے نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ یہ طریقہ وسیع تر تحقیقات کے لئے بھی موزوں ہے۔

خامیاں : اس طریقہ میں نمائندوں کی وقفے وقفے سے بھیجی گئی رپورٹوں میں ان کے شخصی جانبدارانہ میلانات کے داخل ہو جانے کا بہت خطرہ لگا رہتا ہے۔ لہذا ضروری ہے کہ اس مقصد کے لئے نمائندے نہایت محتاط انداز میں منتخب کئے جائیں اور ان کو مناسب تربیت دی جائے۔

5.4.4 سوال نامہ Questionnaire

ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے لئے یہ ایک مقبول ترین طریقہ ہے۔ سوالنامہ موضوع تحقیق سے متعلق سوالات کی ایک فہرست پر مشتمل ہوتا ہے۔ اس طریقہ کے تحت مختلف اطلاع دہندوں کو سوالنامہ روانہ کیا جاتا ہے اور درخواست کی جاتی ہے کہ اس کو جوابات کے ساتھ واپس بھیج دیا جائے۔ یہ سوالنامہ جواب دہندگان کو بذریعہ پوسٹ بھیجا جاتا ہے جن سے توقع کی جاتی ہے کہ وہ سوالات کو پڑھ کر اپنے جوابات سوالنامے کی اس خالی جگہ میں تحریر کریں جو اس مقصد کے لئے مختص کی جاتی ہے جواب دہندگان کو بذات خود سوالات کے جوابات دینے پڑتے ہیں۔ یہ طریقہ مختلف معاشی اور کاروباری جائزوں میں وسیع طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔

خوبیاں : اس طریقے کی خوبیاں مندرجہ ذیل ہیں۔

(1) یہ طریقہ نہایت کفایتی ہے بالخصوص جب کہ آبادی بڑی ہو اور نہایت وسیع جغرافیائی رقبے پر پھیلی ہوئی ہو۔

(2) چونکہ جواب دہندوں کے جوابات ان کے اپنے الفاظ میں ہوتے ہیں، یہ انٹرویو لینے والے کے شخصی میلانات سے آزاد ہوتے ہیں۔

(3) جواب دہندے، جواب دینے کے لئے اپنا وقت لے سکتے ہیں۔ لہذا وہ سوچ سمجھ کر جواب لکھ سکتے ہیں۔

(4) دور دراز مقامات پر بسنے والے جواب دہندگان سے بآسانی ربط پیدا کیا جاسکتا ہے۔

(5) بڑی تعداد میں نمونوں کا احاطہ کیا جاسکتا ہے، لہذا نتائج بھروسے کے قابل اور لائق اعتماد ہوتے ہیں۔

خامیاں : اس طریقہ میں مندرجہ ذیل خامیاں ہوتی ہیں۔

(1) کبھی کبھی جواب دہندگان سوالنامہ واپس کرنے کی زحمت نہیں کرتے۔ لہذا باضابطہ خانہ پری کئے گئے سوالناموں کی واپسی کا بہت کم امکان رہتا ہے اور اکثر جواب نہ دینے کی وجہ سے میلان کا بھی تعین نہیں کیا جاسکتا۔

(2) سوالناموں کو صرف ایسے جواب دہندوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے جو تعلیم یافتہ اور ہمدرد ہیں۔

(3) جواب دہندوں کو ایک مرتبہ سوالنامہ بھیجنے کے بعد تحقیق کار سوالات میں کوئی تبدیلی یا تصحیح نہیں کر سکتا۔

(4) یہ طریقہ لچکدار نہیں ہے کیونکہ اس میں ایک مرتبہ سوال نامہ بھیجنے کے بعد اس میں ترمیم کی گنجائش نہیں ہوتی۔

(5) کچھ سوالوں کے جوابات مشکوک ہو سکتے ہیں جب کہ کچھ سوالوں کے جوابات دینے میں جواب دہندوں سے بھول چوک ہو سکتی ہے جن کی تاویل مشکل ہو جاتی ہے۔

(6) یہ جاننا مشکل ہے کہ آیا جواب دہندے اپنے گروپ کی صحیح نمائندگی کرتے ہیں۔

(7) یہ طریقہ سب طریقوں سے سست رفتار ہے کیونکہ جواب دہندے خانہ پری کیے ہوئے سوالنامے واپس بھیجنے میں اپنا وقت لے سکتے ہیں۔

جواب دہندوں کو سوالنامے بھیجنے سے پہلے، بہتر ہے کہ اس کی پیشگی جانچ کے لئے 'رہنما جائزہ' (Pilot Survey) منظم کیا جائے۔ رہنما جائزہ درحقیقت، اصل جائزے کی نقل اور ریہرسل ہے۔ اس قسم کے جائزے میں حاصل ہونے والے تجربے کی بنیاد پر مواد اکٹھا کرنے کی آخری شکل کے لئے سوال نامے میں تبدیلیاں لائی جاسکتی ہیں۔ پیشگی جانچ خصوصاً بڑی تحقیقات کی صورت میں نہایت ضروری ہے۔

ایک اچھے سوال نامے کی خصوصیات Features of a Good Questionnaire

سوالنامے کو زیادہ موثر بنانے کے لئے، اس کو محتاط انداز میں مرتب کرنا چاہیئے۔ اس کی شکل و صورت اور لب و لہجہ کو اس انداز سے ترتیب دینا چاہیئے کہ اس میں شخصی عنصر شامل ہو جائے جو بذریعہ ڈاک بھیجے جانے والے اکثر سوالناموں میں موجود نہیں رہتا۔ ایک اچھے سوالنامے کی خاصیتیں مندرجہ ذیل ہیں:۔

(1) سوالنامہ مختصر اور سادہ ہونا چاہیئے۔

(2) سوالات منطقی تسلسل میں ہونے چاہئیں۔ یعنی آسان سوالات سے شروع ہو کر مشکل سوالات کی جانب بڑھنا چاہیئے۔ شخصی نوعیت کے سوالات سے گریز کرنا چاہیئے یا انہیں آخر میں درج کرنا چاہیئے۔

(3) سوالات دو قسم کے (ہاں یا نہیں قسم کے) یا کثیر انتخابی ہونے چاہئیں ایسے سوالات جن کے حدود اور مقاصد متعین نہ ہوں ان کا تجزیہ مشکل ہوتا ہے حتی الامکان ان سے گریز کرنا چاہیئے۔

(4) اس بات کا یقین کرنے کے لئے کہ آیا جواب دہندہ قابل اعتماد ہے یا نہیں، کچھ انضباطی سوالات (Control questions) کو بھی شامل کرنا چاہیئے۔ یہ دیکھنے کے لئے کہ آیا یکجا شدہ معلومات صحیح ہیں یا غلط، چلیپائی جانچ (Cross check) کا طریقہ رائج کیا جاسکتا ہے۔

(5) سوالنامے میں جوابات درج کرنے کے لئے کافی جگہ فراہم کرنی چاہیئے۔ لاعلمی کے اظہار کے لئے ہمیشہ گنجائش فراہم کی جانی چاہیئے مثلاً "معلوم نہیں" "کوئی ترجیح نہیں" وغیرہ۔

(6) سوال نامہ کا خاکہ اور ڈیزائین بھی خاصہ دلکش ہونا چاہیئے تاکہ وہ جواب دہندوں کی توجہ اپنی جانب مبذول کر سکے۔

5.4.5 شیڈیول / جدول Schedule

مواد اکٹھا کرنے کا یہ طریقہ سوالنامہ جیسا ہے۔ شیڈیول بھی ایک پروفارما ہے جس میں سوالات کا ایک سٹ شامل ہوتا ہے۔ سوال نامہ اور شیڈیول میں فرق یہ ہے کہ شیڈیول کو شمار کنندے پُر کرتے ہیں جو کہ اس مقصد کے لئے خاص طور پر مقرر کئے جاتے ہیں۔ یہ شمار کنندے جواب دہندوں کے پاس شیڈیول کے ساتھ جاتے ہیں اور ان سے سوالات اسی ترتیب میں پوچھتے ہیں جس ترتیب میں وہ درج کئے گئے ہیں۔ شمار کنندے، شیڈیول میں اسی مقصد کے لئے مختص کردہ جگہ میں جوابات درج کرتے جاتے ہیں۔ کچھ صورتوں میں شمار کنندے، شیڈیول جواب دہندوں کے حوالے کرتے ہیں اور جوابات لکھنے میں ان کی مدد کرتے ہیں۔ شمار کنندے تحقیق کے مقاصد کی وضاحت کرتے ہیں اور کسی مخصوص سوال یا سوالات کے اثرات، یا مشکل اصطلاحات کی تعریف یا تصور کے سمجھنے میں جواب دہندوں کے شکوک و شبہات کا ازالہ کر سکتے ہیں لہذا سوالنامے اور شیڈیول میں نمایاں فرق یہ ہے کہ اول الذکر کو بذریعے ڈاک جواب دہندوں تک بھیجا جاتا ہے، آخر الذکر کو شمار کنندے شخصی طور پر جواب دہندوں کے پاس لے جاتے ہیں اور بقلم خود ان کے جواب تحریر کرتے ہیں۔ یہ طریقہ عموماً حکومتی اداروں یا بڑی تنظیموں کے ذریعے منظم کی گئی جانچ تحقیقات میں استعمال کیا جاتا ہے مثلاً اس طریقے کے ذریعہ پوری دنیا میں آبادی کی مردم شماری منظم کی جاتی ہے۔

شیڈیول کے ذریعہ مواد اکٹھا کرنے میں شیڈیول کی خانہ پری کرنے کے لئے شمار کنندوں کی ضرورت پڑتی ہے لہذا ان کے انتخاب میں بہت احتیاط سے کام لیا جائے۔ کام کی انجام دہی کے لئے ان کی تربیت کرنی پڑتی ہے۔ ذہین ہونے کے ساتھ ساتھ حقیقت جاننے کے لئے انہیں، جرح کرنے کے فن میں ماہر ہونا چاہیئے۔ سب سے بڑھ کر، انہیں دیانت دار، مخلص، محنتی ہونا چاہیئے اور صبر و استقامت کا پیکر ہونا چاہیئے۔ شیڈیول کی ترتیب میں، اچھے سوالنامے کے لئے بیان کردہ سب نکات کو بھی پیش نظر رکھنا چاہیئے۔

خوبیاں : اس طریقے کے اہم فوائد مندرجہ ذیل ہیں۔

(1) اطلاع دہندے ناخواندہ ہوں تو شیڈیول کا استعمال موزوں ہوتا ہے۔

(2) اس طریقہ کار کے ذریعے عدم جواب دہی کا مسئلہ حل ہو جاتا ہے کیونکہ شمار کنندہ شخصی طور پر معلومات کے حصول کے لئے جواب دہندے تک پہنچ جاتا ہے۔

(3) یہ طریقہ وسیع تحقیقات میں نہایت کار آمد ہے جس کے نتائج نہایت قابل بھروسہ ہوتے ہیں۔

(4) جواب دہندے کی شناخت معلوم ہو جاتی ہے جو سوالنامے کی صورت میں واضح نہیں رہتی۔

خامیاں : اس طریقے میں مندرجہ ذیل خامیاں پائی جاتی ہیں۔

(1) یہ طریقہ کافی مہنگا ہے کیونکہ شمار کنندے اکثر تنخواہ یاب افراد ہوتے ہیں اور ان کی تربیت پر بھی کافی پیسہ خرچ کرنا پڑتا ہے۔

(2) ایک اور خامی یہ ہے کہ اگر تحقیق کار، انٹرویو لینے کے فن کا ماہر نہ ہو تو اس کے ذریعے اکٹھا شدہ بیشتر معلومات بھروسے کے قابل نہیں ہو سکتیں۔

(3) تحقیق کار کی موجودگی میں جواب دہندہ بعض شخصی نوعیت کے سوالات کے جوابات دینے میں پس و پیش کر سکتا ہے۔

5.4.6 طریقہ کا انتخاب Choice of Method

جیسا کہ ذکر کیا گیا ہے، ابتدائی مواد حاصل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔ اپنے مطالعہ کے لئے آپ کو موزوں ترین طریقے کا انتخاب کرنا چاہیے۔ طریقے کا انتخاب آپ کو بہت دانائی سے کرنا چاہیے تاکہ منتخبہ طریقہ نہایت موزوں اور موثر ہو۔ اس مقصد کے لئے آپ کو ذیل کے نکات دھیان میں رکھنے چاہئیں۔ (i) تحقیق کی نوعیت، وسعت اور مقصد (ii) مالیہ کی دستیابی (iii) وقت کا عامل (iv) مطلوبہ صحت (v) اس کے علاوہ سکشن 5.2 میں بیان شدہ دیگر عوامل۔

لیکن آپ کو یہ بھولنا نہیں چاہیے کہ مواد اکٹھا کرنے کے ہر طریقہ میں کچھ خوبیاں اور کچھ خامیاں موجود رہتی ہیں اور ہر قسم کی صورت حال کے لیے تمام طریقے موزوں نہیں ہوتے۔ مثال کے طور پر مشاہدے کا طریقہ اس صورت میں موزوں ہوتا ہے جب کہ کسی واقعہ کی حقیقتاً وقوع پذیری پر عمیق میدانی جائزے (Field survey) ضروری ہوتے ہیں۔ انٹرویو کا طریقہ ان صورتوں میں موزوں سمجھا جاتا ہے جہاں پر معلومات کے بالواسطہ ماخذوں کو استعمال کرنے کی ضرورت پڑتی ہے۔ براہ راست مشاہدہ ممکن نہ ہو تو مقامی روئدادوں اور مراسلہ نگاروں کے ذریعہ معلومات حاصل کرنے کا طریقہ اس وقت موزوں سمجھا جاتا ہے جبکہ نسبتاً ایک وسیع رقبے سے باقاعدہ وقفوں میں معلومات حاصل ہو سکتی ہوں۔ اگر اطلاع دہندے وسیع علاقے میں پھیلے ہوئے ہیں اور وسیع ترین تحقیقات منظم کرنا ان کا مقصد ہے تو سوالنامے کا طریقہ نہایت مناسب ہے۔ بہر حال یہ طریقہ صرف اسی صورت میں مفید ثابت ہو سکتا ہے جبکہ جواب دہندے تعلیم یافتہ ہوں اور اپنے جوابات خود تحریر کرنے کے قابل ہوں۔ شیڈیول کے ذریعہ مواد اکٹھا کرنے کا طریقہ وسیع تحقیقات میں موزوں سمجھا جاتا ہے جہاں پر جواب دہندے اکثر ناخواندہ ہوتے ہیں۔ اس طریقہ میں بہر صورت، وافر مالیہ، زیادہ وقت اور مخلص شمار کنندوں کی جماعت لازمی ہے۔ جواب دہی کی اونچی شرح کی وجہ سے یہ طریقہ وسیع تحقیقات مثلاً مردم شماری میں عموماً حکومت اختیار کرتی ہے۔

اگر مالیہ کی کوئی کمی نہ ہو اور زیادہ معلومات مطلوب ہوں تو شخصی انٹرویو کے طریقہ کو استعمال میں لایا جا سکتا ہے بشرطیکہ تحقیق ایک محدود علاقے کی حد تک منظم کرنی ہو۔ وقت کافی ہو اور مالیہ محدود ہو تو سوالنامے کا طریقہ نہایت موزوں رہے گا۔ اگر ایک وسیع جغرافیائی رقبے پر عمل آوری مقصود ہو تو سوالنامے کے طریقے کو شخصی انٹرویو کے ساتھ جوڑ کر استعمال کیا جائے تو قابل اعتماد نتائج حاصل ہو سکتے ہیں۔ مختصر یہ کہ ابتدائی مواد کے اکٹھا کرنے کے کسی طریقے کے انتخاب کا انحصار کسی مخصوص مسئلہ کی نوعیت، وقت، مالی و انسانی وسائل کی دستیابی کے علاوہ مطلوبہ درجہ صحت پر بھی ہوتا ہے۔ ان سب سے بڑھ کر تحقیق کار کی قابلیت اور مہارت پر بہت کچھ منحصر ہوتا ہے۔ اس سلسلے میں اے۔ ایل۔ باؤلے (A.L. Bowley) کا تبصرہ "شماریاتی مواد اکٹھا کرنے میں عام سوجھ بوجھ اشد ضروری ہے اور تجربہ بہت بڑا استاد ہے" نہایت موزوں ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ B

(1) انٹرویو اور شیڈیول میں فرق واضح کیجیے

.....

.....

.....

.....

.....

(2) سوالنامے اور شیڈیول میں فرق کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

.....

(3) مشاہدے (observation) اور انٹرویو میں کیا فرق ہے؟

.....

.....

.....

.....

.....

(4) مندرجہ ذیل صورتوں میں ہر ایک کے تحت ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے موزوں طریقوں کی نشاندہی کیجیے۔

صورت حال	موزوں طریقہ
(i) جب کہ واقعہ حقیقتاً وقوع پذیر ہے اور اس کے لیے عمیق جائزے کی ضرورت ہے۔	.....
(ii) جبکہ وسیع علاقہ سے متعلق باقاعدہ وقفوں سے معلومات مطلوب ہوں	.....
(iii) وسیع تحقیقات میں جب پڑھے لکھے اطلاع دہندے وسیع رقبے پر پھیلے ہوئے ہوں اور آپ کے پاس کافی وقت بھی ہو	.....
(iv) جب وقت کی افراط ہو، مالیہ محدود ہو، زیادہ معلومات مطلوب ہوں اور احاطہ شدنی علاقہ وسیع ہونے کے علاوہ تعلیم یافتہ لوگوں پر مشتمل ہو	.....
(v) جب وقت کی کمی نہ ہو، مالیہ بہ افراط دستیاب ہو، ضروری نہیں کہ تمام افراد پڑھے لکھے ہوں مخلص اور ایماندار شمار کنندوں کی جماعت دستیاب ہو	.....

5.5 ثانوی مواد کے ماخذات Sources of Secondary Data

ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے مسائل اور طریقوں کے متعلق ہم نے تفصیل سے بحث کی۔ اب ثانوی مواد پر بحث کریں گے۔ اگر ثانوی مواد اکٹھا کرنا مطلوب ہو تو آپ کو مختلف ماخذوں میں دیکھنا ہوگا کہ کہاں سے مواد حاصل کرنا ہے۔ مواد کے ماخذ کے انتخاب کا دارومدار زیر تحقیق، مسئلہ کی نوعیت پر ہوتا ہے۔ ثانوی مواد کی دو زمروں میں درجہ بندی کی جاسکتی ہے۔ (i) مطبوعہ ماخذات اور (ii) غیر مطبوعہ ماخذات۔ اب تفصیل کے ساتھ ان ماخذات پر روشنی ڈالیں گے۔

5.5.1 مطبوعہ ماخذات Published Sources

مواد کو طبع کر کے تمام ضرورت مند فریقین کو فراہم کیا جاتا ہے۔ مطبوعہ مواد کے عام ماخذات حسب ذیل ہیں۔

(1) مرکزی اور ریاستی حکومتوں کی روادادیں اور سرکاری مطبوعات۔

(2) غیر ملکی حکومتوں یا بین الاقوامی اداروں اور ان کی معاون تنظیموں جیسے عالمی بینک، بین الاقوامی مالیاتی فنڈ ادارۂ اقوام متحدہ وغیرہ کی مختلف مطبوعات۔

(3) مختلف مقامی اداروں جیسے میونسپل کارپوریشن ضلع بورڈوں وغیرہ کی نیم سرکاری مطبوعات۔

(4) خانگی مطبوعات جیسے :

(i) تکنیکی اور تجارتی رسائل جیسے کامرس (commerce)، کیپٹل (Capital) وغیرہ۔

(ii) پیشہ وارانہ تنظیموں جیسے (انسٹیٹیوٹ آف چارٹرڈ اکاؤنٹنٹس آف انڈیا (Institute of Chartered Accountants of India)، انسٹیٹیوٹ آف کمپنی سیکریٹریز (Institute of Company Secretaries)، انسٹیٹیوٹ آف بینکرس وغیرہ (Institute of Bankers) کی مطبوعات۔

(iii) تجارتی اور صنعتی تنظیموں جیسے فیڈریشن آف انڈین چیمبرس آف کامرس (Federation of Indian Chamber of Commerce)، اسٹاک ایکسچینج (Stock Exchanges) وغیرہ کی مطبوعات۔

(iv) بینکوں کی سالانہ رپورٹیں اور جائنٹ اسٹاک کمپنیوں کی رپورٹیں۔

(v) ریسرچ اسکالروں، یونیورسٹیوں اور ماہرین معاشیات وغیرہ کی رپورٹیں۔

(vi) پبلک ریکارڈ اور اعداد و شمار، تاریخی دستاویزات اور مطبوعہ معلومات کے دیگر ماخذات جیسے کتابیں، رسالے، اخبارات وغیرہ۔

5.5.2 غیر مطبوعہ ماخذات Unpublished Sources

تمام شماریاتی مواد کا مطبوعہ شکل میں دستیاب ہونا لازمی نہیں ہے۔ غیر مطبوعہ مواد کے کئی ماخذات موجود ہیں جن میں حسب ضرورت استفادہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ غیر مطبوعہ مواد عام طور پر ڈائریوں، خطوط، غیر مطبوعہ سوانح حیات اور خود نوشت سوانح حیات وغیرہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ غیر مطبوعہ مواد، اسکالروں، تحقیق کاروں، تجارتی انجمنوں، لیبر بیورو اور دیگر عوامی رخانگی تنظیموں اور افراد سے بھی حاصل ہوتا ہے۔ لہذا مطبوعہ اور غیر مطبوعہ ماخذوں میں کثیر مقدار میں معلومات دستیاب ہوتی ہیں، جو متعدد شماریاتی مطالعوں کی بنیاد بنتی ہیں۔ تحقیق کار اپنے منصوبے کے لئے ایک یا اس سے زائد ماخذوں کو استعمال کر سکتا ہے۔

5.6 ثانوی مواد استعمال کرنے میں احتیاطیں
Precautions in Using Secondary Data

جیسا کہ آپ جانتے ہیں، ثانوی مواد کسی اور کا جمع کردہ اور تجزیہ شدہ ہوتا ہے۔ لہذا اس کے استعمال کرنے میں کافی احتیاط برتنی چاہیئے۔ آپ کو محتاط طریقے سے مواد کا مطالعہ کرنا چاہیئے کیونکہ یہ آپ کے مطالعے کے لئے ناموزوں یا ناکافی بھی ثابت ہو سکتا ہے۔ مطبوعہ اعداد و شمار کو ان کے معنی اور خامیوں کو جانے بغیر صرف ظاہری قدر کی بنا پر قبول کرنا غیر محفوظ طریقہ ہے۔ ثانوی مواد کے استعمال سے پہلے ہمیشہ مندرجہ ذیل احتیاطی باتوں کو ذہن نشین کرنا چاہیئے۔

(1) مواد کی اعتباری قابلیت **Reliability of Data** : صرف قابل اعتبار ثانوی مواد کو استعمال کرنا چاہیئے۔ مواد کی اعتباری قابلیت کو جانچنے کے لئے مندرجہ ذیل پہلوؤں پر غور کرنا چاہیئے۔

(i) کس نے مواد اکٹھا کیا ہے؟

(ii) مواد کے ماخذات کیا ہیں؟

(iii) کیا اسے موزوں طریقے سے اکٹھا کیا گیا ہے؟

(iv) اس کو کب اکٹھا کیا گیا؟

(v) کیا اس کا مؤلف کوئی جانبدارانہ میلان رکھتا تھا؟

(vi) صحت کا کون سا درجہ مطلوب تھا؟ کیا اسے حاصل کیا گیا؟

اگر اکٹھا کرنے والی ایجنسی کوئی حکومتی ادارہ ہے یا بین الاقوامی تنظیم یا بااختیار ادارہ ہے تو ثانوی مواد کو قابل اعتماد قرار دیا جاسکتا ہے۔ اس کے برخلاف چند افراد یا گم نام خانگی تنظیموں کا اکٹھا کیا گیا مواد قابل اعتبار نہیں ہوتا۔ حکومتی شعبوں اور پارلیمنٹ ایکٹ کے تحت قائم شدہ کارپوریشنوں اور بین الاقوامی اداروں کے مطبوعہ ماخذات سے اکٹھا شدہ ثانوی مواد قابل اعتبار ہوتا ہے۔

(2) مواد کی موزونیت **Suitability of Data** : کسی ایک تحقیق کے لئے موزوں مواد کا دوسری تحقیقات کے لئے موزوں ہونا ضروری نہیں۔ لہذا آپ کو جانچنا ہوگا کہ آیا مواد آپ کے مطالعہ کے لئے موزوں ہے یا نہیں اگر دستیاب مواد ناموزوں ہے تو اسے استعمال نہیں کرنا چاہیے۔ اس لیے آپ کو اکٹھا شدہ مواد کی مختلف اصطلاحات اور اکائیوں کی تعریفوں کو باریکی سے جانچنا ہوگا۔ اسی طرح یہ بھی دیکھنا ہوگا کہ وہ اصل تحقیق جس کے لیے مواد اکٹھا کیا گیا ہے اس کا مقصد، اس کی وسعت اور نوعیت کیا تھی۔ اگر ان پہلوؤں سے یہ مواد آپ کی تحقیق سے تعلق رکھتا ہے تو آپ کے لیے کار آمد ہے ورنہ نہیں۔ مثال کے طور پر آپ مزدوروں کے بھتوں (allowances) کے بشمول اجرت کی سطحوں کا جائزہ لینا چاہتے ہوں اور ثانوی مواد صرف اصل اجرت سے متعلق ہو تو یہ موجودہ تحقیق کے لئے موزوں نہیں ہوگا۔

(3) اکتفائے مواد **Adequacy of Data** : مواد کے کافی یا ناکافی ہونے کا فیصلہ جائزے (Survey) کی ضروریات اور اس کے جغرافیائی رقبہ سے متعلق دستیاب ثانوی مواد کے پیش نظر کیا جانا چاہیے۔ مثال کے طور پر اگر ہمارا مقصد ہندوستان میں کاٹن ٹکسٹائیل انڈسٹری (سوتی کپڑے کی صنعت) کے مزدوروں کی اجرت کا مطالعہ کرنا ہے اور اگر مطبوعہ مواد تمام صنعتوں کے مزدوروں کی شرح اجرت کی شرح فراہم کرتا ہے تو اس مواد سے ہمارے مقصد کی تکمیل نہیں ہوتی ہے۔ مواد کے کافی یا ناکافی ہونے کے سوال پر اس تناظر میں بھی غور کیا جاسکتا ہے کہ دستیاب مواد کس مدت سے متعلق ہے۔ مثال کے طور پر ہمیں گذشتہ 20 سال کے دوران قیمتوں میں کمی و بیشی سے متعلق مواد درکار ہے لیکن گذشتہ 4 سال کے لئے مواد دستیاب ہے تو یہ مواد ہمارے مقصد کے لئے ناکافی ہوگا۔ اسی طرح اگر مواد کی صحت کی سطح، تحقیق کے مقاصد کے لئے ناکافی ہو تو بھی تحقیق کار کو چاہیے کہ اس قسم کا ناکافی مواد استعمال نہ کرے۔

چنانچہ ثانوی مواد کو اسی صورت میں استعمال کرنا چاہیے جبکہ یہ مواد قابل اعتبار اور ہمارے مقصد کے لئے موزوں اور کافی ہو۔ یہ امر قابل غور ہے کہ اگر معتبر ذرائع سے ثانوی مواد دستیاب ہے جو ہمارے مقصد کی تکمیل کر سکتا ہے تو ابتدائی مواد کے حصول کے لئے عملی جائزہ منظم کر کے وقت اور پیسہ ضائع نہیں کرنا چاہیے۔

5.7 ثانوی مواد کے فوائد اور نقصانات

Advantages and Disadvantages of Secondary Data

فوائد Advantages :

(1) ثانوی مواد کا استعمال کفایت بخش ہے کیونکہ مواد کے اکٹھا کرنے کے لئے فارموں کی طباعت اور شمار کنندوں کی ایک بڑی تعداد کے تقرر پر عائد ہونے والے اخراجات کی بچت ہو جاتی ہے۔

(2) ثانوی مواد، اگر دستیاب ہو تو ابتدائی مواد کی بہ نسبت بہت جلد حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ثانوی مواد چند دنوں میں اکٹھا کیا جاسکتا ہے جبکہ ابتدائی

مواد حاصل کرنے کے لئے فیلڈ ورک (میدانی کام) کی تکمیل میں مہینوں لگ سکتے ہیں۔ مزید یہ کہ ثانوی مواد کی مدد سے تحقیق کم وقت میں مکمل کرلی جاسکتی ہے۔

(3) ثانوی مواد سے تحقیق کاروں یا تحقیقی اداروں کا کام بہت آسان ہو جاتا ہے کیونکہ بیک وقت کئی موضوعات پر ابتدائی مواد جمع کرنا ان کے لئے ناممکن ہے۔ مثلاً مردم شماری، قومی آمدنی وغیرہ کے متعلق مواد اکٹھا کرنا کسی فرد واحد یا کسی خانگی ادارے کے بس کی بات نہیں البتہ یہ مواد سرکاری مطبوعات سے بآسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

(4) عالمی تجارت، صنعت، آبادی اور صحت جیسے گوناگوں مظاہر سے متعلق عالمگیر مواد اقوام متحدہ، عالمی بینک، بین الاقوامی مالیاتی فنڈ جیسی بین الاقوامی ایجنسیوں کی جانب سے شائع ہونے والے ثانوی مواد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

(5) کبھی کبھی اس پہلے سے حاصل شدہ مواد میں بہت ساری قابل استعمال معلومات شامل ہو سکتی ہیں جس کو تحقیق کار اچھی طرح سے استعمال کر سکتا ہے اور وہ اپنے زیر تحقیق مسائل سے متعلق نئی بصیرت حاصل کر سکتا ہے۔

(6) عملی طور پر اکثر شماریاتی تجزیے ثانوی مواد پر منحصر ہوتے ہیں کیونکہ کئی مختلف النوع شعبوں کے متعلق ثانوی مواد دستیاب ہوتا ہے۔ ابتدائی مواد کو ہم صرف اسی وقت استعمال کرتے ہیں جب کہ ثانوی مواد تجزیے کے لئے مستحکم بنیاد فراہم نہیں کر سکتا۔

نقصانات Disadvantages :

(1) ثانوی مواد کا استعمال خطرے سے خالی نہیں ہوتا۔ اس کو اسی وقت استعمال کرنا چاہیئے جب کہ مواد کی موزونیت سے متعلق اطمینان ہو جائے۔ اگر ایسا نہ کیا جائے تو تحقیق کے نتائج پوری طرح سے صحیح نہیں ہو سکتے۔

(2) ایسا ثانوی مواد حاصل کرنا مشکل ہے جو تحقیق کے جملہ مقاصد کی تکمیل کر سکتا ہے۔

(3) ایسے ثانوی مواد کا حصول بھی مشکل ہے جو کافی حد تک صحیح و درست ہے۔ جانبدار میلان ناکافی نمونے اور تعریف کی غلطی وغیرہ کے سبب ثانوی مواد غیر صحیح ہو جاتا ہے۔

(4) بسا اوقات ثانوی مواد کی عدم دستیابی کے سبب ہم کو لازماً ابتدائی مواد اکٹھا کرنا پڑتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ C

(1) ثانوی مواد کے پانچ مطبوعہ ماخذوں کے نام لکھیے۔

.....

.....

.....

.....

(2) ثانوی مواد کے استعمال میں کونسے بنیادی عوامل کو دھیان میں رکھنا چاہیئے؟

.....

.....

.....

.....

(3) تحریر کیجیے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) ثانوی مواد کا استعمال، ابتدائی مواد کے استعمال کی بہ نسبت ہمیشہ کفایتی ہوتا ہے۔

(ii) ثانوی مواد ہمیشہ مطبوعہ ماخذوں میں دستیاب ہوتا ہے۔

(iii) ثانوی مواد کو اگر موزونیت، اعتبار اور اکتفاء کی جانچ کے بغیر استعمال کیا جائے تو صحیح نتائج حاصل نہیں ہوتے۔

(iv) غیر مطبوعہ ثانوی مواد قابل اعتبار نہیں ہوتا۔

5.8 خلاصہ Let Us Sum Up

شماریاتی مواد یا تو ابتدائی مواد ہوتا ہے یا ثانوی۔ ابتدائی مواد کا مطلب ہوتا ہے پہلی مرتبہ اکٹھا کیے جانے والا اصلی مواد۔ ثانوی مواد کا تعلق، سابق میں کسی شخص کے اکٹھا کردہ مواد سے ہوتا ہے جس کو موجودہ تحقیق میں استعمال کیا جارہا ہے۔ مواد کے انتخاب پر اثرانداز ہونے والے عوامل حسب ذیل ہیں : (1) تحقیق کا مقصد اور وسعت (2) مالی وسائل (3) وقت کا عنصر (4) تحقیق کار کا رتبہ (5) انسانی وسائل (6) مطلوبہ صحت اور (7) ثانوی مواد کی دستیابی۔

ابتدائی مواد اکٹھا کرنے میں متعدد مسائل پیش آتے ہیں۔ ان میں اہم یہ ہیں : مواد اکٹھا کرنے کی اکائی کی تعریف کا مسئلہ، اکٹھا کرنے کی تکنیک سے متعلق مسئلہ، فریم (سانچہ) تیار کرنے کا مسئلہ، درجۂ صحت تعین کرنے کا مسئلہ، سوالنامہ / شیڈیول کی تشکیل کا مسئلہ، شمار کنندوں کا انتخاب اور تربیت کا مسئلہ، جواب نادہندگی سے نمٹنے کا مسئلہ، میدانی کام (فیلڈ ورک) کی نگرانی کا مسئلہ اور دیگر انتظامی پہلو۔

ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے کئی طریقے ہیں یعنی مشاہدہ، انٹرویو، مراسلہ نگاروں اور مقامی رپورٹوں سے معلومات کا حصول، سوالنامے اور شیڈیول۔ ان میں سے ہر ایک طریقے کی اپنی کچھ خوبیاں ہیں اور کچھ خامیاں۔ ہر طرح کی صورت حال کے لیے ایک ہی طریقہ موزوں نہیں ہوتا۔ تحقیق کے مقصد اور نوعیت، مالیہ اور وقت کی دستیابی اور مطلوبہ صحت کو پیش نظر رکھتے ہوئے، صورت حال کی ضرورت کے مطابق، تحقیق کار کو کوئی ایک طریقہ منتخب کرنا چاہیے۔

ثانوی مواد مطبوعہ اور غیر مطبوعہ دونوں ذرائع سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ثانوی مواد کو ہمیشہ محتاط انداز میں استعمال کرنا چاہیے۔ اس کو استعمال کرنے سے پہلے یہ یقین کرلینا چاہیے کہ یہ قابل اعتبار، موزوں اور کافی ہے، بصورت دیگر گمراہ کن نتائج برآمد ہوسکتے ہیں۔ ثانوی مواد کے کچھ فوائد اور کچھ نقصانات ہیں۔

5.9 کلیدی الفاظ Key Words

شمار کنندے (Enumerators) : وہ اشخاص جو جواب دہندوں کے پاس جاکر ان سے، پہلے سے تیار کیے ہوئے شیڈیول کے ذریعہ معلومات اکٹھا کرتے ہیں۔

انٹرویو (Interview) : اطلاع دہندوں سے شخصی ملاقات کرکے سوال و جواب کے ذریعہ مواد جمع کرنے کا طریقہ۔

جواب نادہندگی (Non-response) : اطلاع دہندوں کی جانب سے باضابطہ خانہ پُری کے بعد سوالنامہ کی عدم واپسی کا مسئلہ۔

مشاہدہ (Observation) : وقوع پذیر واقعہ کے مشاہدے سے معلومات اکٹھا کرنے کا طریقہ۔

رہنما جائزہ (Pilot Survey) : اصل جائزے کی نقل اور ریہرسل، رہنما جائزے سے حاصل ہونے والے تجربہ کو سوالنامہ کی کی تکمیل کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

ابتدائی مواد (Primary Data) : وہ اصلی مواد جو پہلی مرتبہ اکٹھا کیا جاتا ہے۔

مطبوعہ ماخذات (Published Sources) : مطبوعہ شماریاتی مواد کے ماخذی وسایل۔

سوالنامہ (Questionnaire) : تحقیق سے متعلق سوالات کی فہرست پر مشتمل ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کا ایک پرچہ سوالات جسے عموماً بذریعہ ڈاک اطلاع دہندوں کو بھیجا جاتا ہے اور جواب دہندہ خود جوابات لکھتا ہے۔

جدول (Schedule) : ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے لیے جدول جس میں ایک مخصوص تعداد میں سوالات درج ہوتے ہیں جن کی خانہ پُری مقرر کردہ شمار کنندے کرتے ہیں۔

ثانوی مواد (Secondary Data) : وہ مواد جس کو کسی اور شخص نے اکٹھا یا مدون کیا تھا اور جس کو موجودہ تحقیق میں استعمال کیا جارہا ہے۔

5.10 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات

.4 A (i) غلط (ii) صحیح (iii) صحیح (iv) غلط (v) صحیح (vi) غلط (vii) غلط (viii) غلط

.4 B (i) مشاہدہ
(ii) مراسلہ نگاروں اور مقامی رپورٹوں کے ذریعہ
(iii) سوالنامہ
(iv) سوالنامہ
(v) جدول (شیڈیول)

.3 C (i) غلط (ii) غلط (iii) صحیح (iv) غلط

5.11 امتحانی سوالات Terminal Questions

(1) ابتدائی اور ثانوی مواد کا فرق بیان کیجیے۔ کسی تحقیق میں استعمال ہونے والے مواد کے انتخاب پر اثرانداز ہونے والے عوامل کی تفصیل بیان کیجیے۔

(2) ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے دوران، تحقیق کار کو عام طور پر پیش آنے والے مسائل کی وضاحت کیجیے۔

(3) ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے مختلف طریقوں کی تشریح کیجیے اور ان کی خوبیاں اور خامیاں بھی بیان کیجیے۔

(4) "موزوں جانچ پڑتال کے بغیر ثانوی مواد کا استعمال ہرگز محفوظ نہیں ہوتا" تشریح کیجیے۔

(5) ثانوی مواد کے ماخذات کیا ہیں؟ ثانوی مواد استعمال کرنے کے فوائد اور نقصانات کی صراحت کیجیے۔

نوٹ : یہ سوالات اس اکائی کے سمجھنے میں مددگار ثابت ہوں گے۔ ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجیے لیکن آپ کے جواب یونیورسٹی کو نہ بھیجیے۔ یہ آپ کی مشق کے لیے ہیں۔

اکائی 6 مواد کی درجہ بندی

UNIT:6 - CLASSIFICATION OF DATA

Structure	ساخت	
Objectives	مقاصد	6.0
Introduction	تمہید	6.1
Meaning of Classification	درجہ بندی کے معنی	6.2
Objectives of Classification	درجہ بندی کے مقاصد	6.3
Methods of Classification	درجہ بندی کے طریقے	6.4
Classification According to Attributes	6.4.1 اوصاف کے مطابق درجہ بندی	
Classification According to Variables	6.4.2 متغیروں کے مطابق درجہ بندی	
Terms Relating to Frequency Distribution	تعددی تقسیم سے متعلق اصطلاحات	6.5
Formation of a Frequency Distribution	تعددی تقسیم کی تشکیل	6.6
Data Array	6.6.1 مواد کی قطار بندی	
Steps in constructing a Frequency Distribution	6.6.2 تعددی تقسیم کی تشکیل میں اقدامات	
Guidelines for Selecting the Class Intervals	6.6.3 جماعتی وقفوں کے انتخاب کے لئے رہنما خطوط	
Let Us Sum Up	خلاصہ	6.7
Key Words	کلیدی الفاظ	6.8
Answers to Check Your Progress	اپنی معلومات کی جانچ: جوابات	6.9
Terminal Questions/Exercises	امتحانی سوالات	6.10

6.0 مقاصد Objectives

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:۔

- درجہ بندی کے معنی سمجھا سکیں۔
- درجہ بندی کے مقاصد اور طریقوں کی وضاحت کر سکیں۔
- تعددی تقسیم کے متعلق اصطلاحات کی وضاحت کر سکیں اور
- تعددی تقسیم کی تشکیل کر سکیں۔

6.1 تمہید Introduction

آپ نے ابتدائی اور ثانوی مواد وں کو اکٹھا کرنے کے مختلف ماخذوں اور طریقوں کے متعلق معلومات حاصل کیں چونکہ اکٹھا شدہ مواد خام شکل میں ہوتا ہے نہ آپ اس کی ترجمانی کر سکتے ہیں اور نہ ہی کار آمد نتائج بر آمد کر سکتے ہیں۔اس لئے جمع شدہ مواد کی بنیاد پر بامعنی نتائج اخذ کرنے کے لئے یہ

ضروری ہے کہ اس کو مختصر اور سادہ شکل میں پیش کیا جائے۔ مواد کی درجہ بندی مواد کے ذخیرے کو مختصر اور سادہ شکل میں ظاہر کرنے میں معاون ہوتی ہے۔ اس اکائی میں آپ درجہ بندی کے معنی، مقاصد اور اس کے مختلف طریقوں کے متعلق سیکھیں گے۔ آپ تعددی تقسیم کی مختلف اقسام اور ان کی تشکیل کے طریقے بھی سیکھیں گے۔

6.2 درجہ بندی کے معنی Meaning of Classification

درجہ بندی کا مطلب ہے مواد کے ذخیرے کو مماثلتوں اور مشابہتوں کی بنیاد پر درجوں اور گروہوں میں ترتیب دینا۔ مواد کے تمام مشابہ مدات کو ایک درجہ میں اور تمام غیر مشابہ مدات کو مختلف درجوں میں رکھا جاتا ہے۔ شماریاتی مواد کی درجہ بندی اس کی خصوصیات کے مطابق کی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر، اگر ہم نے کسی سال میں کسی یونیورسٹی میں داخلہ لینے والے طلبہ کی تعداد سے متعلق مواد اکٹھا کیا ہے تو ان طلبہ کی درجہ بندی جنس کی بنیاد پر کی جاسکتی ہے۔ اس صورت میں تمام لڑکوں کو ایک درجہ میں اور تمام لڑکیوں کو دوسری درجہ میں رکھا جائے گا۔ عمر، نشانات، ازدواجی حیثیت، قد وغیرہ کی بنیاد پر بھی طلبہ کی درجہ بندی ہو سکتی ہے۔ مواد کی درجہ بندی کے لئے منتخب خصوصیات کا مطالعہ تحقیقاتی مقاصد کے تابع ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر ہم طلبہ کے مذہبی اختلاط کا مطالعہ کرنا چاہتے ہیں تو ہم طلبہ کو مذہب کی بنیاد پر درجہ بند کریں گے۔

6.3 درجہ بندی کے مقاصد Objectives of Classification

درجہ بندی سے مندرجہ ذیل مقاصد کے حصول میں مدد ملتی ہے۔

(1) مواد کے ذخیرے کو درجہ بندی کے ذریعہ جامع اور سادہ شکل میں پیش کیا جاسکتا ہے۔

(2) یہ مواد کے ذخیرے کو مماثلت اور مشابہت کی بنیاد پر تقسیم کرتی ہے تاکہ تقابل کیا جاسکے۔

(3) یہ خام مواد کو منظم طریقے سے پیش کرنے کا عمل ہے جس کی وجہ سے ہم 'معنی خیز' نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔

(4) اس سے مواد کی جدول سازی اور تجزیہ کی بنیاد فراہم ہوتی ہے۔

(5) اس سے مواد کی شکل اور جسامت متعین کرنے میں مدد ملتی ہے اور ہم کو مواد کی ممکنہ خوبیوں کی شناخت میں مدد ملتی ہے۔

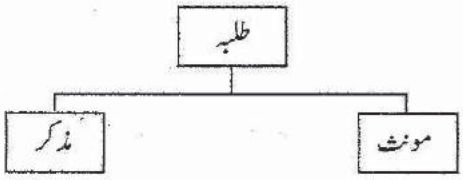
6.4 درجہ بندی کے طریقے Methods of Classification

آپ نے درجہ بندی کے معنی اور مقاصد کا مطالعہ کیا۔ اب ہم درجہ بندی کے طریقوں پر توجہ دیں گے۔ عموماً درجہ بندی کے دو طریقے ہیں۔
(i) صفات کے مطابق درجہ بندی (ii) متغیروں کے مطابق درجہ بندی۔

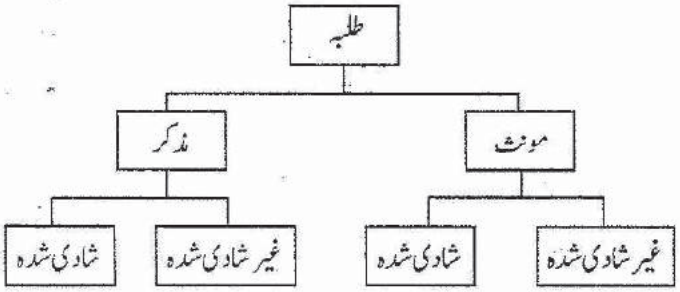
6.4.1 اوصاف کے مطابق درجہ بندی Classification According to Attributes

صفت ایک کیفیتی خاصیت ہے جسے عددی شکل میں ظاہر نہیں کیا جاسکتا ہے۔ کسی صفت کی موجودگی یا غیر موجودگی کو محسوس کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر ذہانت، مذہب، ذات، جنس وغیرہ صفات ہیں۔ ان صفات کی مقدار مقرر نہیں کی جاسکتی۔ اوصاف کی بنا پر درجہ بندی مطلوب ہو تو کسی صفت کی موجودگی یا عدم موجودگی (جیسے مذکر و مونث) یا اختلافی خصوصیات (differing qualities) کی بنا پر گروہوں میں امتیاز کیا جاتا ہے۔ ایک فطری خط فاصل کے ذریعہ کسی وصف کی خصوصیات میں بآسانی امتیاز کیا جاسکتا ہے۔ اس فطری اختلاف کی بنا ہم اس گروہ کا تعین کر سکتے ہیں جس میں کوئی مخصوص مد شامل ہے۔ مثال کے طور پر اگر بالوں کے رنگ کو درجہ بندی کی بنیاد قرار دیا جائے، تو بھورے رنگ کے بال والوں کا ایک گروہ ہوگا اور کالے رنگ کے بال والوں کا دوسرا گروہ ہوگا۔ اوصاف کی بنیاد پر درجہ بندی کی دو اقسام ہیں۔

(1) سادہ درجہ بندی Simple Classification : سادہ درجہ بندی میں صرف ایک صفت کی بنیاد پر مواد کو درجہ بند کیا جاتا ہے۔ جنس کی بنیاد پر درجہ بندی، سادہ درجہ بندی کی ایک مثال ہے۔ اس کو مندرجہ ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔



(2) کثیر پہلو درجہ بندی Manifold Classification :اس درجہ بندی میں مواد کو ایک سے زیادہ صفات کی بنیاد پر درجہ بند کیا جاتا ہے ۔ کسی یونیورسٹی میں جنس اور ازدواجی حیثیت کی بنیاد پر طلبا کی تعداد سے متعلق مواد مندرجہ ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔



6.4.2 متغیروں کے مطابق درجہ بندی Classification According to Variables

متغیروں سے مراد مواد کی قابل تعین خصوصیات ہیں جن کو تعداد میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ متغیروں کی مثالیں ہیں اجرت، عمر، قد، وزن، نشانات، فاصلہ وغیرہ۔ جیسا کہ آپ جانتے ہیں، ان متغیروں کو مقداری شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے درجہ بندی کی اس شکل میں مواد کو تعددی تقسیم کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ تعددی تقسیم ایک جدولی اظہار ہے جس میں عموماً مواد کو درجوں میں ترتیب دے کر ہر درجہ میں شامل مشاہدوں کی تعداد کو دکھلایا جاتا ہے۔ متغیروں کی تعداد پر مبنی تعددی تقسیم کی تین اقسام ہیں (i) یک متغیرہ تعددی تقسیم (2) دو متغیرہ تعددی تقسیم (3) کثیر متغیرہ تعددی تقسیم۔

(1) یک متغیرہ تعددی تقسیم Uni-variate Frequency Distribution :صرف ایک متغیرہ رکھنے والی تعددی تقسیم کو یک متغیرہ تعددی تقسیم کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی درجہ میں محصلہ نشانات کی بنیاد پر طلبہ کی تقسیم کی جاتی ہے۔ جس کو مندرجہ ذیل تمثیل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

تمثیل 1

یک متغیرہ تعددی تقسیم کی ایک مثال

شماریات میں نشانات	طلبہ کی تعداد
0-10	15
10-20	25
20-30	30
30-40	20
40-50	10
جملہ	100

تمثیل 1 میں تعددی تقسیم سے متعلق مندرجہ ذیل نکات کو نوٹ کیا جاسکتا ہے:۔

(1) شماریات میں نشانات کو مختلف جماعتوں یعنی 0-10, 10-20, 20-30 وغیرہ سے تقسیم کیا گیا ہے۔

(2) نشانات کی پہلی جماعت 0-10 میں وہ طلبہ شامل ہیں جن کے محصلہ نشانات "O" یا اس سے زیادہ اور 10 سے کم ہیں۔ اسی طرح دوسری جماعت 10-20 میں وہ طلبہ شامل ہیں جن کے محصلہ نشانات 10 یا 10 سے زیادہ اور 20 سے کم ہیں۔

(3) ان درجوں کے تحت آنے والے طلبہ کو متعلقہ جماعتوں میں رکھا گیا ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ جماعت 0-10 میں طلبہ کی تعداد 15 ہے، جماعت 10-20 میں طلبہ کی تعداد 25 وغیرہ۔ کسی مخصوص جماعت میں شامل طلبہ کی تعداد کو اُسی جماعت کا تعدد کہا جاتا ہے۔

(2) دو متغیرہ تعددی تقسیم (Bi-variate Frequency Distribution): دو متغیروں کی حامل تعددی تقسیم کو دو متغیرہ تعددی تقسیم کہا جاتا ہے۔ تمثیل 1 میں دی گئی یک متغیرہ تعددی تقسیم صرف شماریات (کے مضمون) میں طلبہ کے حاصل کردہ نشانات کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر کسی تعددی تقسیم میں دو متغیرے شامل ہوں جیسے (مضمون) شماریات میں نشانات اور عمر، تو اس کو دو متغیرہ تعددی تقسیم کہا جائے گا۔ دو متغیری تعددی تقسیم کے لئے دیکھیے تمثیل 2۔

تمثیل 2

دو متغیرہ تعددی تقسیم کی مثال

شماریات میں نشانات	طلبہ کی تعداد مع عمر گزشتہ یوم پیدائش پر سال میں				
	18سال	19سال	20سال	21سال	Total
0 - 10	1	4	8	2	15
10 - 20	4	8	9	4	25
20 - 30	-	3	17	10	30
30 - 40	-	5	10	5	20
40 - 50	-	-	1	9	10
جملہ	5	20	45	30	100

تمثیل 2 میں دی گئی دو متغیرہ تعددی تقسیم کے متعلق مندرجہ ذیل نکات قابل غور ہیں۔

(1) شماریات میں نشانات کو بطور 0 - 10 ' 10 - 20 ' 20 - 30 تقسیم کیا گیا ہے۔ جبکہ گذشتہ یوم پیدائش کو بنیاد مان کر عمر کو 18 سال، 19 سال اور 20 سال وغیرہ لیا گیا ہے۔

(2) 0 یا اس سے زیادہ اور 10 سے کم نشانات حاصل کرنے والے اور 18 سال کی عمر کے طلبہ کو 10/18 - 0 کے بالمقابل رکھا گیا ہے۔ یہ 1 عدد ہے۔ اسی طرح 10-0 درجہ میں شامل اور 19 ' 20 اور 21 سال عمر کے طلبہ کی تعداد بالترتیب 4 ' 8 اور 9 ہے۔ 18 سال کی عمر کے کل طلبہ کی تعداد 5 ہے جن میں ایک کو 10-0 نشانات کی درجہ میں اور بقیہ 4 کو 20-10 نشانات کی درجہ میں رکھا گیا ہے وغیرہ۔

(3) کثیر متغیرہ تعددی تقسیم (Multi-variate Frequency Distribution): دو سے زیادہ متغیروں کے ساتھ تعددی تقسیم کو کثیر متغیرہ تعددی تقسیم کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی جماعت میں طلبہ کی درجہ بندی نشانات، عمر اور جنس کی بنیاد پر کی جاسکتی ہے۔ اب

تمثیل 2 میں پیش کردہ مثال کو لیجئے اور جنس کی بنیاد پر مزید درجہ بندی کیجئے۔ تمثیل 3 کا بغور مطالعہ کیجئے اور غور کیجئے کہ یہ عمل کس طرح کیا گیا ہے۔

تمثیل 3

کثیر متغیرہ تعددی تقسیم کی مثال

شماریات میں نشانات	طلبہ کی تعداد مع عمر (سال میں) گزشتہ یوم پیدائش پر													
	18 سال		19 سال		20 سال		21 سال		22 سال		جملہ	
	مرد	عورت	مرد	عورت	مرد	عورت	مرد	عورت	مرد	عورت	مرد	عورت
0 - 10	-	1	2	2	5	3	2	-	-	9	6
10 - 20	3	1	4	4	4	5	4	-	-	15	10
20 - 30	-	-	1	2	7	10	7	3	-	-	15	15
30 - 40	-	-	3	2	5	5	3	2	-	-	11	9
40 - 50	-	-	-	-	-	1	2	2	3	2	5	5
جملہ	3	2	10	10	21	24	18	7	3	2	55	45

اپنی معلومات کی جانچ A

(1) درجہ بندی کیا ہے؟

.....

.....

.....

.....

(2) درجہ بندی کے مقاصد کیا ہوتے ہیں؟

.....

.....

.....

.....

(3) صفات کی بنیاد پر سادہ درجہ بندی اور کثیر پہلو درجہ بندی میں کیا فرق ہے؟

.....

.....

.....

.....

(4) صفات کے مطابق درجہ بندی اور متغیروں کے مطابق درجہ بندی کے درمیان فرق بتلائیے۔

.....

.....

.....

.....

(5) یک متغیرہ اور دو متغیرہ تعددی تقسیم کے درمیان کیا فرق ہے؟

.....

.....

.....

.....

(6) لکھیے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) مواد کی درجہ بندی کا مطلب ہے مماثلت اور مشابہت کی بنیاد پر مواد کی مختلف درجوں میں ترتیب ۔

(ii) درجہ بندی، مواد کے ذخیرے کو مختصر اور سادہ شکل میں پیش کرنے میں مدد کرتی ہے۔

(iii) درجہ بند مواد کی مدد سے کوئی تقابل ممکن نہیں۔

(iv) جنس اور عمر کی بنیاد پر درجہ بند مواد، سادہ درجہ بندی کی ایک مثال ہے۔

(v) تعددی تقسیم جدولی اظہار ہے جس میں عموماً مواد کو درجوں میں ترتیب دے کر ہر درجہ میں شامل مشاہدوں کی تعداد کو دکھلایا جاتا ہے۔

(vi) ایک دو متغیرہ تعددی تقسیم دو متغیروں پر مبنی تقسیم کو ظاہر کرتی ہے۔

(7) قوسوں میں دیئے گئے الفاظ سے، موزوں لفظ کو منتخب کر کے خالی جگہ کو پُر کیجئے۔

(i) صفت، مواد کے ..... پہلو سے متعلق ہے۔ (مقداری / کیفیتی)

(ii) قد کی بنیاد پر، کسی یونیورسٹی کے طلبا کی درجہ بندی ..... کے مطابق درجہ بندی کی مثال ہے۔ (صفت / متغیرہ)

(iii) مذہب کی بنیاد پر، کسی یونیورسٹی کے طلبا کی درجہ بندی ..... کے مطابق درجہ بندی کی مثال ہے۔ (صفت / متغیرہ)

(iv) لوگوں کے اوزان پر مبنی، تعددی تقسیم ..... تعددی تقسیم کی مثال ہے۔ (یک متغیرہ / ذو متغیرہ)

(v) عمر، وزن اور قد پر مبنی تعددی تقسیم ..... تعددی تقسیم کی مثال ہے۔ (ذو متغیرہ / کثیر متغیرہ)

6.5 تعددی تقسیم سے متعلق اصطلاحات

Terms Relating to Frequency Distribution

تعددی تقسیم کے معنی اور طریقوں کا مطالعہ کرنے کے بعد اب ہمیں تعددی تقسیم سے متعلق اصطلاحات کے بارے میں بحث کرنا چاہیئے۔ تعددی تقسیم سے متعلق کئی اصطلاحات ہیں۔ ہمارے لئے ضروری ہے کہ پہلے ہم ان کو سمجھیں۔

(1) غیر مسلسل (ممیز) اور مسلسل متغیرے (Discrete and Continuous Variables) : غیر مسلسل متغیرہ وہ ہے جو الگ الگ قدروں کو اختیار کرتا ہے یا جس کا اظہار محدود تدریجی درجوں میں ہوتا ہے۔ عام طور پر اسکی کوئی کسری قدر نہیں ہوتی۔ عموماً یہ کسی گنتی کا نتیجہ ہوتا ہے، کسی کارخانے میں مزدوروں کی تعداد، مشینوں کی تعداد، کسی خاندان میں بچوں کی تعداد، کسی مخصوص دن حادثوں کی تعداد وغیرہ۔ غیر مسلسل متغیرہ کی مثالیں ہیں۔ اس کے برعکس ایک مسلسل متغیرہ میں قدروں کے ایک وسیع سلسلہ میں کسی کسری قدر کو اختیار کی صلاحیت ہوتی ہے جو کسی چیز کی پیائش کا نتیجہ ہوتا ہے۔ کسی درجہ میں طلبہ کا وزن، کسی ادارے کے ملازمین کی آمدنی، کسی شہر کے باشندوں کی عمر وغیرہ مسلسل متغیرہ کی مثالیں ہیں غیر مسلسل (ممیز) متغیروں کے لئے تیار کردہ تعددی تقسیم کو غیر مسلسل تقسیم کہتے ہیں جب کہ مسلسل متغیرہ کے لئے تیار کردہ تعددی تقسیم کو مسلسل تقسیم کہا جاتا ہے۔ تقسیم کی دونوں قسموں کو تمثیل 4 اور تمثیل 5 میں بتلایا گیا ہے۔

تمثیل 4

غیر مسلسل (ممیز) تعددی تقسیم کی مثال

ہاکی کے میاچ میں اسکور کیے گئے گول کی تعداد	ہاکی مقابلوں کی تعداد
0	20
1	15
2	10
3	3
4 (اور اس سے زاید)	2
جملہ	50

تمثیل 5

مسلسل تعددی تقسیم کی مثال

طلبہ کا قد (سنٹی میٹروں میں)	طلبہ کی تعداد
130 - 140	5
140 - 150	15
150 - 160	20
160 - 170	5
170 - 180	5
جملہ	50

تمثیل 4 میں، ہاکی میاچ میں بنائے گئے گولس کی تعداد کا متغیرہ غیر مسلسل (ممیز) متغیرہ ہے۔ اسی طرح تمثیل 5 میں طلبہ کے قد کا متغیرہ مسلسل متغیرہ ہے۔ مندرجہ بالا مثال سے یہ نتیجہ اخذ نہیں کرنا چاہئے کہ جماعتی وقفوں کے ساتھ تعددی تقسیم کو صرف مسلسل متغیرہ کے لئے ہی تیار کیا جاسکتا ہے۔ غیر مسلسل متغیرہ کے لئے بھی جماعتی وقفوں کے ساتھ تعددی تقسیم کو تیار کیا جاسکتا ہے جیسا کہ تمثیل 6 میں بتایا گیا ہے۔

تمثیل 6

غیر مسلسل متغیرہ کے لئے جماعتی وقفوں کے ساتھ تعددی تقسیم

کسی جماعت میں حاضر طلبہ کی تعداد	سال میں کام کے دنوں کی تعداد
10 - 14	8
15 - 19	12
20 - 24	116
25 - 29	114
جملہ	250

تمثیل (6) کے مطابق جماعت میں حاضر طلبہ کی تعداد کا متغیرہ، غیر مسلسل متغیرہ ہے لیکن اسے یہاں جماعتی وقفوں کے ساتھ مسلسل متغیرہ کی طرح ظاہر کیا گیا ہے۔ ایسی تقسیمیں بہ ظاہر مسلسل تقسیم کی طرح دکھائی دیتی ہیں لیکن نوعیت کے اعتبار سے غیر مسلسل یا جداگانہ ہوتی ہیں۔

(2) جماعتی حدود (Class-Limits) : ہر جماعت یا جماعتی وقفہ کے دو حدود ہوتے ہیں۔

(1) زیریں حد

(2) بالائی حد۔

کسی جماعت میں ممکنہ اقل ترین پیمائش کو زیریں حد کہا جاتا ہے جبکہ اعظم ترین ممکنہ پیمائش کو بالائی حد کہتے ہیں۔

تمثیل 6 پر غور کیجئے۔ اس تمثیل میں پیش کردہ تعددی تقسیم میں پہلی جماعت یعنی 14 - 10 کے جماعتی حدود 10 اور 14 ہیں۔ اس میں اقل ترین ممکنہ قدر 10 اور اعظم ترین ممکنہ قدر 14 ہے۔ اسی طرح سے، دوسری جماعت یعنی 19 - 15 کے لئے زیریں اور بالائی حدیں بالترتیب 15 اور 19 ہیں۔

(3) کسی جماعتی وقفے کا وسطی نقطہ (Mid-point of a Class Interval) : کسی جماعت کا وسطی نقطہ وہ ہے جو زیریں اور بالائی حدوں کے درمیان نصف مقام پر واقع ہوتا ہے۔ علامتوں کے ذریعہ اس کو مندرجہ ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\text{وسطی نقطہ یا وسطی قدر} = \frac{L + U}{2}$$

جہاں پر L جماعتی وقفے کی زیریں انتہا اور U، بالائی انتہا ہے۔

بہ الفاظ دیگر زیریں انتہا اور بالائی انتہا کو جمع کر کے اس کو 2 سے تقسیم کرنے پر وسطی نقطہ حاصل ہوتا ہے۔ شماریات (کے مضمون) میں محصلہ نشانات کے وسطی نقاط تمثیل (7) میں محسوب کیے گیے ہیں۔

تمثیل 7

جماعتی وقفوں کے وسطی نقاط کی تخمیب

(مضمون) شماریات میں نشانات	طلبا کی تعداد	جماعتی وقفے کا وسطی نقطہ
0 - 10	15	$\frac{0 + 10}{2} = 5$
10 - 20	25	$\frac{10 + 20}{2} = 15$
20 - 30	30	$\frac{20 + 30}{2} = 25$
30 - 40	20	$\frac{30 + 40}{2} = 35$
40 - 50	10	$\frac{40 + 50}{2} = 45$

(4) جماعتی وقفے کی ضخامت (Magnitude of a Class Interval) : کسی جماعتی وقفے کی ضخامت کا مطلب ہوتا ہے اس وقفے کی بالائی حد اور زیریں حد کے درمیان فرق۔ تمثیل 8 پر غور کیجئے اور مطالعہ کیجئے کہ کس طرح مختلف جماعتی وقفوں کی قدر کو محسوب کیا گیا ہے۔

تمثیل 8

جماعتی وقفوں کی ضخامت کی تخمیب

شماریات میں نشانات	طلبا کی تعداد	جماعتی وقفے کی ضخامت
0 - 10	15	10 - 0 = 10
10 - 20	25	20 - 10 = 10
20 - 30	30	30 - 20 = 10
30 - 40	20	40 - 30 = 10
40 - 50	10	50 - 40 = 10

مندرجہ بالا تمثیل 8 میں آپ نے غور کیا ہوگا کہ مختلف جماعتی وقفوں کی مقدار مساوی ہے لیکن یہ ہمیشہ ضروری نہیں ہے کہ کسی تقسیم میں مختلف جماعتوں کی ضخامت مساوی ہو۔ ایسی تقسیم بھی ہو سکتی ہے جس میں مختلف جماعتوں کی ضخامت مختلف ہو۔

(5) کسی جماعت کا تعدد (Frequency of a Class) : کسی جماعت کے حدود میں شامل مشاہدات کی تعداد کو اس جماعت کا تعدد کہتے ہیں۔ اوپر دی گئی تمثیل پر غور کیجئے۔ پہلے جماعتی وقفے یعنی (10 - 0) کے لئے تعدد ہے 15۔ اسی طرح سے دوسرے جماعتی وقفے

(10 - 20) کے لئے تعدد ہے 25 ۔اس کا مطلب ہے کہ پہلے جماعتی وقفے کے حدود کے درمیان 15 اور دوسرے جماعتی وقفے کے حدود کے درمیان 25 طلبہ داخل ہیں وغیرہ۔

(6) جماعتوں کی تعداد اور چوڑائی **(Number and Width of Classes)** : کسی جماعت کی تعداد اور چوڑائی کے متعلق کوئی قطعی قاعدہ مقرر کرنا ممکن نہیں۔ جماعت کی تعداد نہ تو زیادہ بڑی ہونی چاہیئے اور نہ ہی زیادہ چھوٹی۔ سٹرجس (Sturges) نے جماعت کی تعداد کا تعین کرنے کیلئے ایک ضابطہ یعنی فارمولہ (formula) پیش کیا ہے۔ اس کے مطابق :

$$K = 1 + 3.3 \log N,$$

جہاں پر N = درجہ بند کئے جانے والے مدات کی تعداد

K = عام طور پر استعمال کی جانے والی جماعتوں کی تعداد

اگر کسی وجہ سے جماعتوں کی تعداد کو بطور K لینا ممکن نہیں، تو جماعتوں کی تعداد $(K + 2$ اور $K - 2)$ کے درمیان ہونی چاہیئے۔ مثلاً اگر $N = 500$ تو K کی قیمت حسب ذیل طریقوں سے محسوب کی جائے گی۔

$$\begin{aligned} K &= 1 + 3.3 \log N \\ &= 1 + 3.3 \log (500) \\ &= 1 + 3.3 (2.6990) \\ &= 1 + 8.9067 \\ &= 9.9067 \\ &= 10 \end{aligned}$$

لہذا 500 مدات کے لئے جماعتوں کی تعداد 10 ہو سکتی ہے، یا ہم $(K - 2$ اور $K + 2)$ کے درمیان کسی بھی عدد کو لے سکتے ہیں یعنی 8 اور 12 کے درمیان۔ بہر حال یہ ضابطہ صرف رہنما خطوط فراہم کر سکتا ہے۔ جماعتوں کی تعداد مقرر کرتے وقت، یہ بھی ضروری ہے کہ جماعتوں کی چوڑائی کے تعین پر غور کیا جائے۔ جیسا کہ پہلے کہا گیا ہے کہ مختلف وقفوں جماعتی وقفوں کا یکساں ہونا ضروری نہیں ہے تاہم اگر مختلف جماعتوں کی چوڑائی مساوی رکھی جائے تو اس سے تقابل کے لئے ایک ٹھوس بنیاد حاصل ہوتی ہے۔

(7) کھلے کنارے کی تقسیم **(Open-end Distribution)** : کھلے کنارے کی تقسیم میں ایک یا دو جماعتوں کی، جماعتی حد موجود نہیں رہتی۔ یہ ممکن ہے کہ تعدادی تقسیم میں جماعتی وقفہ کی زیریں حد اور آخری جماعتی وقفے کی بالائی حد موجود نہ ہو۔ ایسی تقسیم کو کھلے کنارے کی تقسیم کہتے ہیں۔ تمثیل 4 پر غور سے نظر ڈالیے جس میں اس قسم کی تقسیم کی وضاحت کی گئی ہے۔

تمثیل 9

کھلے کنارے تقسیم کی مثال Example of an Open Distribution

مضمون شماریات میں نشانات	طلبہ کی تعداد
10 سے کم	15
10 - 20	25
20 - 30	30
30 - 40	20
40 اور اس سے زیادہ	10
جملہ	100

اوپر پیش کی گئی تمثیل 9 میں پہلے جماعتی وقفے کو '10 سے کم' پیش کیا گیا ہے۔ اس صورت میں کوئی زیریں حد نہیں ہے اسی طرح آخری جماعتی وقفے میں بالائی حد نہیں ہے کیونکہ یہ 40 اور اس سے زیادہ، کے بطور ظاہر کی گئی ہے۔ کھلے سرے کی تقسیم سے کچھ مسائل پیدا ہوتے ہیں جیسے وسطی نقطہ محسوب کرنا اور اس پر مبنی حسابات۔

(8) خارجی اور داخلی غیر تعددی تقسیم (Exclusive and Inclusive Frequency Distribution) : تعددی تقسیم یا تو خارجی ہو سکتی ہے یا داخلی۔ خارجی تعددی تقسیم میں، کسی دیئے گئے جماعتی وقفے سے اس کی بالائی حد کو خارج کر کے اس کو اگلے جماعتی وقفے کی زیریں حد کی طرح لیا جاتا ہے۔ ایسی تقسیم میں برپوش (over lapping) جماعتی حدیں ہوتی ہیں۔ داخلی تقسیم میں کسی مخصوص جماعت کی بالائی حد، اس جماعتی وقفے میں شامل رہتی ہے۔ اس قسم کی تقسیم میں جماعتی حدیں برپوش (over lapping) نہیں ہوتیں۔ تمثیل 10 اور 11 میں خارجی اور داخلی تقسیموں کی مثالیں دی گئی ہیں۔

تمثیل 10

خارجی تعددی تقسیم کی مثال — An example of Exclusive Frequency Distribution

شماریات میں نشانات	تعداد طلبہ
0 - 10	15
10 - 20	25
20 - 30	30
30 - 40	20
40 - 50	10
جملہ	100

تمثیل 11

داخلی تعددی تقسیم کی مثال — An example of an Inclusive Frequency Distribution

شماریات میں نشانات	تعداد طلبہ
0 - 9	15
10 - 19	25
20 - 29	30
30 - 39	20
40 - 49	10
جملہ	100

تمثیل 10 میں پیش کردہ خارجی تقسیم میں پہلے جماعتی وقفے (0-10) میں اوپری حد (یعنی 10) کو اس وقفے سے خارج کر کے، بعد کے جماعتی وقفے یعنی (10-20) زیریں حد کے طور پر لیا گیا ہے۔ اس لئے پہلے جماعتی وقفے سے 0 اور 10 سے کم مراد لی جائے گی۔ دوسرے جماعتی وقفہ کی 10 اور 20 سے کم وغیرہ۔ تاہم تمثیل 11 میں پیش کردہ داخلی تقسیم میں پہلے جماعتی وقفے کی اوپری حد (یعنی 9) کو پہلے جماعتی وقفے میں ہی شامل کرتے ہیں۔ درحقیقت، کسی جماعت کی نچلی اور اوپری حد دونوں کو اسی جماعتی وقفے میں شامل کرتے ہیں۔

جماعتی وقفوں کے داخلی طریقہ اظہار میں یہ ممکن نہیں کہ دو متواتر وقفوں کی اوپری اور نچلی حدوں کی درمیانی قدروں کی درجہ بندی کر سکیں۔ مثال کے طور پر تمثیل 11 میں دی گئی داخلی تقسیم میں، مدات جن کی قدر 9.3، 9.5 اور 9.9 ، 19.1 اور 19.4 وغیرہ ہے۔ کسی بھی جماعت میں درجہ بند نہیں کیے جاسکتے۔ جماعتی وقفوں کے خارجی طریقہ میں اس قسم کی کوئی دشواری نہیں پیش آتی۔ اس لئے عموماً تعددی تقسیم کو خارجی شکل میں پیش کیا جاتا ہے۔ چنانچہ عام طور پر مسلسل متغیرہ کی صورت میں خارجی اور غیر مسلسل متغیرہ کی صورت میں تعددی تقسیم کے داخلی طریقے کو استعمال کیا جاتا ہے۔

(9) کسی جماعتی وقفے کی جماعتی سرحدیں یا حقیقی حدود (Class Boundaries or Real Limits of Class Interval) : مسلسل متغیروں سے متعلق پیمایش ہمیشہ معقول درجہ صحت تک ریکارڈ کی جاتی ہیں۔ جب کسی شخص کا قد 160 سنٹی میٹر ریکارڈ کیا جاتا ہے تو اصلی قد 159.5 سنٹی میٹر اور 160.5 سنٹی میٹر کے درمیان کچھ بھی ہو سکتا ہے۔ ایسا مواد جس کو صحیح عددوں integral (values میں ریکارڈ کیا جاتا ہے) داخلی جماعتی وقفوں یعنی 159 - 155 ' 164 - 160 ' 169 - 165 وغیرہ کو استعمال کر کے درجہ بند کیا جاتا ہے۔ بعد ازاں گروہ 164 - 160 میں اصل قد 159.5 سنٹی میٹر اور 164.5 سنٹی میٹر رکھنے والے تمام اشخاص کو شامل کر لیا جائے گا۔ 159.5 اور 164.5 کو داخلی جماعتی وقفہ 164 - 160 کی نچلی اور اوپری سرحدیں یا حقیقی حدود کہا جاتا ہے۔ اس جماعت کے زیریں اور بالائی حدود صرف 160 اور 164 ہیں، جو جماعتی وقفے کے لکھنے میں استعمال کیے گئے ہیں۔ لہذا کسی داخلی جماعتی وقفہ کی زیریں سرحد اس کی زیریں جماعتی حد سے 0.5 کم ہوگی اور بالائی جماعتی سرحد بالائی جماعتی حد سے 0.5 زیادہ ہوگی۔

جماعتی حدود کی حقیقی حدود میں تحویل یعنی تبدیلی اس وقت ضروری ہے جب مسلسل متغیرے غیر مسلسل شکل میں ریکارڈ کیے گیے ہوں اور ان کی درجہ بندی داخلی قسم کے جماعتی وقفوں کا استعمال کر کے کی گئی ہو۔ اکائی 11 اور اکائی 12 میں بیان کیے گیے مواد کا تجزیہ کرتے وقت آپ کو ایسی صورت حال سے سابقہ پڑے گا۔

(10) مجموعی تعددی تقسیم (Cummulative Frequency Distribution) : مجموعی تعددی تقسیم مجموعی تعدد کو ظاہر کرتی ہے نہ کہ مختلف جماعتوں کے اصلی تعدد کو۔ پہلے جماعتی وقفے کا مجموعی تعداد اس کے حقیقی تعدد کے مساوی ہوتا ہے۔ دوسرے جماعتی وقفے کا مجموعی تعدد ہی پہلے جماعتی وقفے کے تعدد کو دوسرے جماعتی وقفے کے تعدد میں جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مختلف جماعتی وقفوں کا مجموعی تعدد حاصل ہوتا ہے۔ تمثیل 12 سے پتہ چلتا ہے کہ کس طرح تعددی تقسیم سے مجموعی تعدد حاصل ہوتا ہے۔

تمثیل 12

مجموعی تعددی تقسیم کا حساب

شماریات میں نشانات	طلبہ کی تعداد	مجموعی تعداد
0 - 10	15	15
10 - 20	25	25 + 15 = 40
20 - 30	30	30 + 40 = 70
30 - 40	20	20 + 70 = 90
40 - 50	10	10 + 90 = 100

مجموعی تعددی تقسیم کو تمثیل (13) میں بتلائے گئے طریقے سے بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

تمثیل 13

مجموعی تعددی تقسیم کی مثال

مضمون شماریات میں نشانات	طلبہ کی تعداد (مجموعی تعدد)
10 سے کم	15
20 سے کم	40
30 سے کم	70
40 سے کم	90
50 سے کم	100

مجموعی تعددی تقسیم "سے کم" مجموعی تعددی تقسیم یعنی (less than) یا "سے زیادہ" مجموعی تعددی تقسیم یعنی (more than) ہو سکتی ہے۔ تمثیل 13 میں "سے کم"۔ مجموعی تعددی تقسیم کی مثال پیش کی گئی ہے۔ اس قسم کی تقسیم میں، مجموعی تقسیم بڑھتی ترتیب میں ہوتی ہے۔

"سے زیادہ" مجموعی تعددی تقسیم میں آخری جماعتی وقفہ کے تعدد کو اس جماعت کے مجموعی تعدد کے طور پر لیا جاتا ہے۔ آخری جماعتی وقفہ سے پہلے کی جماعت کے مجموعی تعدد کو حاصل کرنے کے لئے اس جماعت کے تعدد کو اس کے بعد کی جماعت کے مجموعی تعدد میں جمع کیا جاتا ہے۔ اس نوعیت کی تقسیم میں مجموعی تقسیم نزولی گھٹتی ترتیب میں ہوتی ہے۔

تمثیل 14 کا بغور مطالعہ کر کے یہ سمجھ لیں گے کہ کس طرح سے مجموعی تعددی تقسیم کو محسوب کیا جاتا ہے۔

تمثیل 14

"سے زیادہ" تعددی تقسیم کی مثال

(مضمون) شماریات میں نشانات	طلبہ کی تعداد (تعدد)	مجموعی تعدد
0 - 10	15	15 + 85 = 100
10 - 20	25	25 + 60 = 85
20 - 30	30	30 + 30= 60
30 - 40	20	20 + 10 = 30
40 - 50	10	10

"سے زیادہ" تعددی تقسیم کو تمثیل 15 میں بتائے گئے طریقے سے بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

تمثیل 15

"سے زیادہ" تعددی تقسیم کی پیشکش

شماریات میں نشانات	طلبہ کی تعداد (مجموعی تعدد)
0 سے زیادہ	100
10 سے زیادہ	85
20 سے زیادہ	60
30 سے زیادہ	30
40 سے زیادہ	10

یہ بات نوٹ کرلیں کہ "سے کم" مجموعی تعدد، جماعتی وقفوں کی اوپری حدوں سے اور "سے زیادہ" مجموعی تعدد جماعتی وقفوں کی نچلی حدوں سے تعلق رکھتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ B

(1) غیر مسلسل متغیرہ اور مسلسل متغیرہ کے درمیان فرق بیان کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

(2) جماعتی وقفے کی ضخامت (magnitude) کیسے حاصل کی جاتی ہے؟

.....

.....

.....

.....

(3) جماعتی وقفے کے وسطی نقطے سے کیا مراد ہے؟

.....

.....

.....

.....

(4) جماعتی وقفے کے تعدد سے کیا مراد ہے؟

.....

.....

.....

.....

(5) "کھلے کنارے" کی تقسیم کیا ہے؟

.....

.....

.....

.....

(6) خارجی اور داخلی تعددی تقسیم کے درمیان فرق واضح کیجئے۔

.....

.....

.....

.....

(7) "سے کم (less than)" اور "سے زیادہ (more than)" مجموعی تعددی تقسیم میں فرق واضح کیجئے۔

.....

.....

.....

.....

(8) لکھیے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) غیر مسلسل متغیرہ کو ناپا جاسکتا ہے۔

(ii) غیر مسلسل متغیرہ کسری قدر (fractional value) کا حامل ہوتا ہے۔

(iii) مسلسل متغیرہ کسری قدر کا حامل ہوتا ہے۔

(iv) کسی جماعت میں اقل ترین ممکنہ قدر کو بالائی حد کہا جاتا ہے۔

(v) کسی جماعتی وقفے کا وسطی نقطہ، بالائی حد اور زیریں حد کے درمیان نصف مقام پر واقع ہوتا ہے۔

(vi) کسی جماعت کی ضخامت (magnitude) ، بالائی اور زیریں حدوں کا فرق ہے۔

(vii) کسی جماعت کی حدوں کے درمیان شامل ہونے والے مشاہدوں کو اس جماعت کا تعدد کہتے ہیں۔

(viii) کسی جماعتی وقفے میں جماعتوں کی تعداد کثیر ہو سکتی ہے یا قلیل۔

(ix) کھلے کنارے کی تقسیم وسطی نقطہ کو محسوب کرنے میں مسائل پیدا کر سکتی ہے۔

(x) "سے زیادہ" مجموعی تعددی تقسیم میں، مجموعی تعدد کے اعداد چڑھتی ہوئی ترتیب میں ہوتے ہیں۔

(9) قوس میں دیئے گئے موزوں الفاظ سے خالی جگہوں کو پُر کیجئے۔

(i) مسلسل متغیرہ ..... کا نتیجہ ہے۔ (گنتی کرنے / پیمائش کرنے)

(ii) کسی جماعت کے طلبہ کا قد ..... متغیرہ کی مثال ہے۔ (مسلسل / غیر مسلسل)

(iii) کسی کرکٹ میچ میں اسکور کردہ رنوں کی تعداد ..... متغیرہ کی مثال ہے۔ (غیر مسلسل / مسلسل)

(iv) یہ ہمیشہ ضروری نہیں کہ مختلف جماعتوں کی قدر ..... ہو۔ (مساوی / غیر مساوی)

(v) کھلے کنارے کی تعددی تقسیم میں پہلی جماعت کی ..... جماعتی حد یا حدیں نہیں ہوتیں۔ (ایک / دو)

(vi) کسی داخلی تعددی تقسیم میں، جماعتی حدیں ..... ہوتی ہیں۔
((non-overlapping) غیر برپوش ، (overlapping) برپوش)

(vii) کسی داخلی تعددی تقسیم میں، کسی جماعت کی بالائی حد اس جماعت میں .....ہوتی ہے۔ (داخل / خارج)

(viii) "سے کم" مجموعی تعددی تقسیم میں مجموعی تعددی تقسیم ..... ہوئی ترتیب میں ہوتی ہے۔ (بڑھتی / گھٹتی)

6.6 تعددی تقسیم کی تشکیل Formation of a Frequency Distribution

تعددی تقسیم سے متعلق آپ نے مختلف اصطلاحات کا مطالعہ کیا۔ اب ہم تعددی تقسیم کی تشکیل کے طریقہ کار کا تفصیل سے مطالعہ کریں گے۔

6.6.1 مدات کی قطار بندی Data Array

مدات کی قطار بندی ، تعددی تقسیم کی تشکیل کے عمل میں پہلا قدم ہے۔ مدات کی قطار بندی سے مراد بڑھتی ہوئی یا گھٹتی ہوئی ترتیب میں مواد کی منظم ترتیب ہے۔ مدات کی قطار بندی بہت کار آمد ہوتی ہے کیونکہ یہ مواد کی وسعت کے متعلق معلومات فراہم کرتی ہے، اور مواد کی نوعیت پر روشنی ڈالتی ہے۔ تاہم مواد کی قطار بندی اس صورت میں زیادہ مفید ہے جب مشاہدوں کی تعداد کم ہوتی ہے۔ مشاہدوں کی تعداد بہت بڑی ہونے کی صورت میں، مدات کی قطار بندی قابو سے باہر ہو جاتی ہے۔ تمثیل 16 کا بغور مطالعہ کرنے سے آپ کو معلوم ہو جائے گا کہ مدات کی قطار بندی کس طرح کی جاتی ہے۔

تمثیل 16

کسی جماعت کے طلبہ کے مضمون شماریات میں حاصل کردہ مندرجہ ذیل نشانات سے متعلق مواد کی قطار بندی کیجئے۔

17	21	9	26	17	10	9	26	44	17
27	28	23	35	45	36	20	13	39	29
30	35	29	39	41	48	40	43	33	48
39	15	16	47	31	49	46	48	36	14

حل :

شماریات میں کسی جماعت کے طلبہ کے حاصل کردہ نشانات کو چڑھتی ہوئی ترتیب میں مندرجہ ذیل طریقے سے پیش کیا جاسکتا ہے۔

39	36	9	14	17	23	28	31	48	44
40	36	9	15	18	26	29	33	48	45
40	36	10	16	20	26	29	33	48	45
43	39	13	17	21	27	30	35	49	47

تمثیل 16 میں تیار کردہ مواد کی قطار بندی سے، ہم مضمون شماریات میں طلبہ کے حاصل کردہ اقل ترین اور اعظم ترین نشانات کو آسانی سے سمجھ سکتے ہیں۔

6.6.2 تعددی تقسیم کی تشکیل میں اقدامات

Steps in Constructing a Frequency Distribution

جیسا کہ اس سے قبل کہا گیا ہے، جب مشاہدات کی تعداد بہت زیادہ ہوتی ہے تو مواد کی قطار بندی قابو سے باہر ہو جاتی ہے۔ ایسی صورتوں میں مواد کے سائز کو گھٹانے (condense) کے لئے تعددی تقسیم کی تشکیل کی جاتی ہے۔ تعددی تقسیم کی تشکیل سے پہلے مندرجہ ذیل اقدامات ضروری ہیں۔

(i) جماعتی حدوں کی امتیازی شناخت کے ساتھ، جماعتی وقفوں کی تشکیل۔

(ii) ہر انفرادی مد کو لیا جائے اور ہر موزوں جماعتی وقفے کے مقابل ایک شمار سلاخ (Tally bar) کا تعین کیا جائے شمار سلاخ ایک کھڑا نشان ہوتا ہے۔ ہر قدر کے لئے ایک کھڑا نشان کھینچا جاتا ہے۔

(iii) چار شمار سلاخ کھینچنے کے بعد پانچویں سلاخ اسی طرح ٹیڑھی کھینچی جاتی ہے جس طرح کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔

(iv) جب موزوں جماعت کے مقابل پورے مشاہدات رکھے جاتے ہیں تو ان کا مجموعہ معلوم کیا جاتا ہے جس کو اس مخصوص جماعتی وقفے کے تعدد کے طور پر درج کیا جاتا ہے۔

تمثیل 17

تمثیل 16 میں دیئے گئے مواد سے، 10 - 0 کو پہلا جماعتی وقفہ مان کر تعددی تقسیم تشکیل دیجئے۔

حل :

پہلے جماعتی وقفہ کا سائز 10 ہے اور سب سے بڑا مد ہے 49۔ تمام جماعتی وقفوں کو مساوی مان لیں تو دوسرے جماعتی وقفے ہوں گے '50 - 40 ' 40 - 30 ' 30 - 20 ' 20 - 10 ۔ غور کرنا چاہیئے کہ دیا گیا مواد ممیز ہے۔ لیکن اس کے باوجود خارجی جماعتی وقفے لئے گئے ہیں جو کہ عام مروجہ طریقہ ہے۔ جماعتی وقفہ 10 - 0 کا مطلب ہے 0 اور 10 سے کم۔ اس لئے یہ ان مدوں پر مشتمل ہے جن کی قدریں 0 تا 9 کے درمیان پھیلی ہوئی ہیں۔ اسی طرح سے دوسرے جماعتی وقفوں میں مدات ہوں گے 10 تا 19، 20 تا 29 وغیرہ۔

شماریات میں حاصل کردہ نشانات کی تعددی تقسیم

مضمون شماریات میں نشانات	شمار	سلاخیں	طلبہ کی تعداد (تعدد)
0 - 10	II		2
10 - 20	卌	III	8
20 - 30	卌	IIII	9
30 - 40	卌	卌	10
40 - 50	卌	卌 I	11
جملہ			40

تمثیل 18

ایک ٹاپکٹ سے سرزد، فی صفحہ غلطیوں کی تعداد سے متعلق مندرجہ ذیل مواد سے غیر مسلسل تعددی تقسیم تیار کیجئے۔

0 0 2 1 3 0 4 2 0 4 3 3 1 2 0 3 2 3 3
1 2 1 3 4 2

حل :

فی صفحہ اقل ترین غلطیوں کی تعداد صفر ہے اور اعظم ترین غلطیوں کی تعداد 4۔ ہم کو ایک غیر مسلسل تعددی تقسیم تیار کرنی ہے تاکہ غلطیوا ں کی تعداد کو 0 ' 1 ' 2 ' 3 اور 4 لیا جاسکے۔

تعددی تقسیم

فی صفحہ غلطیوں کی تعداد	شمار	سلاخیں	صفحات کی تعداد (تعدد)
0	卌		5
1	IIII		4
2	卌	I	6
3	卌	II	7
4	III		3
جملہ			25

6.6.3 جماعتی وقفوں کو منتخب کرنے کے لیے رہنما خطوط
(Guidelines for Selecting the Class Intervals)

اگر جماعتی وقفے نہ دیئے گئے ہوں تو مندرجہ ذیل رہنما خطوط کی روشنی میں ان کی تعداد اور وسعت کا تعین کیا جاسکتا ہے۔

(i) مواد کا سب سے چھوٹا اور سب سے بڑا مد معلوم کیجئے۔ ان کا فرق محسوب کیجئے۔ اس سے مواد کا رینج (Range) حاصل ہوتا ہے۔

(ii) مدوں کی تعداد کا شمار کیجئے اور اسٹرج قاعدے (Struge's rule) کے لحاظ سے یا اپنی سہولت کے مطابق جماعتوں کی تعداد "K" کا تعین کیجئے۔

(iii) وسعت (range) کو جماعتوں کی تعداد 'K' سے تقسیم کیجئے۔اس کو 'C' مان لیجئے۔یہ قدر 'C' جماعتی وقفے کی چوڑائی (width) کے تعین کی اساس ہے۔

(iv) عموماً جماعتی وقفوں کی چوڑائی (width) پوری تقسیم کے لئے یکساں رہنی چاہیئے اور عام طور پر جماعتی وقفہ کے حدود کا اظہار ایک صحیح عدد میں ہونا چاہیئے یعنی 5 یا 10 کے ضعف (multiple) میں۔چنانچہ جماعتی وقفوں i کی ممکنہ حدود کا تعین اس طرح ہوگا کہ اس کی نچلی حد ایک ایسا صحیح عدد ہوگا جو C سے قدرے کم اور اوپری حد ایک ایسا صحیح عدد ہوگا جو C سے قدرے زیادہ ہوگا۔

(v) جماعتی وقفوں کے لکھنے کا آغاز ایک ایسے صحیح عدد سے ہوگا جو کہ مواد کے سب سے چھوٹے عدد سے قدرے کم ہوگا یا اس کے مساوی ہوگا جبکہ یہ بذات خود ایک صحیح عدد ہوگا۔

(vi) جماعتی وقفوں کے مکمل سیٹ (sets) کے لکھنے کا آغاز، مرحلہ IV میں تعین کردہ (i) کی موزوں قدروں کی مدد سے مرحلہ V کے تحت طے شدہ آغازی نقطہ کو لیا جائے گا۔ان سٹوں (Sets) کے منجملہ وہ سٹ (Set) جس کے جماعتی وقفوں کی تعداد K کے مساوی ہے اس کو بطور مثالی نمونہ سٹ لیا جائے گا۔اگر کسی بھی سٹ کے جماعتی وقفوں کی تعداد K کے مساوی نہ ہو تو اس سٹ (Set) کو منتخب کیا جائے گا جس کے جماعتی وقفوں کی تعداد K-2 اور K+2 کے درمیان ہے۔

تمثیل 19

کسی جماعت کے طلبہ کے وزن (کیلوگرام میں) سے متعلق مندرجہ ذیل مواد کے لئے داخلی طریقہ کے تحت تعددی تقسیم تیار کیجئے۔

42	47	48	50	41	61	57	52	57
47	41	59	60	63	42	44	45	46
57	47	57	53	48	47	56	61	56
62	49	58	52	55	42	42	56	51

حل :

مندرجہ بالا تمثیل میں جماعتی وقفے کی تعداد نہیں دی گئی ہے۔اس لئے پہلے جماعتی وقفوں کی تعداد اور چوڑائی یعنی عرض معلوم کریں گے۔

(i) اقل ترین وزن ہے 41 کیلوگرام اور اعظم ترین وزن ہے 63 کیلوگرام۔اس لیے رینج ہے 22

(ii) مدات کی تعداد ہے 45 ۔ اس لئے سٹرجس قاعدے کی رو سے جماعتی وقفوں کی تعداد مندرجہ ذیل طریقے سے معلوم کی جاسکتی ہے۔

$$K = 1 + 3.3 \log 45$$
$$= 1 + 3.3 \times 1.65$$
$$= 6.4$$
$$= 7 \text{ (تقریباً)}$$

(iii) جماعتی وقفوں کی ممکنہ چوڑائی (width) ہوگی۔

$$C = \frac{\text{رینج}}{K}$$
$$= \frac{22}{7}$$
$$= 3.1$$

(iv) 3.1 سے بڑا صحیح عدد ہوگا 5 اور 3.1 سے چھوٹا صحیح عدد ہے '0' اس لئے جماعتی وقفوں کا طول (i) 5 ہوگا یہاں پر i کی صرف ایک ہی قدر ہے۔

(v) چونکہ اقل ترین قدر 41 ہے پہلا جماعتی وقفہ 40 سے شروع ہوگا۔ اس لئے داخلی قسم اور جسامت کا سائز 5 رکھنے والے مختلف جماعتی وقفے ہوں گے : 40-44 ، 45-49 ' 50-54 ' 55-59 اور 64 - 60 یہاں پر آخری جماعتی وقفہ 64 - 60 ہے، کیونکہ سب سے بڑا مد 63 ہے۔

(vi) اس سٹ میں جماعتی وقفوں کی تعداد 5 ہے۔ یہ اس کے مثالی عدد K کے مساوی نہیں جو 7 ہے، لیکن یہ K-2 اور K+2 کی حدوں کے درمیان ہے (یعنی 5 تا 9 کے بیچ میں)۔ لہذا ہم تعددی تقسیم کی تشکیل کر سکتے ہیں۔

تعددی تقسیم (داخلی طریقہ)

وزن (کیلوگرام میں)	شمار	سلاخیں	طلبہ کی تعداد
40 - 44	III	𝍸	8
45 - 49	𝍸	𝍸	10
50 - 54	𝍸	𝍸	8
55 - 59	𝍸	𝍸	8
60 - 64	IIII I	𝍸	11
	جملہ		

تمثیل 20

داخلی جانچ (X) کے نمبرات اور سالانہ امتحان (Y) کے فی صد سے متعلق 20 امیدواروں کے مندرجہ ذیل مواد کے لئے دو متغیرہ تعددی تقسیم تیار کیجئے۔

X : 10 11 13 12 12 14 12 13 14 13 14 10 12 11 11 12 13 12 13 13

Y : 12 20 52 43 50 60 58 54 78 81 69 38 47 41 45 49 63 68 56 72

حل:

داخلی جانچ میں صرف پانچ مختلف قدریں ہیں 10 ' 11 ' 12 ' 13 اور 14۔ اس لئے ہر ایک کو ایک گروہ کی نمائندگی کے لئے منتخب کیا جاتا ہے۔ سالانہ امتحان (Y) میں فیصد نشانات کی قلیل ترین قدر 12 اور عظیم ترین قدر 81 ہے جس سے رینج 69 حاصل ہوتا ہے۔ 20 مدات کے لئے اسٹرج قاعدہ کے مطابق جماعتوں کی مثالی تعداد 5 ہوگی۔ لہذا ہر جماعت کا امکانی طول 69/5 یا 14 ہوگا۔ اس کا 15 سے اتصال کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ اقل ترین فیصد (Y) 12 ہے، پہلے جماعتی وقفے کی نچلی حد کو بطور 10 لیا جائے گا۔ اس طرح "Y" کے لئے مختلف جماعتی وقفے ہوں گے : 10-25 ، 25-40 ، 40-55 ، 55-70 اور 70-85 متغیرہ 'X' کو پہلی قطار میں اور متغیرہ Y کو پہلے کالم میں درج کرنے پر ذو متغیرہ تقسیم کا مندرجہ ذیل خاکہ حاصل ہوگا۔

فیصد فائنل امتحان میں (Y)	داخلی جانچ میں نشانات 10	11	12	13	14	جملہ
10 - 25						
25 - 40						
40 - 55						
55 - 70						
70 - 85						
جملہ						

اب ذو متغیرہ تعددی تقسیم حاصل کرنے کے لئے تعدد کی تعداد کا تعین ضروری ہے جس کے لئے X اور Y کی متعلقہ قدروں کے مختلف خانوں کو مختص کر کے شاری سلاخیں کھینچی جاتی ہیں۔ X اور Y کی متعلقہ قدروں کے پہلے سٹ میں 10 اور 12 کی قدریں شامل ہیں۔ اس لئے افقی کالم 10 اور عمودی کالم 25-10 کے بالمقابل خانہ میں ایک شمار سلاخ کھینچی جائے گی۔ اسی طرح دوسرے خانوں کے لئے بھی افقی سلاخیں کھینچی جائیں گی۔ جب مختلف خانوں کی تمام قدریں مختص ہو جائیں اور متعلقہ شمار سلاخیں کھینچی جائیں تو مطلوبہ ذو متغیرہ تعددی تقسیم حسب ذیل ہو گی۔

ذو متغیری تعددی تقسیم

فائنل امتحان میں فیصد	داخلی جانچ میں نشانات 10	11	12	13	14	جملہ
10 - 25	(1) 1	(1) 1				2
25 - 40	(1) 1					1
40 - 55		(2) | |	(4) ||||	(2) ||		8
55 - 70			(2) ||	(2) ||	(2) ||	6
70 - 85				(2) ||	(1) |	3
جملہ	2	3	6	6	3	20

اپنی معلومات کی جانچ C

(1) مواد کی قطار بندی سے کیا مراد ہے؟

.....

.....

.....

.....

(2) تعددی تقسیم کی تشکیل میں کیا مسائل پیش آتے ہیں؟

.....

.....

.....

.....

(3) مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط بیان کیجئے

(i) مواد کی قطار بندی بڑھتی ہوئی یا گھٹتی ہوئی ترتیب میں مواد کی منظم ترتیب ہے۔

(ii) مواد کی قطار بندی مواد کے رینج (Range) کے متعلق کوئی معلومات فراہم نہیں کرتی۔

(iii) مواد کی قطار بندی نہایت فائدہ مند ہے جب مشاہدوں کی تعداد زیادہ ہوتی ہے۔

(iv) تعددی تقسیم مواد کو جامع (condense) کرنے میں معاون ہوتی ہے۔

(v) موزوں جماعتی وقفے کے مقابل لکھی ہوئی عمودی لکیر کو شمار سلاخ کہتے ہیں۔

6.7 خلاصہ Let Us Sum Up

درجہ بندی کا مطلب ہے مماثلت اور مشابہت کی بنیاد پر مواد کو مختلف جماعتوں میں ترتیب دینا۔ یہ بے ہنگم مواد کو مختصر اور سادہ شکل میں پیش کرنے میں مدد دیتی ہے۔ درجہ بندی، جدول بندی اور تجزیہ کے لئے بنیاد فراہم کرتی ہے، اور مواد کی ممکنہ خصوصیات کے پہچاننے میں مدد کرتی ہے۔ درجہ بندی اوصاف یا متغیروں کی بنا پر کی جاسکتی ہے۔ اوصاف کے مطابق درجہ بندی مواد کی کیفیتی خصوصیات پر مبنی ہوتی ہے۔ سادہ درجہ بندی واحد وصف کی بنا پر اور کثیر پہلو جماعت بندی ایک سے زیادہ اوصاف کی بنا پر کی جاتی ہے۔ متغیروں کے مطابق درجہ بندی کا انحصار مواد کے بہ اعتبار کمیت قابل تعین ہونے کی خاصیت پر ہے۔ مواد کی تعددی تقسیم کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ تعددی تقسیم یک متغیرہ، دو متغیرہ یا کثیر متغیرہ ہوسکتی ہے۔

تعددی تقسیم سے متعلق کئی اصطلاحات موجود ہیں۔ غیر مسلسل متغیرہ کی منفرد قدر ہوتی ہے جب کہ مسلسل متغیرہ دی گئی قدروں میں سے کسی بھی کسری قدر کو اختیار کرسکتا ہے۔ (سوائے کھلے کنارے کی تقسیم کے)۔ ہر جماعتی وقفہ کی دو حدیں ہوتی ہیں۔ (1) نچلی حد (2) اوپری حد۔ جماعت کا وسطی نقطہ ان حدود کے بیچوں بیچ واقع ہوتا ہے۔ دونوں حدود کے مابین فرق کو جماعتی وقفہ کی قدر کے طور پر لیا جاتا ہے۔ جماعت کے دونوں حدود کے مابین واقع مشاہدوں کو تعدد کہا جاتا ہے۔

کسی تقسیم میں جماعتوں کی تعداد سائنسی بنیاد پر طے کی جاسکتی ہے۔ جماعتوں کی تعداد مقرر کرتے وقت، ان کی چوڑائی (width) کا بھی تعین کیا جانا چاہیئے۔ پہلی جماعت کی نچلی حد اور آخری جماعت کی اوپری حد موجود نہ ہو تو یہ کھلے کنارے والی تقسیم کی مثال ہوگی۔ خارجی جماعتی وقفے میں کسی جماعت کی اوپری حد کو جماعتی وقفہ سے خارج کیا جاتا ہے اور اسی کو اگلے جماعتی وقفہ کی نچلی حد کے طور پر لیا جاتا ہے۔ داخلی جماعتی وقفے میں، جماعت کی اوپری حد کو اسی جماعت میں شامل کرلیا جاتا ہے خارجی جماعت میں حدود برپوش overlapping ہوتے ہیں جبکہ داخلی جماعت میں یہ غیر برپوش (non-overlapping) ہیں۔ مجموعی تعددی تقسیم میں جماعتیں، مجموعی تعدد کی نشاندہی کرتی ہیں، جو کہ "سے کم" یا "سے زیادہ" مجموعی تعددی تقسیم ہوسکتی ہے۔ مواد کی قطار بندی بڑھتی یا گھٹتی ترتیب میں منظم طریقے سے کی جاتی ہے۔ یہ مواد کے رینج اور خصوصیات کے متعلق معلومات فراہم کرتی ہے۔ مواد کی جسامت جامع (گٹھی ہوئی) شکل دینے کے لئے تعددی تقسیم تیار کی جاتی ہے۔

6.8 کلیدی الفاظ Key Words

وصف (Attribute) :حقائق کی کیفیتی خصوصیات کا اظہار

ذو متغیرہ (Bi-variate) : دو متغیرے رکھنے والا

درجہ بندی (Classification) :مماثلت اور مشابہت کی بنیاد پر مواد کی تقسیم

جماعت کے حدود (Class limits) : جماعتی وقفے کی نچلی اور اوپری حدیں

مسلسل متغیرہ (Continuous Variable) :وہ متغیرہ جو دی گئی قدروں میں سے کسی بھی کسری قدر کو اختیار کرتا ہے

مجموعی تعددی تقسیم (Comulative Frequency Distribution) : ایسی تقسیم جو حقیقی تعدد کی جگہ مجموعی تعدد کو ظاہر کرتی ہے۔

مواد کی قطار بندی (Data Array) : بڑھتی یا گھٹتی ترتیب میں مواد کی منظم ترتیب

غیر مسلسل متغیرہ (Discrete Variable) : وہ متغیرہ جس کی قدر منفرد ہوتی ہے

خارجی جماعت (Exclusive Class) :وہ جماعت جس کی بالائی حد، اس سے خارج کر کے اگلی جماعت کی زیریں حد بنادی جاتی ہے۔

تعدد (Frequency) : کسی مخصوص جماعت میں واقع ہونے والے مشاہدوں کی تعداد

داخلی جماعت (Inclusive Class) : وہ جماعت جس کی بالائی اور زیریں دونوں حدیں اس جماعت میں شامل رہتی ہیں

"سے کم" تقسیم(Less than Distribution) : وہ مجموعی تعددی تقسیم ہے جس میں مجموعی تعدد کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں بتلایا جاتا ہے۔

جماعت کی ضخامت (Magnitude of a Class) : کسی جماعت کی اوپری اور نچلی حدوں کے درمیان فرق

وسطی نقطہ (Mid-point) : نچلی اور اوپری حدوں کے درمیان نصف مقام پر واقع ہونے والا نقطہ۔

"سے زیادہ" تقسیم ("More than Distribution") : مجموعی تعددی تقسیم جس میں، مجموعی تعدد کو گھٹتی ہوئی ترتیب میں بتلایا جاتا ہے۔

کثیر متغیرہ (Multi-variate) : کثیر متغیروں کا حامل

کھلا کنارے کی تقسیم (Open-end) : وہ تقسیم جس میں جماعت کا کنارہ بند نہیں ہوتا ہے بلکہ کھلا ہوتا ہے

شمار سلاخ (Tally Bar) : عمودی خط جو متعلقہ جماعت کے بالمقابل مشاہدے کی تعبیر کرتا ہے

یک متغیر (Uni-Variate) : ایک متغیرہ کا حامل

متغیرہ (Variate) : مواد کی کمیتی طور پر قابل تعین خصوصیات

6.9 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات Answers to Check Your Progress

A) 6. (i) صحیح (ii) صحیح (iii) غلط (iv) غلط (v) صحیح (vi) صحیح

7. (i) کیفیتی (ii) متغیرہ (iii) وصف (iv) ایک متغیرہ (v) کثیر متغیرہ

B) 8. (i) غلط (ii)غلط (iii) صحیح (iv) غلط (v) صحیح (vi) صحیح

(vii) صحیح (viii) غلط (ix) صحیح (x) غلط

9. (i) پیمائش (ii) مسلسل (iii) غیر مسلسل (iv) مساوی (v) ایک/یک (vi) برپوش
(vii) داخلی (viii) بڑھتی

C) 3. (i) صحیح (ii) غلط (iii) غلط (iv) صحیح (v) صحیح

6.10 امتحانی سوالات / مشقیں Terminal Questions/Exercises

سوالات

(1) درجہ بندی کے معنی اور مقاصد کی تشریح کیجئے نیز درجہ بندی کے مختلف طریقوں پر بحث کیجیے۔

(2) مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک پر مختصر نوٹ لکھیے۔

(i) غیر مسلسل متغیرہ
(ii) جماعتی وقفے
(iii) کسی جماعت کا وسطی نقطہ
(iv) کسی تقسیم میں جماعتوں کی تعداد
(v) کھلے کنارے کی تقسیم
(vi) مجموعی تعددی تقسیم
(vii) مواد کی قطار بندی

مشقیں

(1) مندرجہ ذیل مواد کی بڑھتی ترتیب میں قطار بندی کیجیے۔

3 19 17 25 23 21 19 17 15 13 11 9 10 26 34
32 30 28 26 24 22 20 18 16 15 31 29 27 25
23 21 19 17 15 13 11 18 28 26 24 22 20 18
16 14 12 10 8

(2) مندرجہ ذیل مواد کی بڑھتی ہوئی ترتیب میں قطار بندی کیجئے :

51 28 29 75 33 25 73 75 67 27 61 48 81 66 45
37 61 55 47 39 53 61 53 55 34 49 49 45 36
54 47 73 31 44 36 61 37 35 29 61

(3) بی کام سال دوم اکاؤنٹس کے طلبہ کو مندرجہ ذیل نشانات دیئے گئے ہیں۔ 19 - 0 کو پہلا جماعتی وقفہ مان کر داخلی طریقہ سے تعددی تقسیم کی تشکیل کیجئے :

55 33 35 5 23 37 73 75 87 29 97 80 66 53 87
71 4 25 93 66 47 93 81 29 58 66 59 62 29
61 21 37 46 27 42 71 52 78 27 47 16 49 91
9 38 7- 11 61

(4) مندرجہ ذیل مواد کے لئے خارجی طریقے سے تعددی تقسیم کی تشکیل کیجئے :

2 18 25 16 21 21 16 15 12 13 11 9 9 25 28
34 28 28 22 24 20 18 18 14 14 30 27 25 23
21 19 15 11 6 9 16 27 15 22 20 17 18 13
14 10 10 7

(5) مختلف میاچوں میں کسی فٹ بال ٹیم کے بنائے ہوئے گولؔ کی تعداد کے متعلق مندرجہ ذیل مواد سے تعددی تقسیم تشکیل دیجیے۔

0 2 4 1 3 0 3 2 3 0 0 1 5 2 0 3 3 4 2
1 1 3 1 3 2 1 0 1 3 1 2 1 2 1 2 2 0 1
2 1 0 2 1 0

(6) ماہانہ اجرت اور مزدوروں کی تعداد پر مبنی مندرجہ ذیل مواد کے لئے "سے کم" مجموعی تعددی تقسیم تشکیل دیجئے۔

اجرت (روپیوں میں)	450-475	475-500	500-525	525-550	550-575	575-600
مزدوروں کی تعداد	30	45	60	40	15	10

(7) مندرجہ ذیل مواد کے لئے "سے زیادہ" مجموعی تعددی تقسیم تشکیل دیجئے۔

نشانات :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
طلبہ کی تعداد :	12	17	31	40	28	22	12	8

نوٹ : یہ سوالات اس اکائی کے سمجھنے میں مددگار ثابت ہوں گے۔ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجئے لیکن آپ کے جواب یونیورسٹی کو نہ بھیجیے۔یہ آپ کی مشق کے لئے ہیں۔

اکائی 7 جدولی اظہار

UNIT:7 - TABULAR PRESENTATION

Structure	ساخت	
Objectives	مقاصد	7.0
Introduction	تمہید	7.1
Meaning of Tabulation	جدول بندی کے معنی	7.2
Objectives of Tabulation	جدول بندی کے مقاصد	7.3
Distinction Between Classification and Tabulation	درجہ بندی اور جدول بندی میں امتیاز	7.4
Kinds of Tables	جدول کی قسمیں	7.5
Information or Classifying Tables	معلوماتی یا درجہ بند جدولیں	7.5.1
General Purpose or Reference Tables	عام مقصدی یا حوالہ جاتی جدولیں	7.5.2
Special Purpose or Summary Tables	خاص مقصدی یا تلخیصی جدولیں	7.5.3
Construction of a Statistical Table	شماریاتی جدول کی تشکیل	7.6
Parts of a Statistical Table	شماریاتی جدول کے اجزا	7.6.1
Requisites of a Good Statistical Table	اچھی شماریاتی جدول کے لوازمات	7.6.2
Preparation of Statistical Tables	شماریاتی جدولوں کی تیاری	7.6.3
Let Us Sum Up	خلاصہ	7.7
Key Words	کلیدی الفاظ	7.8
Answers to Check Your Progress	اپنی معلومات کی جانچ: جوابات	7.9
Terminal Questions/Exercises	امتحانی سوالات / مشقیں	7.10

7.0 مقاصد Objectives

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:۔

- جدول بندی کے معنی اور مقاصد کی وضاحت کر سکیں۔
- شماریاتی جدول کے اجزاء کی فہرست تیار کر سکیں۔
- اچھی شماریاتی جدول کے لوازمات کا خاکہ پیش کر سکیں۔
- شماریاتی جدول تیار کر سکیں۔

7.1 تمہید Introduction

اکائی 6 میں ہم نے مواد کی درجہ بندی پر بحث کی تاکہ مواد کو قابل تقابل بنایا جا سکے۔ ہم نے ایک یا دو متغیروں پر مشتمل تعددی تقسیم کی تشکیل کے

طریقہ کار کی بھی وضاحت کی۔ جب دو متغیرات دیئے جاتے ہیں تو قطاروں اور کالموں میں ان کی ترتیب کو عموماً شماریاتی جدول کہا جاتا ہے۔ ایسی جدولوں کو بھی تیار کیا جاسکتا ہے، جبکہ مواد کا تعلق اوصاف سے ہوتا ہے اس اکائی میں آپ جدول بندی کے معنی، مقصد اور شماریاتی جدولوں کی تیاری کا طریقہ کار سیکھیں گے۔

7.2 جدول بندی کے معنی Meaning of Tabulation

مواد کا جدولی اظہار، مواد کے اظہار کی کئی تکنیکوں میں سے ایک ہے۔ دو اور تکنیکیں ہیں شکلی اظہار اور ترسیمی اظہار۔ جدولی اظہار کا مطلب ہے اکٹھا شدہ مواد کو منظم طریقے سے قطاروں اور کالموں میں ترتیب دینا۔ مواد کی افقی ترتیب کو قطار اور عمودی ترتیب کو کالم کہتے ہیں۔ درجہ بند حقائق کو قطاروں اور کالموں میں درج کیا جاتا ہے جس سے جدولی شکل حاصل ہوتی ہے۔

7.3 جدول بندی کے مقاصد Objectives of Tabulation

جدول بندی مندرجہ ذیل مقاصد کی تکمیل کرتی ہے :۔

(1) مواد کا منظم اظہار (Systematic Presentation of Data) : عام طور پر اکٹھا شدہ مواد شکستہ شکل میں ہوتا ہے۔ شماریاتی جدولوں کے ذریعہ سے مواد کے ڈھیر کو مختصر اور سادہ طریقے سے پیش کیا جاتا ہے۔ لہذا جدول بندی سے مواد کو منظم ڈھنگ سے پیش کرنے میں مدد ملتی ہے۔

(2) مواد کے تقابل کی سہولتیں (Facilitates Comparison of Data) :اگر مواد خام شکل میں موجود ہو تو تقابل مشکل ہو جاتا ہے۔ اگر مواد کے متعلقہ مدات کو مختصر اور سادہ انداز سے پیش کیا جائے تو تقابل ممکن ہو جاتا ہے۔ مکمل اور غیر منظم مواد کو جدول کی شکل میں ظاہر کرنے سے مواد کے مختلف پہلوؤں کا تقابل کرنے میں سہولت پیدا ہوتی ہے۔

(3) مطلوبہ اقدار کی شناخت (Identification of the Desired Values) : جدول بندی میں مواد کو قطاروں اور کالموں میں ترتیب دے کر منظم انداز میں پیش کیا جاتا ہے۔ لہذا، مطلوبہ اقدار کی بغیر کسی مشکل کے آسانی سے شناخت کی جاسکتی ہے۔ جدول بند مواد کی غیر موجودگی میں، مطلوبہ اقدار کا تعین کرنا مشکل ہو جاتا ہے۔

(4) تجزیہ کے لئے بنیاد کی فراہمی (Provides a Basis for Analysis) : جدولی شکل میں مواد کے اظہار سے مواد کے تجزیہ کی بنیاد فراہم ہوتی ہے۔ شماریات کے طریقہ کار سے پتہ چلتا ہے کہ تجزیہ، مواد کے اظہار کی اولین ضرورت ہے۔ منظم طریقے سے جدولی شکل میں مواد کا اظہار، مواد کے تجزیہ کے لوازمات میں شامل ہے۔ شماریاتی جدولیں تجزیے میں مددگار ثابت ہوتی ہیں۔

(5) مواد کے رجحان کا اظہار (Exhibits Trend of Data) : مواد کو جامع شکل میں ایک ہی مقام پر پیش کر کے، جدولی اظہار، مواد کے رجحان کو ظاہر کرتا ہے۔ شماریاتی جدولوں کو دیکھ کر، مواد کی بحیثیت مجموعی شناخت کی جاسکتی ہے۔

7.4 درجہ بندی اور جدول بندی میں امتیاز Distinction Between Classification and Tabulation

اکثر لوگ جماعت بندی اور جدول بندی کو ایک دوسرے کا مترادف سمجھتے ہیں۔ ایسا لگتا ہے کہ یہ دونوں ایک ہی معنی اور مقصد کو پیش کرتے ہیں لیکن ان دونوں میں کافی فرق ہے۔ جماعت بندی میں مماثلت اور مشابہت کی بنیاد پر مواد کو تقسیم کیا جاتا ہے، جبکہ جدول بندی، جماعت بند مواد کو قطاروں اور کالموں میں درج کرنے کا عمل ہے۔ یہاں پر یہ دونوں ایک ہی سلسلہ کی کڑی ہیں۔ جدول بندی کا آغاز وہاں سے ہوتا ہے جہاں پر جماعت

بندی ختم ہوتی ہے۔ درحقیقت، جماعت بندی، جدول بندی کے لئے بنیاد فراہم کرتی ہے۔ اکائی 6 میں ہم نے وضاحت کی ہے کہ تعددی تقسیم، مختلف سائزوں اور جماعتوں کے بالمقابل وقوع پذیر مشاہدوں کی تعداد کا جدولی اظہار ہے۔ اس لئے مواد کو جماعت بند کرنے کے بعد ان کو جدولی شکل میں ظاہر کرنا چاہیئے۔

7.5 جدولوں کی قسمیں Kinds of Tables

مواد کے استعمال اور مقاصد کے پیش نظر، شماریاتی جدولوں کی مندرجہ ذیل قسمیں ہوتی ہیں :۔

(1) معلوماتی یا درجہ بند جدولیں
(2) عام مقصدی یا حوالہ جاتی جدولیں
(3) خاص مقصدی یا تلخیصی جدولیں

7.5.1 معلوماتی یا درجہ بند جدولیں Information or Classifying Tables

اس قسم کی جدولیں، جمع شدہ حقائق کی اہم خاصیتوں کو ظاہر کرنے کے لئے تیار کی جاتی ہیں۔ ان جدولوں کو صرف جمع شدہ مواد کی مماثلت کی بنا پر تیار کیا جاتا ہے۔ اس قسم کی جدولوں کو تیار کرنے کا اہم مقصد یہ ہے کہ مواد کو نہایت مختصر اور سادہ شکل میں پیش کیا جائے۔ ان جدولوں کی مزید درجہ بندی بطور ذیل کی جاسکتی ہے :

(i) سادہ جدولیں اور (ii) مخلوط جدولیں۔

(1) سادہ جدولیں (Simple Tables) :اس قسم کی جدولوں کو یک رخی جدولیں (One way tables) بھی کہتے ہیں۔ یہ جدولیں اکٹھا شدہ مواد کی صرف ایک خصوصیت کی بنا پر تیار کی جاتی ہیں۔ کسی کالج میں مختلف برسوں میں طلبا کی تعداد ظاہر کرنے والی جدول، سادہ یا یک رخی جدول کی مثال ہے۔ تمثیل 1 پر توجہ کیجئے جس میں سادہ جدول کی مثال پیش کی گئی ہے۔

تمثیل 1 : سادہ جدول کی مثال

کالج میں 83 - 1982 سے 89 - 1988 تک طلبہ کی تعداد

سال	طلبہ کی تعداد
1982 - 83	1500
1983 - 84	1550
1984 - 85	1600
1985 - 86	1650
1986 - 87	1600
1987 - 88	1675
1988 - 89	1700

اسی طرح سے کالج کے طلبہ کو عمر کی بنا پر تقسیم کیا جاسکتا ہے اور ہر سال کے لئے علحدہ جدول تیار کی جاسکتی ہے۔

(2) مخلوط جدولیں (Complex Tables) : جیسا کہ آپ جانتے ہیں سادہ جدولیں مواد کی صرف ایک خصوصیت کو ظاہر کرتی ہیں۔ جو جدولیں مواد کی ایک سے زیادہ خاصیتوں کا مظاہرہ کرتی ہیں، مخلوط جدولیں کہلاتی ہیں۔ ہم تین خصوصیات کو ظاہر کرنے والا دو رخی جدول

تیار کر سکتے ہیں یا مواد کی متعدد خصوصیات کو ظاہر کرنے والی ہمہ رخی جدول تشکیل دے سکتے ہیں۔ مختلف برسوں کے دوران کسی کالج کے طلبہ کی جنس اور ازدواجی مرتبہ کی بنا پر تیار کیا گیا جدول مخلوط جدول کی ایک مثال ہے۔

تمثیل 2 مخلوط جدول کی ایک مثال

1982 - 83 تا 1988 - 89 کے درمیان کسی کالج کے طلبہ کی جنس اور ازدواجی لحاظ سے تقسیم

سال	طالب علموں کی تعداد				جملہ
	طلبہ		طالبات		
	غیر شادی شدہ	شادی شدہ	غیر شادی شدہ	شادی شدہ	
1982 - 83	950	50	475	25	1500
1983 - 84	975	55	490	30	1550
1984 - 85	1000	55	510	35	1600
1985 - 86	1035	60	520	35	1650
1986 - 87	1010	50	510	30	1600
1987 - 88	1080	50	510	35	1675
1988 - 89	1090	55	515	40	1700
جملہ	7,140	375	3,530	230	11,275

7.5.2 عام مقصدی یا حوالہ جاتی جدولیں General Purpose or Reference Tables

اس قسم کی جدولوں کو معلومات کا ذخیرہ کرنے کے لئے تیار کیا جاتا ہے۔ ان کے ذریعہ کسی مخصوص موضوع پر وسیع معلومات حاصل ہوتی ہیں۔ اس قسم کی جدولیں عموماً مخلوط جدولیں ہوتی ہیں اور مختلف رپورٹیں ان کے ساتھ بطور ضمیمہ منسلک کی جاتی ہیں۔ یہ جدولیں نہایت منظم انداز میں تیار کی جانی چاہئیں تاکہ حوالوں کو بہ آسانی استعمال کیا جاسکے۔ مردم شماری رپورٹوں سے منسلک جدولیں، عام مقصدی یا حوالہ جاتی جدولوں کی بہترین مثالیں ہیں۔

7.5.3 خاص مقصدی یا تلخیصی جدولیں Special Purpose or Summary Tables

یہ جدولیں مواد کے تعلق سے کسی مخصوص نکتے کو ظاہر کرتی ہیں اور شماریاتی تجزیے میں مددگار ہوتی ہیں۔ ایسی جدولیں دیئے گئے سوالات کے مخصوص جوابات کی نشاندہی کر کے تقابل کی اساس فراہم کرتی ہیں۔ ان جدولوں کو نصابی جدول **(text tables)** بھی کہتے ہیں کیونکہ ان سے نصاب کی تکمیل مطلوب ہوتی ہے۔ یہ جدولیں شرحیں، فیصد اور اوسطوں وغیرہ کی نشاندہی کرتی ہیں۔ مثال کے طور پر کسی ملک میں صنعتی حادثات کی بڑھتی ہوئی شرح اور ان حادثات میں مرنے والوں کی تعداد پر بحث سے متعلق معلومات پر غور کیجئے۔ تمثیل 3 میں ظاہر کی گئی جدول، نصاب کی مطابقت کرتے ہوئے کوئلے کی کانوں (Coal Mines) میں مرنے والوں کی اونچی شرح کو ظاہر کر سکتی ہے۔

تمثیل 3

خاص مقصدی یا تلخیصی جدولوں کی ایک مثال

صنعتی حادثوں میں مرنے والے اشخاص کی کل تعداد اور کوئلے کی کانوں میں مرنے والے اشخاص کے درمیان ربط

سال	صنعتی حادثوں میں مرنے والوں کی تعداد	کوئلے کی کانوں میں مرنے والوں کی تعداد	کوئلے کے کانوں میں مرنے والوں کی تعداد بطور فی صد صنعتی حادثوں میں مرنے والوں کی جملہ تعداد
1976	930	150	16.1
1977	1154	285	24.7
1978	1250	115	9.2
1979	930	108	12.0
1980	1350	270	20.0

اپنی معلومات کی جانچ A

(1) جدول بندی سے کیا مراد ہے؟

.....

.....

.....

.....

(2) جدول بندی کے مقاصد کیا ہیں؟

.....

.....

.....

.....

(3) درجہ بندی اور جدول بندی کے درمیان کیا فرق ہے؟

.....

.....

.....

.....

(4) سادہ اور مخلوط جدول کے درمیان فرق بتلایئے؟

.....

.....

.....

.....

(5) عام مقصدی یا حوالہ جاتی جدول کیا ہے؟

.....

.....

.....

.....

(6) خاص مقصدی (یا تلخیصی) جدول کیا ہے؟

.....

.....

.....

.....

(7) تحریر کیجئے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) جدول بندی مواد کے تجزیہ کی ایک تکنیک ہے۔

(ii) جدول کا مطلب مواد کو قطاروں اور کالموں میں منظم ڈھنگ سے مرتب کرنا ہے۔

(iii) کالم مواد بندی ایک عمودی ترتیب ہے۔

(iv) جدول بندی مواد کے تقابل کو آسان بناتی ہے۔

(v) جدول بند مواد کی غیر موجودگی میں، مطلوبہ اقدار کی شناخت نہایت سہل ہے۔

(vi) شماریاتی جدول تجزیہ میں کار آمد ہے۔

(vii) جدول بندی کی مدد سے مواد کا عمومی طرز (overall pattern) معلوم کیا جا سکتا ہے۔

(viii) سادہ جدول، مواد کی ایک سے زیادہ خاصیت کو ظاہر کرتی ہے۔

(ix) سادہ جدول کی مدد سے عمر، مذہب اور ازدواجی حیثیت کے متعلق معلومات کا اظہار کیا جا سکتا ہے۔

(x) عام مقصدی جدول میں معلومات کے وسیع دائرے کا احاطہ کیا جاتا ہے۔

(xi) 1981 کی مردم شماری کے ضمیمے، حوالہ جاتی جدول کی ایک مثال ہیں۔

(xii) خاص مقصدی جدولیں تقابل کے لئے اساس فراہم کرتی ہیں۔

(8) خالی جگہوں کو قوس میں دیئے گئے موزوں الفاظ سے پُر کیجئے۔

(i) قطار مواد کی ..... ترتیب ہے۔ (افقی / عمودی)

(ii) درجہ بند حقائق کے قطاروں اور کالموں میں اندراج کو ..... کہتے ہیں۔ (درجہ بندی / جدول بندی)

(iii) شماریاتی جدول مواد کو ..... ڈھنگ سے پیش کرنے میں مدد کرتی ہے۔ (آسان / پیچیدہ)

(iv) جدول بندی ..... کی بنیاد فراہم کرتا ہے۔ (یکجائی / تجزیہ)

(v) جماعت بندی اور جدول بندی ..... معنوں کی حامل ہے۔ (یکساں / مختلف)

(vi) معلوماتی جدولیں، مواد کو ..... شکل میں ظاہر کرنے کے لئے تیار کی جاتی ہیں۔
(جامع (condensed) / غیر منظم)

(vii) مخلوط جدول، دیئے گئے مواد ..... خاصیت / خاصیتوں کو پیش کرتی ہے۔ (ایک / ایک سے زیادہ)

(viii) عام مقصدی جدول ..... کے بطور دی جاتی ہیں۔ (رپورٹ کے اصل حصے کے ضمیمے)

(ix) خاص مقصدی جدول ..... میں مددگار ہوتی ہیں۔ (یکجائی / تجزیہ)

(x) خاص مقصدی جدول نصاب کے ..... ہیں۔ (غیر تابع / تکملی)

7.6 شماریاتی جدول کی تشکیل Construction of a Statistical Table

آپ نے مطالعہ کیا ہے کہ جدول سازی کا بنیادی مقصد یہ ہے کہ غیر منظم مواد کو منظم شکل میں پیش کیا جائے تاکہ مواد کا تجزیہ آسان ہو جائے۔ اس مقصد کو حاصل کرنے کے لئے مواد کی جدول بندی میں ہمیں محتاط رہنا چاہیئے۔ اس کو یقینی بنانے کے لئے شماریاتی جدول کی تیاری کے مختلف قاعدوں اور مشقوں کو واضح طور پر سمجھ لینا ضروری ہے۔ شماریاتی جدول کی تیاری سے پہلے، ہمیں چاہیئے کہ ایک اچھی شماریاتی جدول کے اہم اجزاء اور خصوصیات پر توجہ کریں۔

7.6.1 شماریاتی جدول کے اجزا Parts of a Statistical Table

ایک شماریاتی جدول کے مندرجہ ذیل اجزا ہوتے ہیں۔ ہر ایک جز کے مطالعہ کے وقت شکل 7.1 کو پیش نظر رکھنا چاہیئے۔

شکل 7.1 شماریاتی جدول کے مختلف اجزا

جدول نمبر اور عنوان

ہیڈ نوٹ

اسٹب / تنا	سرخی		جملہ
	ذیلی سرخی	ذیلی سرخی	
اسٹب اندراجات	ڈھانچہ / میدان		
جملہ			

(فٹ نوٹ) :

ماخذ :

(1) عنوان (Title) : ہر شماریاتی جدول کا ایک عنوان ہوتا ہے جس کو سب سے بلند مقام پر لکھا جانا ضروری ہے۔ عنوان، صاف مختصر اور کافی ہونا چاہیئے۔ عنوان کے ذریعہ جدول میں پیش کئے جانے والے مواد کی وضاحت کی جانی چاہیئے اور جدول میں دی گئی معلومات کی افادیت کا بھی اشارہ دینا چاہیئے۔ عنوان کو ان سوالات کا جواب دینا چاہیئے کہ مواد کیا ہے؟ مواد کہاں ہے؟ مواد کس طرح درجہ بند کیا گیا ہے؟ اور مواد کس مدت سے متعلق ہے۔

(2) جدول نمبر (Table Number) : شناخت کے لئے ہر جدول کو ایک نمبر دیا جانا چاہیئے۔ جس سے حوالے میں آسانی ہوتی ہے۔ جب

کبھی آپ متن میں جدول کا حوالہ دینا چاہتے ہیں آپ صرف جدول کے نمبر کا اظہار کر سکتے ہیں۔ نمبر کا عدد عربی یا رومن ہو سکتا ہے۔ یہ عنوان کے شروع میں رکھا جا سکتا ہے یا عنوان کے اوپر مرکز میں لکھا جا سکتا ہے۔

(3) ہیڈ نوٹ (Head Note) : ہیڈ نوٹ سرخی کے بالکل نیچے لکھا جاتا ہے، بطور ترجیح دائیں جانب کے کونے میں۔ ہیڈ نوٹ اس اکائی کی وضاحت کرتا ہے جس میں مواد کو ظاہر کیا گیا ہے۔

(4) تنا (Stub) : جیسا کہ آپ جانتے ہیں، شماریاتی جدول، مواد کی قطاروں اور کالموں میں ترتیب کا نام ہے۔ قطاروں کو جو عنوانات دیئے جاتے ہیں انہیں تنے کہا جاتا ہے۔ تنوں کو صاف طور پر بیان کرنا چاہیئے۔ تنوں کے ذریعہ جدول کی قطاروں میں پیش کردہ مواد کی صاف وضاحت کرنی چاہیئے۔

(5) سرخی (Caption) :کالموں کے عنوان کو سرخیوں سے موسوم کیا جاتا ہے۔ان کو باکس ہیڈس (Box Heads) سرنامے بھی کہا جاتا ہے۔ جدول کی قطاروں میں پیش کردہ مواد کو سرخی کے ذریعہ لیبل چسپاں کیا جاتا ہے۔ سرخی کی صاف طور پر وضاحت کرنی چاہیئے۔ ہر سرخی کے ذیلی سرنامے یا ذیلی سرخیاں ہو سکتی ہیں۔

(6) ڈھانچہ یا میدان (Body or Field) : ڈھانچہ کسی جدول کا اہم جز ہوتا ہے۔ قطاروں اور کالموں میں دی گئی معلومات جدول کے ڈھانچے کی تشکیل کرتی ہیں۔ یہ مقداری ہوتا ہے ڈھانچہ (میدان) میں ان معلومات کی مقداریں دی جاتی ہیں۔

(7) فٹ نوٹ (Footnote) : جدول سے متعلق کوئی وضاحتی نوٹ جو جدول کے راست نیچے درج کیا جاتا ہے۔ **شیہ نوٹ** فٹ نوٹ کہلاتا ہے۔ فٹ نوٹ کا اہم مقصد یہ ہے کہ جدول میں دیئے گئے کچھ مخصوص مدات کی صراحت کی جائے یا جدول میں ظاہر شدہ مواد کے متعلق شکوک و شبہات کا ازالہ کیا جائے۔

(8) حوالہ نوٹ (Reference Note) : اگر مواد کو ثانوی ماخذ سے حاصل کیا گیا ہو، تو ایک نوٹ دیا جاتا ہے کہ مواد کو کن ماخذوں سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس نوٹ کو حوالہ نوٹ کہتے ہیں۔ اس حوالہ نوٹ کو حاشیہ نوٹ کے ساتھ جدول کے نیچے رکھا جاتا ہے۔ حوالہ نوٹ صاف اور مختص ہونا چاہیئے کیونکہ اس سے یہ تصدیق کی جا سکتی ہے کہ مواد قابل اعتماد ہے یا نہیں۔

(9) مجموعے (Totals) : جدول میں تمام قطاروں اور کالموں کا حاصل جمع اور ذیلی حاصل جمع بھی دینی چاہیئے۔

7.6.2 اچھی شماریاتی جدول کے لوازمات Requisites of a Good Statistical Table

آپ نے شماریاتی جدول کے اجزاء کے متعلق مطالعہ کیا۔ اب ہم شماریاتی جدول کی خصوصیات کے بارے میں بحث کریں گے۔ ایک اچھے شماریاتی جدول کے تیار کرنے میں مندرجہ ذیل رہنما خطوط پر عمل کرنا ضروری ہے۔

(1) جدول مواد کو صاف اور سہل طریقے سے پیش کرنے کے قابل ہونا چاہیئے۔

(2) اس کا عنوان مختصر اور واضح ہونا چاہیئے۔ عنوان خود وضاحتی ہونا چاہیئے جس سے جدول کے اجزاء کی وضاحت اور ترجمانی ہو سکے۔

(3) تنا (اسٹب) اور اس کے اندراجات، سرخیاں اور ان کے سرنامے مختصر اور صاف ہونے چاہئیں۔ کالموں کے نشانات مقرر کرنا چاہیئے تاکہ متن میں ان کا حوالہ دیا جا سکے۔

(4) صدر نوٹ قطعی اور مکمل ہونا چاہیئے کیونکہ اس کا تعلق مواد کی اکائی سے ہوتا ہے۔

(5) میزان اور ذیلی میزانات موزوں جگہوں پر دیئے جائیں۔

(6) حوالوں کی صاف طور سے وضاحت ہونی چاہیئے تاکہ ضرورت پر اعتبار کی تصدیق کی جا سکے۔

(7) اگر ضرورت پڑے تو ماخوذ مواد (نسبتوں، فیصدوں اور اوسطوں وغیرہ) کو بھی جدولوں میں درج کیا جائے۔

(8) جہاں تک ممکن ہو، شماریاتی جدول میں مخفف الفاظ کے استعمال سے احتراز کیا جائے۔ اگر مخففات کو استعمال کرنا لازمی ہے تو **حاشیہ** فٹ نوٹ میں ان کے معنی کی صراحت کی جائے۔

(9) جب بھی ضرورت پڑے، جدول میں سیدھی لکیریں کھینچی جائیں۔ عموماً کالموں کو لکیروں کے ذریعہ ایک دوسرے سے علحدہ کیا جاتا ہے۔ یہ لکیریں جدول کو قابل مطالعہ اور دلکش بناتی ہیں اور مواد کے مابین روابط کو بھی صراحت سے ظاہر کرتی ہیں۔ لکیریں ہمیشہ جدول کے اوپری اور نچلے حصے میں کھینچی جاتی ہیں اور عنوانات کے نیچے بھی کھینچی جاتی ہیں۔

(10) ایضاً (ditto) کے نشانات کے استعمال سے بھی احتراز کرنا چاہیئے۔

(11) ایک دوسرے سے تقابل کئے جانے والے کالموں اور قطاروں کو ایک دوسرے کے بازو رکھنا چاہیئے۔

(12) اگر کچھ زمروں کی اضافی اہمیت کو ابھارنا مقصود ہو تو ضروری ٹائپ اسپے سنگ (type-spacing) کی مختلف قسموں اور دندانہ دار خطوط کا استعمال کر سکتے ہیں۔

(13) کالمی اعداد کی موزوں صف بستگی (must be properly align) کی جانی چاہیئے۔ اعشاری نقطے، مثبت اور منفی علامات کو بھی مکمل طور پر صف بستہ کیا جانا چاہیئے۔

(14) عموماً کسی بھی جدول میں چار یا پانچ سے زیادہ خصوصیات کو ایک ساتھ ظاہر نہیں کرنا چاہیئے ورنہ جدول نہایت پیچیدہ ہو جاتا ہے۔

7.6.3 شماریاتی جدولوں کی تیاری Preparation of Statistical Tables

آپ نے ایک اچھے شماریاتی جدول کے اجزا اور خصوصیات کا مطالعہ کیا۔ اب کچھ تمثیلوں کی مدد سے جدولوں کی تیاری کے طریقہ پر غور کیا جائے گا۔

تمثیل 4

1988 میں کسی کالج کے طلبا کے نشانات، عمر اور جنس کو ظاہر کرنے والا ایک سادہ جدول تیار کیجئے۔

نشانات کے مجموعے بطور 10 - 0 ' 20 - 10 ' 30 - 20 ' 40 - 30 اور 50 - 40 لئے جائیں جب کہ عمر کو (سال میں) بطور 19 ' 18 ' 17 اور 20 لیا جائے۔

حل :

جدول میں نشانات، عمر اور جنس کو ظاہر کرنا ہے۔ نشانات کو قطاروں اسٹب، عمر کو کالم (سرخی) اور جنس، کو ذیلی کالم (ذیلی سرخی) کے ذریعہ ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ معرا جدول کو مندرجہ ذیل طریقے سے پیش کیا جاسکتا ہے۔

1988 میں طلبا کے نشانات، عمر اور جنس

نشانات	عمر سال میں						میزان	
	17 سال		18 سال		19 سال	20 سال		
	مرد	عورت	مرد	عورت	مرد عورت	مرد عورت	مرد	عورت
0 - 10								
10 - 20								
20 - 30								
30 - 40								
40 - 50								
میزان								

فٹ نوٹ :

ماخذ :

تمثیل 5

موٹر کاروں کی تیاری پر ہندوستان کے مختلف مینو فیکچررس (تیار کنندوں) کے مواد سے ظاہر ہوتا ہے کہ 86-1985 میں ماروتی اُدیوگ کا حصہ 48.4% ، پریمیر آٹو کا حصہ 28.5% اور ہندوستان موٹرس کا حصہ 22.6% تھا۔ 87-1986 میں ہندوستان موٹرس کا حصہ 18% تک گر گیا جب کہ ماروتی ادیوگ کا حصہ 59.2% تک بڑھ گیا۔ 87-1986 میں دوسرے موٹر کار تیار کنندوں کا حصہ 1.2% تھا۔ اس مواد کو جدول کی شکل میں پیش کیجئے۔

حل

مواد فیصد کی شکل میں دیا گیا ہے۔ 86-1985 میں ماروتی ادیوگ، پریمیر آٹو اور ہندوستان موٹرس کا جملہ حصہ 99.5% ہے۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ 0.5% حصہ دیگر تیار کنندوں کا تھا۔ 87-1986 میں ہندوستان موٹرس کا حصہ 22.6% سے 18% تک گر گیا جبکہ ماروتی ادیوگ کا حصہ 48.4% سے 59.2% تک بڑھ گیا اور دوسرے صنعت کاروں کا حصہ 0.5% سے 1.2% تک بڑھ گیا۔ اس سے ظاہر ہے کہ باقی 21.6% پریمیر آٹو کا حصہ ہے۔ جدولی شکل میں مواد کو مندرجہ ذیل طریقے سے پیش کیا جاسکتا ہے۔

ہندوستان میں کاروں کی پیداوار میں مختلف مینو فیکچررس کا حصہ

تیار کنندوں کے نام	1985-86 (فیصد)	1986-87
(1) ماروتی ادیوگ	48.4	59.2
(2) پریمیر آٹو	28.5	21.6
(3) ہندوستان موٹرس	22.6	18.0
(4) دیگر تیار کنندے	0.5	1.2
میزان	100.0	100.0

تمثیل 6

ساتویں پنج سالہ منصوبے کے دوران لیبر (labour) اور لیبر ویلفیر سکٹر پر مرکزی حکومت کے مصارف کا تخمینہ مصارف 9,510 لاکھ روپے تھا اس میں سے 4,184 لاکھ روپے تربیت کے لئے 546 لاکھ روپے ملازمتی خدمات، 3,180 لاکھ روپے لیبر ویلفیر (مزدوروں کی خوش حالی) اور 1,600 لاکھ روپے بندھوا مزدوروں (Bonded labour) کی باز آبادکاری کے لئے مختص کئے گئے تھے۔ 87-1986 کے لئے کل مصارف 1,847 لاکھ روپے تھے جس میں سے تربیت کے لئے 465 لاکھ روپے، 107 لاکھ روپے ملازمتی خدمات، 755 لاکھ روپے لیبر ویلفیر اور باقی بندھوا مزدوروں کی باز آبادکاری پر خرچ کیا گیا۔ سال گزشتہ کے مقابلے میں 88-1987 کے دوران جملہ مصارف میں 49 لاکھ روپوں کا اضافہ ہوا۔ 87-1986 کے مقابلے میں تخمینہ مصارف، ملازمتی خدمات پر 11 لاکھ روپے، لیبر ویلفیر پر 148 لاکھ روپے سے گھٹ گیے اور بندھوا مزدوروں کی باز آبادکاری پر اخراجات 327 لاکھ روپے تک گھٹ گئے۔ اس بات کو نوٹ کیا جائے کہ تخمینہ مصارف میں درج فہرست ذاتوں اور درج فہرست قبائل کی تدریس و رہنمائی اسکیم (Coaching cum guidance) شامل نہیں ہے۔ اس کو سالانہ منصوبہ بابتہ 88-1987، (صفحہ 335) تک منصوبہ بندی کمیشن، گورنمنٹ آف انڈیا سے حاصل کیا گیا۔ اس مواد کو جدولی شکل میں پیش کیجیے۔

حل :

ساتویں پنج سالہ منصوبے کے دوران کل تخمینہ مصارف بہ لحاظ مدات دیے گئے ہیں۔ 87-1986 کے تخمینہ مصارف میں بند ھوامزدوروں کی باز آبادکاری پر مصارف نہیں دیے گئے ہیں۔ یہ میزانی عدد (balancing figure) ہے۔ 87-1986 کے لئے تخمینہ مصارف 1,847 لاکھ روپے تھے اور دوسرے تمام مدات پر کل تخمینہ مصارف 1,327 لاکھ روپے تھے (یعنی تربیت پر 465 لاکھ روپے، ملازمتی خدمات پر 107 لاکھ روپے، اور 755 لاکھ روپے فلاح مزدوروں پر)۔ اب بند ھوامزدوروں کی باز آبادکاری پر تخمینہ مصارف 520 لاکھ روپے (میزانی عدد) تھے۔ یہ کہا گیا ہے کہ 88-1987 کے لئے کل مصارف میں، 87-1986 کے مقابلے میں 49 لاکھ روپے اضافہ ہوا۔ اس کا مطلب ہے کہ 88-1987 کے لئے مصارف 1,896 لاکھ روپے ہیں۔ ملازمتی خدمات پر مصارف میں 11 لاکھ روپے کی کمی ہوئی ہے جس کا مطلب ہے کہ یہ 107 لاکھ روپوں سے گھٹ کر 96 لاکھ روپے ہوگئے۔ لیبر ویلفیر پر مصارف 755 لاکھ روپیوں سے 148 لاکھ روپوں تک گھٹ گئے تھے۔ جس کا مطلب ہے یہ 193 لاکھ روپے تک گھٹ گئے۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ 88-1987 میں تربیت پر مصارف 1,000 لاکھ روپے ہوئے۔ (میزانی عدد)۔ اس مواد کو جدولی شکل میں حسب ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

لیبر اور لیبر ویلفیر سیکٹر پر مرکزی حکومت کا تخمینہ مصارف

(لاکھوں روپوں میں)

	خرچ کے مدات	ساتواں پنج سالہ منصوبہ	87-1986	88-1987
(1)	تربیت	4,184	465	1,000
(2)	ملازمتی خدمات	546	107	96
(3)	لیبر ویلفیر مزدوروں کی خوش حالی	3,180	755	607
(4)	بند ھوامزدوروں کی باز آبادکاری	1,600	520	193
	جملہ	9,510	1,847	1,896

نوٹ : مصارف میں درج فہرست اقوام اور درج فہرست قبائل کی کوچنگ کم گائیڈنس (تدریس و رہنمائی اسکیم) شامل نہیں ہے۔

ماخذ : سالانہ منصوبہ 88-1987، مرتبہ منصوبہ بندی کمیشن، گورنمنٹ آف انڈیا۔ صفحہ 335۔

اپنی معلومات کی جانچ B

(1) ذیل میں ایک شماریاتی جدول دیا گیا ہے اس کے اہم اجزا کی شناخت کیجئے۔

جدول 7.4

کیرالا سوپس اینڈ آئیل لمیٹڈ

پیداوار، فروخت اور جملہ خالص منافع (-) جملہ خالص نقصان 81-1980 تا 84-1983

سال	پیداوار		فروخت		(لاکھ روپیوں) خالص منافع / (-) خالص نقصان
	مقدار (Mts)	قدر	مقدار (Mts)	قدر	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1980-81	8319	862.00	7439	747.36	11.59
1981-82	8659	925.48	9125	897.03	09.62
1982-83	9212	1016.93	9141	952.57	(-) 50.60
1983-84	6013	793.00	6094	757.61	(-) 190.12
1984-85	نامعلوم	939.00	نامعلوم	882.80	(-) 112.92

ماخذ : سالانہ رپورٹس اور اکاؤنٹس ، 81-1980 تا 84-1983 ، کیرالا سوپس اینڈ آئلس لمیٹڈ ، کالی کٹ ، کیرالا

(2) عنوان اور ہیڈ نوٹ میں فرق بتلایئے۔

.....

.....

.....

.....

(3) سرخی اور تنے میں فرق بتلایئے۔

.....

.....

.....

.....

(4) فٹ نوٹ اور حوالہ نوٹ میں کیا فرق ہے تحریر کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

(5) جدول کے ڈھانچہ (Body) سے کیا مراد ہے؟

.....

.....

.....

.....

(6) تحریر کیجئے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) ہر شماریاتی جدول کے اوپر صاف، قطعی اور خود وضاحتی عنوان ہونا چاہئیے۔

(ii) کسی جدول کے ڈھانچہ کے بالکل نیچے صدر نوٹ لکھنا چاہئیے۔

(iii) صدر نوٹ میں وہ اکائی لکھنا چاہئیے جس میں مواد دیا گیا ہے۔

(iv) سرخی کو باکس ہیڈ بھی کہا جاتا ہے۔

(v) جدول کے ڈھانچہ میں قابل اظہار مقداری معلومات دی جاتی ہیں۔

(vi) جدول کے مواد میں اگر شکوک و شبہات ہوں تو حوالہ نوٹ میں ان کے ازالہ کی کوشش کی جاتی ہے۔

(vii) فٹ نوٹ مواد کے ماخذ کو ظاہر کرنے کے لئے دیا جاتا ہے۔

(viii) کسی جدول کے تنے اور سرخیاں مختصر اور صاف ہونے چاہئیں۔

(ix) شماریاتی جدول میں لکیریں زیادہ اہم نہیں ہیں۔

(x) شماریاتی جدول میں مخففوں کا استعمال جہاں تک ممکن ہو نہ کیا جائے تو بہتر ہے۔

(7) خالی جگہوں کو قوس میں دئے گئے مناسب الفاظ سے پر کیجئے۔

(i) شماریاتی جدول کا عنوان جہاں تک ممکن ہو ..... ہونا چاہئیے۔ (بڑا / چھوٹا)

(ii) صدر نوٹ کو جدول کے عنوان کے بالکل نیچے لکھا جائے بطور ترجیحاً ..... ہاتھ کے کونے میں (دائیں / بائیں)

(iii) جدول کی قطاروں کے لیے دیئے گئے عنوان کو ..... کہتے ہیں۔ (تنا / سرخی)

(iv) سرخی مواد کو لیبل کرتی ہے جو ..... میں دیا گیا ہے۔ (کالموں / قطاروں)

(v) یہ ..... ہے کہ ہر جدول کے نیچے جدولی نمبر دیا جائے۔ (لازمی / غیر لازمی)

(vi) سرخیوں کو سلسلہ نشان ..... چاہئیے۔ (دینا / نہیں دینا)

(vii) صدر نوٹ مواد کی ..... سے متعلق ہے۔ (اکائی / خصوصیتوں)

(viii) شماریاتی جدول کی تشکیل کے وقت ایضاً نشان (ditto) ..... (استعمال کرنا چاہئیے / حذف کرنا چاہئیے)

7.7 خلاصہ Let Us Sum Up

جدولی اظہار وہ تکنیک ہے جس کے ذریعہ مواد کو منظم طریقے سے قطاروں اور کالموں میں مرتب کیا جاتا ہے۔ مواد کی افقی ترتیب کو قطار اور عمودی ترتیب کو کالم کہتے ہیں۔ جدولی اظہار سے مواد کا تقابل آسان ہو جاتا ہے۔ جدولی اظہار مطلوبہ اقدار کی شناخت میں مددگار ہوتا ہے، تجزیہ کے لئے بنیاد فراہم کرتا ہے اور مواد کے رجحان کو ظاہر کرتا ہے۔ کچھ لوگ جماعت بندی اور جدول بندی کو ہم معنی سمجھتے ہیں۔ درحقیقت ایسا نہیں ہے۔ جماعت بندی میں مواد کو مماثلت اور مشابہت کی بنیاد پر تقسیم کیا جاتا ہے جب کہ جدول سازی کے ذریعہ جماعت بند حقائق، قطاروں اور کالموں میں درج کئے جاتے ہیں۔

شماریاتی جدول معلوماتی جدول ہوتے ہیں یا عام مقصدی جدول یا خاص مقصدی جدول۔ ظاہر شدہ خصوصیات کی تعداد کے اعتبار سے معلوماتی جدول یا تو سادہ جدول ہو گا یا مخلوط۔ سادہ جدول صرف ایک خصوصیت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ مخلوط جدول میں مواد کی ایک سے زیادہ خصوصیات کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ مخلوط جدول دو رخی، سہ رخی یا ہمہ رخی ہوتے ہیں۔ عام مقصدی جدول معلومات کا ذخیرہ گھر ہوتے ہیں اور عموماً مختلف رودادوں میں بطور ضمیمہ استعمال کئے جاتے ہیں۔ خاص مقصدی جدول، شماریاتی تجزیہ میں شرح فیصد اور اوسط وغیرہ میں مددگار ہوتے ہیں۔

شماریاتی جدول کے متعدد اجزا ہوتے ہیں جیسے جدول کا نام، نمبر، اسٹب، سرخی، ذیلی سرخی، ڈھانچہ (فیلڈ)، فٹ نوٹ، حوالہ نوٹ 'میزان' جدول نمبر وغیرہ۔ ایک اچھی شماریاتی جدول مواد کو واضح اور سادہ ڈھنگ سے پیش کرتی ہے اور اس میں مختصر اور واضح عنوان، مختصر اور صاف تنے اور سرخیاں، قطعی اور مکمل ہیڈ نوٹ، واضح حوالہ نوٹ اور میزان اور ذیلی میزان موزوں مقام پر دیے جاتے ہیں۔ حسب ضرورت اس میں ماخوذ مواد بھی ظاہر کرنا چاہیئے۔ جہاں تک ہو سکے مخففات اور نشان ایضاً کے استعمال سے احتراز کرنا چاہیئے۔ جب بھی ضرورت ہو، اس میں سیدھی لکیروں کا استعمال کرنا چاہیئے۔

7.8 کلیدی الفاظ Key Words

سرخی (Caption) : جدول میں کالموں کے عنوان کو سرخی سے موسوم کیا جاتا ہے۔

مخلوط جدول (Complex Table) : وہ شماریاتی جدول جو مواد کی ایک سے زیادہ خاصیتوں کی بنیاد پر تیار کی جاتی ہے۔

کالم (Column) : شماریاتی جدول میں مواد کی عمودی ترتیب

میدان (ڈھانچہ) (Field (Body) : جدول کا اصل حصہ، جہاں پر مقداری معلومات پیش کی جاتی ہیں۔

فٹ نوٹ (Foot Note) : ایک وضاحتی نوٹ جو جدول کے راست نیچے درج کیا جاتا ہے۔

عام مقصدی جدول (General Purpose Table) : کسی مخصوص مضمون پر وسیع معلومات پر مشتمل شماریاتی جدول جو عام طور پر کسی رپورٹ کے ضمیمہ کی شکل میں موجود ہوتی ہے۔

صدر نوٹ (Head Note) : عنوان کے بالکل نیچے پیش کردہ نوٹ، ترجیحی طور پر دائیں ہاتھ کے کونے میں، جس میں اس مواد کو ظاہر کرنے والی اکائی کا اندراج ہوتا ہے۔

حوالہ نوٹ (Reference Note) : جو جدول کے اصل حصے کے نیچے دیے جانے والا نوٹ جو اس ماخذ کو ظاہر کرتا ہے کہ جس سے مواد اکٹھا کیا جاتا ہے۔

قطار (Row) : شماریاتی جدول میں مواد کی افقی ترتیب۔

سادہ جدول (Simple Table) : کسی ایک خصوصیت کی بنا پر شماریاتی جدول جس کو یکطرفہ جدول بھی کہا جاتا ہے۔

خاص مقصدی جدول (Special Purpose Table) : شماریاتی جدول جو مواد کے تجزیہ میں مددگار ہوتا ہے اور ماخوذ شماریات کی بھی نشاندہی کرتا ہے۔

تنا (Stub) :شماریاتی جدول میں دی گئی قطار کا عنوان۔

عنوان (Title) : نوٹ جو شماریاتی جدول کے اوپر لکھا جاتا ہے، جس میں مواد کی خاصیتوں کو پیش کیا جاتا ہے۔

7.9 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات Answers to Check Your Progress

7 (A) (i) غلط (ii) صحیح (iii) صحیح (iv) صحیح (v) غلط (vi) صحیح
(vii) صحیح (viii) غلط (ix) غلط (x) صحیح (xi) صحیح (xii) صحیح

8 (i) افقی (ii) جدول بندی (iii) سادہ (iv) تجزیہ (v) مختلف (vi) جامع
(vii) ایک سے زائد (viii) رپورٹوں کے ضمیمے (ix) تجزیہ (x) مکملہ

1 (B)

جدول 7.4
کیرالا سوپس اور آئیل لمیٹڈ
پیداوار، فروخت اور خالص منافع /(-) خالص نقصان 1980-81 تا 1983-84 کے لئے

روپے (لاکھوں میں)

سال	پیداوار		فروخت		خالص منافع / (-)خالص نقصان
	مقدار (Mts)	قدر	مقدار (Mts)	قدر	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1980-81	8319	862.00	7439	747.36	11.59
1981-82	8659	925.48	9125	897.03	09.62
1982-83	9212	1016.93	9141	952.57	(-) 50.60
1983-84	6013	793.00	6094	757.61	(-) 190.12
1984-85	نامعلوم	939.00	نامعلوم	882.80	(-) 112.92

مرتبہ : سالانہ رپورٹیس اور حسابات 1980-81 تا 1983-84، کیرالا سوپس اینڈ آئیلس لمیٹڈ، کالی کٹ، کیرالا

(6) (i) صحیح (ii) غلط (iii) صحیح (iv) صحیح (v) صحیح (vi) غلط (vii) غلط
(viii) صحیح (xi) غلط (x) صحیح

(7) (i) چھوٹا (ii) دائیں (iii) تنا (iv) کالم (v) لازمی (vi) دینا
(vii) اکائی (viii) حذف کرنا چاہیئے۔

7.10 امتحانی سوالات / مشقیں Terminal Questions/Exercises

سوالات

(1) جدول بندی کیا ہے؟ شماریاتی جدول کے کیا مقاصد ہوتے ہیں؟

(2) شماریاتی جدول کا نمونہ دیجئے اور اس کے اجزاء کی نشاندہی کیجئے۔

(3) سادہ اور مخلوط شماریاتی جدولوں کے درمیان فرق کیجئے اور دونوں قسم کی جدولوں کی مثالیں دیجیے۔

(4) شماریاتی جدول کے لوازمات کی وضاحت کیجئے۔

مشقیں

(1) کسی شہر کے باشندوں کی عمر، جنس اور خواندگی کی سطحوں کو ظاہر کرنے کے لئے سادہ شماریاتی جدول تیار کیجئے۔

(2) کسی تنظیم میں 1,000 ملازمین ہیں جس میں 40% عورتیں ہیں۔ کل ملازمین کا 30% سگریٹ نوشی کرتے ہیں اور سگریٹ نوشی کرنے والی عورتوں کی تعداد 10 ہے۔

(3) ہندوستان کے چار بڑے شہروں میں جرائم کی تعداد (سو سے قریب ترین) مندرجہ ذیل ہے۔ بمبئی میں 1961 میں جرائم کی تعداد سب سے زیادہ درج کی گئی یعنی 19,400 جس کے بعد کلکتہ 14,200، دہلی 10,000 اور مدراس 5,700 کا درجہ آتا ہے۔ 1971ء میں بمبئی میں 1961ء کی تعداد کے مقابل، 5,700 کا اضافہ ہوا۔ دہلی اور مدراس میں یہ اضافہ علی الترتیب 6,400 اور 1,500 ہے لیکن کلکتہ کی صورت میں اسی متناظر دور کے لئے ان جرائم کی تعداد 10,900 سے گر گئی۔ 1981 میں بمبئی میں جرائم کی تعداد 36,000 رکارڈ کی گئی۔ اسی سال میں بمبئی کی بہ نسبت دہلی میں۔ جرائم کی تعداد 7,000 کم درج کی گئی۔ کلکتہ میں 1981 میں 1971 کے مقابل جرائم کی تعداد میں 3,100 کا اضافہ ہوا۔ مدراس میں 1971 کی بہ نسبت 1981 میں جرائم کی تعداد میں اضافہ 8,500 تھا اس مواد کو جدولی شکل میں ظاہر کیجیے۔

نوٹ : یہ سوالات اس اکائی کے سمجھنے میں مددگار ثابت ہوں گے۔ ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجئے لیکن آپ کے جواب یونیورسٹی کو نہ بھیجئے۔ یہ آپ کی مشق کے لیے ہیں۔

اکائی 8 شکلی اظہار

UNIT-8 : DIAGRAMMATIC PRESENTATION

Structure	ساخت	
Objectives	مقاصد	8.0
Introduction	تمہید	8.1
Importance of Visual Presentation of Data	مواد کے بصری اظہار کی اہمیت	8.2
Principles of Preparing Diagrams	اشکال تیار کرنے کے اصول	8.3
Types of Diagrams	اشکال کی قسمیں	8.4
One Dimensional Diagrams	یک بُعدی اشکال	8.5
Simple Bar Diagrams	سادہ سلاخی اشکال	8.5.1
Multiple Bar Diagrams	کثیر سلاخی اشکال	8.5.2
Sub-divided Bar Diagrams	ذیلی منقسم سلاخی اشکال	8.5.3
Percentage Sub-divided Bar Diagrams	فیصد ذیلی منقسم سلاخی اشکال	8.5.4
Two Dimensional Diagrams	ذو بُعدی اشکال	8.6
Rectangles	مستطیل	8.6.1
Sub-divided Rectangles	ذیلی منقسم مستطیل	8.6.2
Squares and Circles	مربعے اور دائرے	8.6.3
Pie-Diagrams	پائی اشکال	8.6.4
Let Us Sum Up	خلاصہ	8.7
Key Words	کلیدی الفاظ	8.8
Answers to Check Your Progress	اپنی معلومات کی جانچ جوابات	8.9
Terminal Questions/Exercises	امتحانی سوالات / مشقیں	8.10

8.0 Objectives مقاصد

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:۔

- بصری اظہار کی اہمیت بیان کر سکیں۔
- مواد کے اظہار کے لئے شکلوں کی افادیت کی وضاحت کر سکیں۔
- شکلیں تیار کرنے کے اصولوں کی وضاحت کر سکیں۔
- مختلف قسم کی شکلیں تیار کر سکیں۔

8.1 تمہید Introduction

اکائی 7 میں آپ نے سیکھا کہ جدولی شکل میں مواد کا اظہار، تقابل کے عمل کو سہل بنانے میں مفید ہے کیونکہ یہ مواد کو سادہ اور منظم انداز میں پیش کرتا ہے۔ مواد جدولی شکل میں ہوں تو رجحان اور نمونوں کا باسانی تعین کیا جاسکتا ہے۔ جدولی شکل کے علاوہ مواد کو اشکال (diagrams) اور ترسیم (graph) کے ذریعہ بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔ شکلوں اور ترسیم کے ذریعہ مواد کے اظہار کو بصری اظہار بھی کہتے ہیں۔ جدولی اظہار کے مقابلہ میں اشکال اور نقشوں کے ذریعہ مواد کا اظہار بہت پُر اثر ہوتا ہے اور اس سے نتائج بھی بہ آسانی اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ اس اکائی میں، آپ مواد کے شکلی اظہار کی اہمیت، اصول اور مختلف قسموں کا مطالعہ کریں گے۔

8.2 مواد کے بصری اظہار کی اہمیت
Importance of Visual Presentation of Data

مواد کے بصری اظہار کا مطلب ہے مختلف شکلوں، منحنی خطوط اور خطوط مستقیم کے ذریعہ مواد کا اظہار مندرجہ ذیل اسباب کی وجہ سے پسندیدہ ہے۔

(1) بصری اظہار، عددی مواد کے پھیکے پن کو دور کرتا ہے۔ عددی مواد کے انبار سے نتیجہ اخذ کرنا اکثر مشکل ہوتا ہے اس کے علاوہ یہ ذہن پر غیر ضروری بوجھ ڈالتا ہے۔ مواد کو اگر اشکال اور ترسیم کے ذریعہ ظاہر کیا جائے تو یہ دلچسپی پیدا کرتا ہے اور قاری کے ذہن و دماغ پر اس کا اثر بہت دیرپا اور مستقل ہوتا ہے۔

(2) اگر اس کو اشکال اور ترسیم کے ذریعہ پیش کیا جائے تو مواد کا مقابلہ و موازنہ آسان ہو جاتا ہے۔ متعدد صورتوں میں شکل یا ترسیم پر بغور نظر ڈالنے سے پیچیدہ مواد کا تقابل کرنا بھی کافی سہل ہو جاتا ہے۔

(3) مختلف شماریاتی پیمائشوں کا تعین ترسیم (graph) کے ذریعہ ممکن ہے۔ کئی مرکزی اقدار کے پیمانے، جیسے وسطانیہ (Median)، چوتھائیے (Quartiles)، کثیریہ (Mode) وغیرہ ترسیمات (محرابی ترسیم کثیریہ (Ogives) اور مستطیلی ترسیم (Histogram)) کی مدد سے متعین کئے جاسکتے ہیں۔

(4) ترسیمات کی مدد سے گزشتہ کارگزاری کے رجحانات کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔ ترسیمات کے ذریعے ان رجحانات کا اظہار پیش قیاسی میں مددگار ہوتا ہے۔

(5) اشکال اور ترسیمات کئی کاروباری اداروں کے لئے اشتہاری مہم کا ایک لازمی جزو بن چکے ہیں۔ بصری تاثیر کے بغیر اشتہارات نامکمل سے لگتے ہیں۔

8.3 اشکال تیار کرنے کے اصول Principles of Preparing Diagrams

آپ نے مواد کے شکلی اظہار کی اہمیت کے متعلق معلومات حاصل کیں۔ اب ہم ان رہنما خطوط پر غور کریں گے جو اشکال کی تیاری میں معاون ہوتے ہیں۔ اشکال کی تیاری کے دوران مندرجہ ذیل رہنما خطوط ذہن نشین رکھنے چاہئیں۔

(1) شکل کو ترسیمی محوروں۔ محور 'X' اور محور 'Y' پر تیار کرنا چاہیئے۔ تاہم ترسیمی کاغذ (graph paper) استعمال کرنا ضروری نہیں۔ دونوں محوروں کے پیمانے لیتے وقت، یہ خیال رکھنا چاہیئے کہ مواد کو بامعنی ڈھنگ سے پیش کیا جائے۔ دونوں محوروں پر واضح طور پر پیمانے کا تعین کرنا چاہیئے۔

(2) جب بھی مواد کو Y محور (عمودی پیمانہ) پر پیش کرنا ہو تو پیمانہ صفر سے شروع ہونا چاہیے۔ عموماً عمودی پیمانہ شکستہ نہیں ہوتا۔

(3) کسی شکل کا عنوان ہمیشہ مختصر اور خود آشکار ہونا چاہیے۔

(4) کسی شکل کے مختلف اجزا کو اجاگر کرنے کے لئے ہلکے اور گہرے رنگوں کا استعمال کرنا چاہیے اور اس کی کلیدی شرح بھی دی جانی چاہیے۔

(5) شکل کو جاذبِ نظر بنانے کے لئے، شکل کے اطراف معقول حاشیہ چھوڑا جائے۔ شکل نہ تو بہت بڑی ہونی چاہیے اور نہ ہی بہت چھوٹی۔

(6) اگر زیادہ تعداد میں اشکال تیار کرنے ہوں تو بہتر ہے کہ حوالے کی خاطر ان کے سلسلہ نشان مقرر کئے جائیں۔

8.4 اشکال کی قسمیں Types of Diagrams

شکلوں کو ابعاد علاقہ میں سے یعنی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی کی بناء پر درجہ بند کیا جاتا ہے۔ عموماً شکلوں کی درجہ بندی مندرجہ ذیل طور پر کی جاتی ہے (i) یک بُعدی شکل (ii) دوابعادی شکل اور (iii) سہ ابعادی شکل۔ ان اشکال کے علاوہ، مواد کو نقشوں اور تصویری ترسیمات (Picto graphs) کی شکل میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔ لیکن اس اکائی میں ہم صرف یک بُعدی اور دوابعادی شکل پر بحث کریں گے۔

8.5 یک بُعدی اشکال One Dimensional Diagrams

یک بُعدی اشکال کو صرف ایک بُعد کی بنیاد پر تیار کیا جاتا ہے یعنی طول۔ اس قسم کی شکل میں، دیگر دو ابعاد کی کچھ اہمیت نہیں ہوتی۔ اس قسم کی اشکال سلاخوں اور کالم نقشوں کی صورت میں ہوتی ہیں۔ سلاخیں یا کالم نقشے ضخامت کا بصری موازنہ کرنے میں مدد کرتے ہیں۔ مختلف سلاخوں کا طول دئے گئے مواد کی ضخامت کے (magnitude) تناسب میں ہوتا ہے۔ مواد کی ضخامت قدر سے کوئی نسبت نہیں رکھتی لیکن شکل کو دیدہ زیب بناتی ہے۔ مثال کے طور پر سال 1988 اور سال 1989 کے لئے کسی کاروباری ادارے کے پیداواری اعداد و شمار بالترتیب 10,000 اور 20,000 اکائیاں ہیں۔ اگر ہم اس مواد کے لئے سلاخی شکل مرتسم کریں تو، ان دونوں سلاخوں کا طول 2 : 1 کی نسبت میں ہوگا لیکن ان کی موٹائی یکساں ہوگی۔ یک بُعدی شکلوں کی مزید زمرہ بندی اس طرح کی جاسکتی ہے: (۱) سادہ سلاخی اشکال (۲) کثیر سلاخی اشکال (۳) ذیلی منقسم سلاخی اشکال (۴) فیصد ذیلی منقسم سلاخی اشکال اسی طرح دوابعادی اشکال کی زمرہ بنی بھی کی جاسکتی ہے جیسے (۱) مستطیل شکلیں (۲) ذیلی منقسم مستطیل شکلیں (۳) مربع اور دائرہ شکلیں (۴) پائی شکلیں (Pie) اب ہم تفصیل سے ان تمام کا مطالعہ کریں گے۔

8.5.1 سادہ سلاخی اشکال Simple Bar Diagrams

سادہ سلاخی شکل میں دی گئی ہر ایک قدر کی نمائندگی کے لئے ایک سلاخ تیار کی جاتی ہے۔ مختلف سلاخوں کا طول دیے گئے مواد کی قدروں کی نسبت میں ہوتا ہے چونکہ سلاخوں کی موٹائی کوئی اہمیت نہیں رکھتی، اس لئے تمام سلاخوں کے لئے ایک ہی موٹائی ہوتی ہے۔ اگرچہ سلاخیں مستطیل نما نظر آتی ہیں لیکن یہ مستطیل نہیں ہوتیں کیونکہ یہ صرف طول کی تعبیر کرتی ہیں۔ مختلف سلاخوں کے درمیان فصل یعنی خالی جگہ رکھی جاتی ہے۔ سلاخوں کے درمیان فصل عموماً مساوی ہوتا ہے سادہ سلاخوں کو افقی یا عمودی طور پر تیار کیا جاسکتا ہے۔ سادہ سلاخی اشکال کے ذریعہ مثبت اور منفی دونوں قسم کی اقدار کو پیش کیا جاسکتا ہے۔

سادہ سلاخی شکل کو عموماً اس وقت تیار کیا جاتا ہے جبکہ مواد ایک مقررہ مدت کے دوران کسی متغیرہ کی مختلف قدروں کی تعبیر کرتا ہے یا مواد مختلف حالات کی ترجمانی کرتا ہے۔ سادہ سلاخی شکلیں تیار کرنا نہایت آسان کام ہے۔ تمثیلات 1 اور 2 کا بغور مطالعہ کریں اور سادہ سلاخی شکلوں کی تیاری کا عمل بھی سیکھ لیں۔

تمثیل 1

ماروتی اُدیوگ لمیٹڈ میں فی ملازم اضافہ شدہ قدر کے تعلق سے مندرجہ ذیل مواد کے لئے ایک سادہ سلاخی شکل تیار کیجئے۔

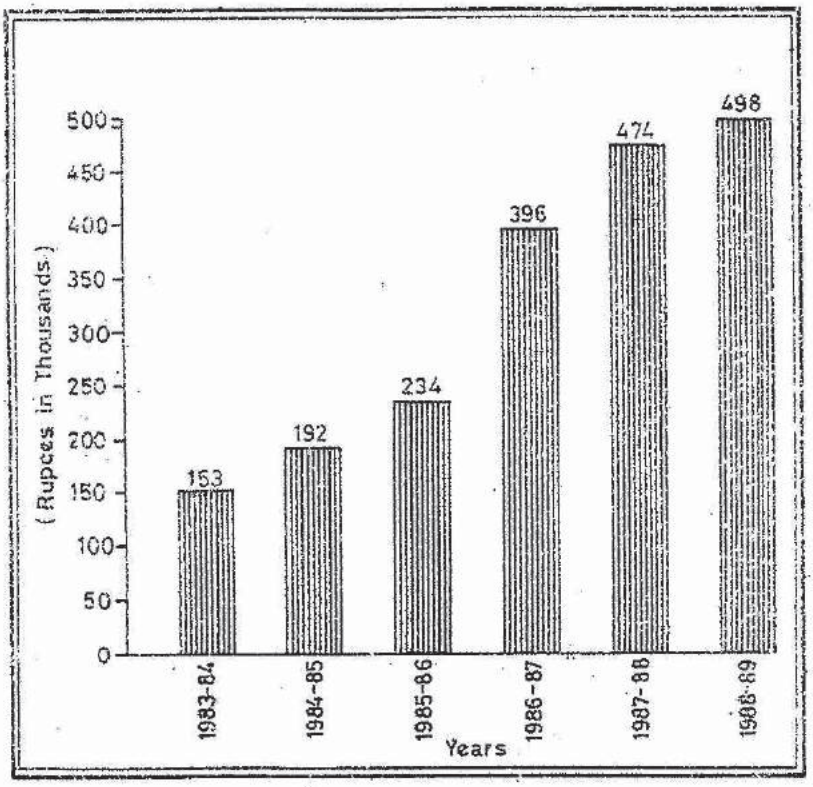
سال	1983-84	1984-85	1985-86	1986-87	1987-88	1988-89
قدر مزید فی ملازم (000' روپیوں میں)	153	192	234	396	474	498

حل : مختلف برسوں کے لئے فی ملازم اضافہ شدہ قدر (000' روپیوں میں) دی گئی ہے۔

ہر سال کے لئے ایک سلاخ تیار کی جائے گی جو کہ دیے گئے مواد کی قدر کی نسبت میں ہوگی۔ مختلف سلاخوں کے درمیان مساوی فاصلہ چھوڑا جائے گا۔ سلاخوں کو عمودی طور پر تیار کیا گیا ہے جس میں برسوں کو افقی محور پر اور فی ملازم قدر مزید کو عمودی محور پر ظاہر کیا گیا ہے۔ اب شکل 8.1 کا بغور مطالعہ کیجئے۔

شکل 8.1 : ماروتی اُدیوگ لمیٹڈ میں فی ملازم اضافہ شدہ قدر کو ظاہر کرنے والی سادہ سلاخی شکل

Diagram 8.1 : Simple Bar Diagram Showing the Value Added per Employee in Maruti Udyog Limited



تمثیل 2

کسی ملک کے توازن تجارت سے متعلق مندرجہ ذیل مواد کے لئے سلاخی شکل پیش کیجئے۔

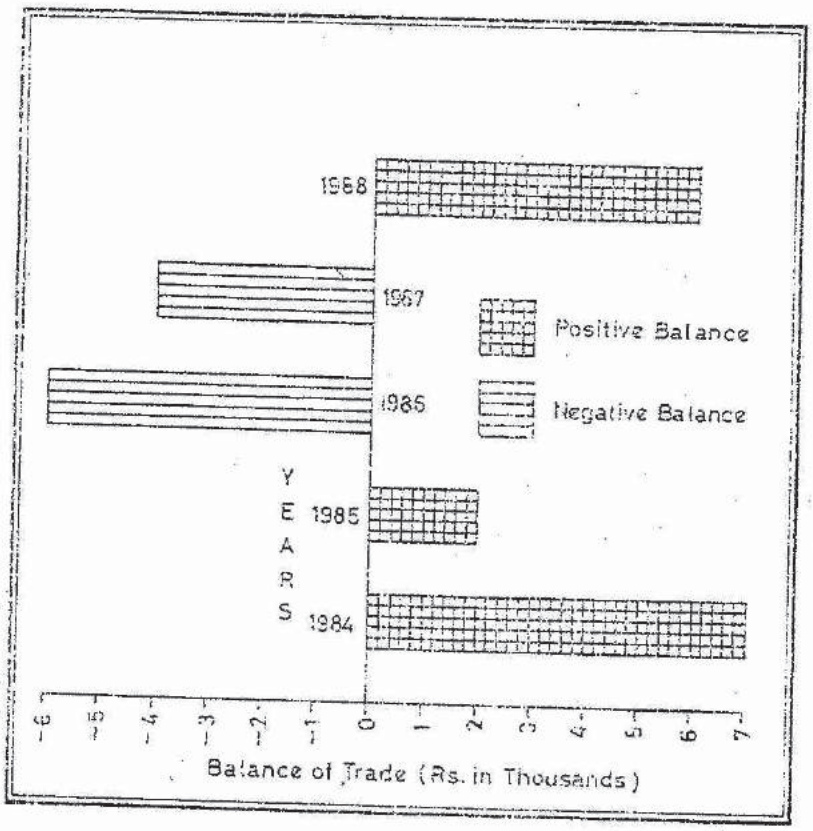
سال	:	1984	1985	1986	1987	1988
توازن تجارت (روپے 000 میں)	:	7	2	-6	-4	6

حل :

دیا گیا مواد مثبت اور منفی دونوں قدروں کی ترجمانی کرتا ہے۔ یہ مواد افقی اور عمودی دونوں طرح سے پیش کیا جا سکتا ہے۔ اگر سلاخوں کو افقی طور پر تیار کیا جائے تو مثبت قدروں کو عمودی محور کی دائیں جانب لیا جائے گا اور منفی قدروں کو اس کی بائیں جانب۔ اسی طرح سے اگر سلاخوں کو عمودی طور پر تیار کیا جائے تو مثبت قدروں کو افقی محور کے اوپر اور منفی قدروں کو نیچے لیا جائے گا۔ چونکہ سابقہ تمثیل میں ہم نے عمودی اظہار کو پیش کیا تھا، اب اس شکل کو افقی طور پر پیش کریں گے۔ شکل 8.2 کو غور سے دیکھیے اور سمجھیے کہ سلاخوں کی ترسیم کی کس طرح کی گئی ہے۔

شکل 8.2 : سادہ سلاخی شکل جس میں مثبت اور منفی قدروں کو ظاہر کیا گیا ہے۔

Diagram 8.2 : Simple Bar Diagram Showing the Positive and Negative Values



8.5.2 کثیر سلاخی اشکال Multiple Bar Diagrams

اس قسم کی شکلوں میں دو یا دو سے زائد سلاخیں تشکیل دی جاتی ہیں جو ایک دوسرے سے متصل ہوتی ہیں۔ یہ سلاخیں یا تو مختلف تغیرات کی نمائندگی کرتی ہیں یا ایک ہی تغیر کے مختلف اجزا کو پیش کرتی ہیں۔ دیئے گئے سٹ (Set) 'K' کی سلاخوں کو ایک دوسرے سے متصل کر کے تشکیل دیا جاتا ہے اور مختلف سٹوں کی سلاخوں کے درمیان مساوی فصل یعنی خالی جگہ چھوڑ دی جاتی ہے۔ سادہ سلاخی شکلوں کی طرح، مختلف سلاخوں کا طول دی گئی قدروں کی جسامت کی نسبت میں بدلتا جاتا ہے۔ مختلف سلاخوں کی چوڑائی مساوی ہوگی۔ یہ شکل، ایک طرف کسی سٹ میں مختلف متغیروں کی اقدار کا موازنہ کرنے میں سہولت بخش ہے تو دوسری طرف کسی مدت کے دوران ایک متغیرے کی قدروں کا موازنہ کرنے میں سہولت پیدا کرتی ہے۔ موازنہ میں آسانی پیدا کرنے کی خاطر کسی سیٹ کی مختلف سلاخوں میں مختلف رنگ بھرے جائیں، لیکن کسی ایک متغیرے یا مختلف سٹوں کے ایک ہی جز کے لئے ایک ہی رنگ استعمال کیا جانا چاہیئے۔ اب ہم تمثیل 3 کا مطالعہ کریں گے اور کثیر سلاخی شکلوں کے متعلق سیکھیں گے۔

تمثیل 3

کسی یونیورسٹی کی مختلف فیکلٹیوں میں طلبہ کے داخلوں کی تعداد سے متعلق مندرجہ ذیل مواد دیا گیا ہے۔ اس مواد کو کثیر سلاخی شکل میں پیش کیجئے۔

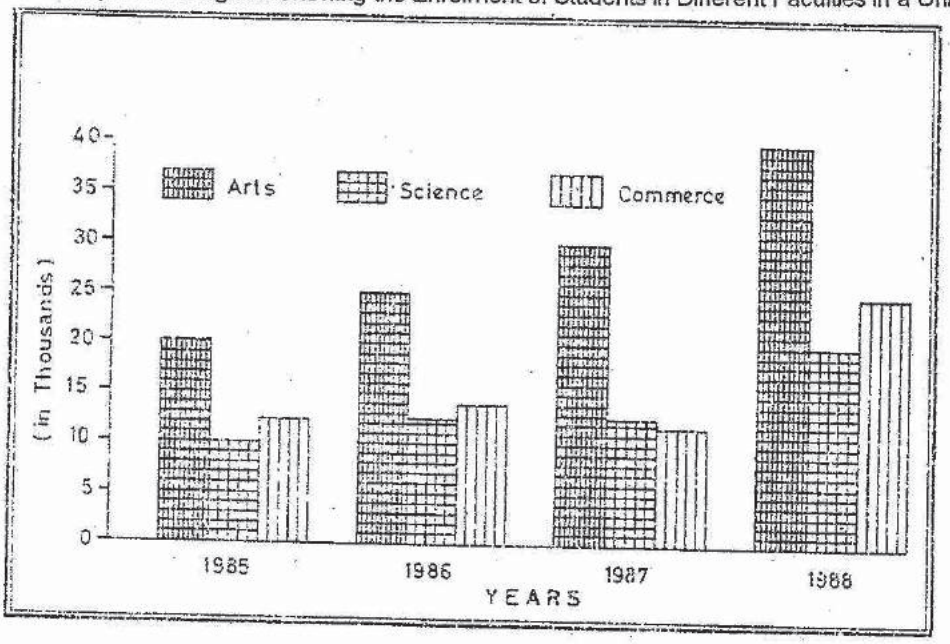
سال	آرٹس	سائنس	کامرس
1985	20	10	12
1986	25	12	14
1987	30	15	14
1988	40	20	25

حل

یہ مواد، کسی یونیورسٹی میں آرٹس، سائنس اور کامرس فیکلٹیوں میں طلبہ کے داخلوں کے تعلق سے ہے۔ یہ مواد چار سال 1985 تا 1988 کی مدت کے لئے ہے۔ اس لئے سلاخوں کے چار سٹ مرتسم کئے جائیں گے جہاں ہر سٹ ایک سال کی ترجمانی کرے گا۔ ہر سٹ میں تین فیکلٹیوں کی ترجمانی کرنے والی تین سلاخیں ہونی چاہیئے۔ ہر ایک سٹ میں تمام تین سلاخوں کو ایک دوسرے سے متصل تیار کرنا چاہیئے اور ان کی چوڑائی یکساں (identical) ہونی چاہیئے۔ تمام چاروں سٹوں کے درمیان مساوی خالی جگہ چھوڑنا چاہیئے۔ شکل 8.3 کا مطالعہ کیجئے اور معلوم کیجئے کہ شکل کس طرح تیار کی گئی ہے۔

شکل 8.3 : کثیر سلاخی شکل جو کسی یونیورسٹی میں مختلف فیکلٹیوں میں طلبہ کے داخلوں کو ظاہر کرتی ہے

Diagram 8.3 : Multiple Bar Diagram Showing the Enrolment of Students in Different Faculties in a University



8.5.3 ذیلی منقسم سلاخی اشکال Sub-divided Bar Diagrams

اس قسم کی سلاخی شکلیں ایک ہی متغیرہ کے مختلف اجزاء کو پیش کرنے کے لئے تیار کی جاتی ہیں۔

اس کو جزو یاتی/مجزوی (Component Diagrams) شکلیں بھی کہتے ہیں۔ اس شکل میں متغیرہ کی کل قدر کے لئے ایک سلاخ تشکیل دی جاتی

(viii) کسی کثیر سلاخی شکل میں، مختلف سلاخوں کے طول دیئے گئے مواد کی ضخامت کی نسبت میں ہوتے ہیں۔

(ix) سلاخ اور مستطیل میں کوئی فرق نہیں ہوتا۔

(x) عموماً، مختلف سلاخوں کے درمیان مساوی فصل یعنی خالی جگہ چھوڑی جانی چاہیئے۔

(xi) کثیر سلاخی اشکال کی صورت میں، مختلف سلاخوں کی لمبائی دی گئی ضخامت (magnitude) کی اقدار کی نسبت میں بدلتی ہے۔

(xii) ایک ذیلی منقسم سلاخی شکل ایک ہی متغیر کے مختلف اجزا (components) کو ظاہر کرنے کے لیے تیار کی جاتی ہے۔

(7) قوسین میں دیئے گئے موزوں الفاظ سے خالی جگہوں کو پُر کیجئے۔

(i) مواد کا بصری اظہار عددی مواد کے پھیکے پن میں ..... کرتا ہے۔ (ازالہ / اضافہ)

(ii) اشکال پر غائر نظر، پیچیدہ مواد کے موازنے کو ..... بناتی ہے۔ (زیادہ مشکل / آسان تر)

(iii) ایک سادہ سلاخی شکل دی گئی ..... قدر / قدروں کی تعبیر کرنے کے لیے تیار کی جاتی ہے۔ (ایک / دو)

(iv) سادہ سلاخیں منفی اقدار کو ظاہر..... ہیں۔ (کر سکتی / نہیں کر سکتی)

(v) کثیر سلاخی اشکال میں، مختلف سلاخوں کی چوڑائی ..... رکھی جاتی ہے۔ (مختلف / یکساں)

(vi) ذیلی منقسم سلاخی شکل میں، ہر سلاخ کو ..... اقدار کی بنیاد پر ذیلی تقسیم کیا جاتا ہے۔ (مجموعی / حقیقی)

(vii) ذیلی منقسم سلاخی شکل کو فیصد کی بنیاد پر تیار ..... ہے۔ (کیا جاسکتا / نہیں کیا جاسکتا)

(viii) ذیلی منقسم سلاخی شکل میں منفی اقدار ظاہر..... ہیں۔ (کی جاسکتی / نہیں کی جاسکتی)

8.6 دو بعدی اشکال Two Dimensional Diagrams

جیسا کہ آپ جانتے ہیں اشکال کی تقسیم مندرجہ ذیل طریقہ سے کی جاسکتی ہے۔ (1) یک بُعدی اشکال (2) دوابعادی اشکال (3) سہ ابعادی اشکال۔ ہم نے اس سے پہلے یک بُعدی اشکال کے متعلق تفصیل کے ساتھ بحث کی ہے۔ اب ہم دوابعادی اشکال پر روشنی ڈالیں گے۔

جیسا کہ آپ جانتے ہیں، ابعاد تین ہوتے ہیں یعنی طول، عرض اور ارتفاع (لمبائی، چوڑائی اور بلندی) جن کی بنیاد پر اشکال تشکیل دی جاتی ہیں۔ یک بُعدی اشکال صرف طول کی بنیاد پر تیار کی جاتی ہیں اور عرض کے بیان کی کوئی اہمیت نہیں رہتی۔ سلاخوں کا طول، دیئے گئے مواد کی قدر کی نسبت میں ہوتا ہے۔ بہر حال دوابعادی اشکال دو ابعاد کی بنیاد پر تشکیل دی جاتی ہیں یعنی طول اور عرض۔ چونکہ طول اور عرض کا حاصل ضرب رقبہ ہوتا ہے۔ ایسی اشکال کو "رقبہ اشکال" بھی کہتے ہیں۔ دو بُعدی اشکال کو ذیل کے مطابق درجہ بند کیا جاسکتا ہے : (1) مستطیل (2) ذیلی منقسم مستطیل (3) مربعے اور دائرے (4) پائی (Pie) اشکال۔ اب ہم ان زمروں پر بحث کریں گے۔

8.6.1 مستطیل (Rectangels)

مستطیل کو طول اور عرض کی بنیاد پر تیار کیا جاتا ہے اور یہ رقبہ کی نشاندہی کرتا ہے۔ مستطیل کی تیاری سے پہلے یہ تعین کرنا ضروری ہے کہ طول اور عرض کن متغیروں کی ترجمانی کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر اک صنعتی ادارہ ایک مخصوص مہینے کے دوران مصنوعات کی 10,000 اکائیوں کو پیدا کرتا ہے جس مصنوعات (Product) کی پیداواری لاگت فی اکائی 20 روپے ہے۔ مستطیل تیار کرنے کے لیے پیدا شدہ اکائیوں کی تعداد کو بطور طول اور فی اکائی پیداواری لاگت کو بطور عرض ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ کیونکہ مستطیل رقبہ کو ظاہر کرتا ہے، اس صورت میں مستطیل پیداوار کی کل لاگت (یعنی 20x10,000 روپے = 2,00,000 روپے) کو ظاہر کرتا ہے۔ اب ہم ایک تمثیل کے ذریعہ عملاً مستطیل تیار کرنے کے عمل کو سیکھیں گے۔

تمثیل 7

مندرجہ ذیل مواد 1989 کے پہلے دو مہینوں کے دوران کسی صنعتی ادارے کی تیار کردہ اکائیوں کی تعداد اور لاگت فی اکائی کو ظاہر کرتا ہے۔ اس مواد کے اظہار کے لیے مستطیل تیار کیجئے۔

	جنوری	فروری
تیار کردہ اکائیوں کی تعداد	1,00,000	80,000
لاگت فی اکائی	Rs. 8	Rs. 10

حل

اس مواد کے لیے ہم کو ذیل کی بنیاد پر دو مستطیل تیار کرتے ہوں گے:۔

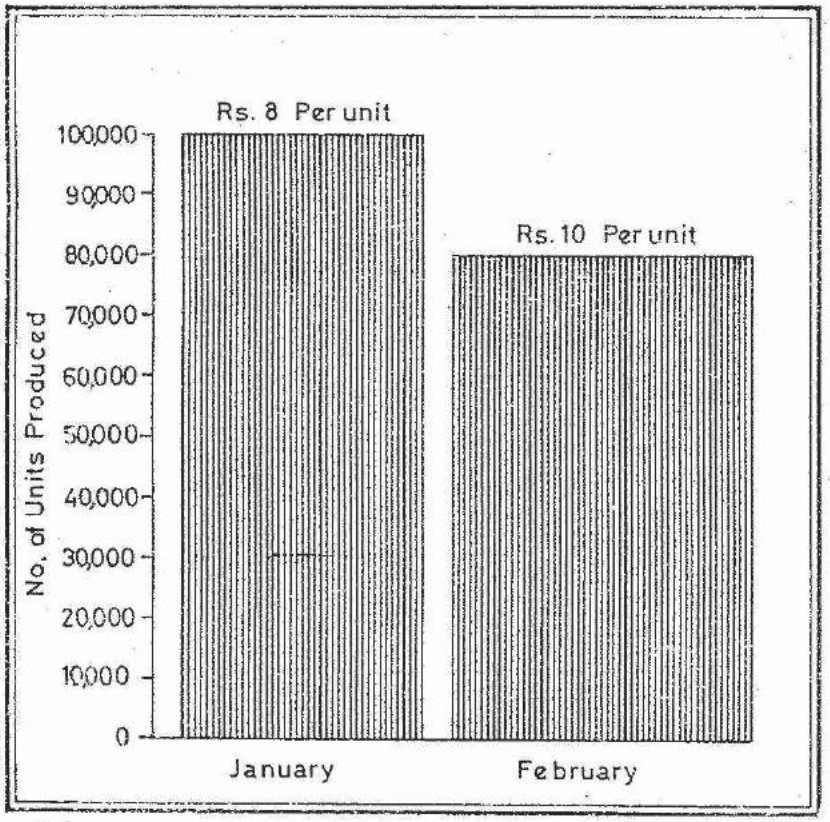
	مستطیل - I	مستطیل - II
طول (تیار کردہ اکائیاں)	1,00,000 اکائیاں	80,000 اکائیاں
عرض (لاگت فی اکائی)	8 روپے	10 روپے

دونوں مستطیلوں کا طول 10 : 8 کی نسبت میں ہوگا اور عرض 8 : 10 کی نسبت میں۔

اب شکل 8.7 پر غور کیجئے جس میں دونوں مستطیلوں کو ظاہر کیا گیا ہے۔ تاہم آپ غور کر سکتے ہیں کہ دونوں مستطیلوں کا رقبہ مساوی ہے۔

شکل 8.7 : مستطیل جو پیداوار کی لاگت ظاہر کرتے ہیں۔

Diagram 8.7 : Rectangles Showing the Cost of Production



		رقم (روپے کروڑ میں)
(1)	زراعت اور مربوط سرگرمیاں	2,378
(2)	توانائی	12,999
(3)	صنعت اور معدنیات	5,635

حل :

پہلے، دیئے گئے مواد کے لیے جذرالمربع (Square Root) محسوب کرنا چاہیے۔ بعدازاں موزوں پیمائش کو اختیار کر کے مربع کے اضلاع اور دائرے کا نصف قطر معلوم کرنا چاہیے۔

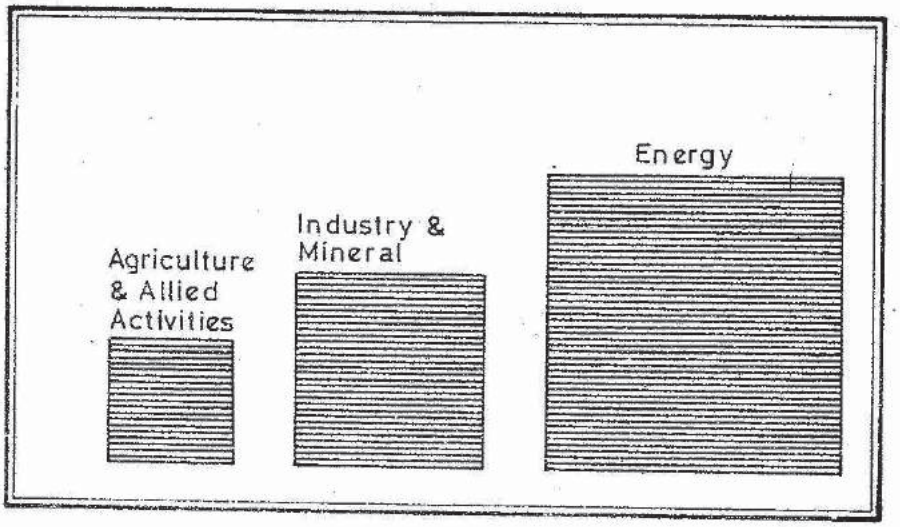
جذرالمربع کی تحسیب

ترقی کا مد		رقم (روپے)	جذرالمربع	مربع کا ضلع یا دائرے کا نصف قطر (سم میں)
(1)	توانائی	12,999	114.01	4.68
(2)	صنعت اور معدنیات	6,243	79.01	3.24
(3)	زراعت اور مربوط سرگرمیاں	2,378	48.76	2.00

اقل ترین جذرالمربع کی قدر کو مربع کے ضلع یا دائرے کے نصف قطر کا تعین کرنے کے لیے بنیاد مان لیا گیا ہے۔ مندرجہ بالا صورت میں جذرالمربع کی قدر 48.76 کو بطور 2.00 سم لیا گیا ہے اور دیگر ضلعوں / نصف قطر کا مختلف جذرالمربعوں کی قدروں کے تناسب میں تعین کیا گیا ہے۔ اب مربعوں اور دائروں کو اشکال 8.9A اور 8.9B میں بتلائے گئے خطوط پر تیار کیا گیا ہے۔

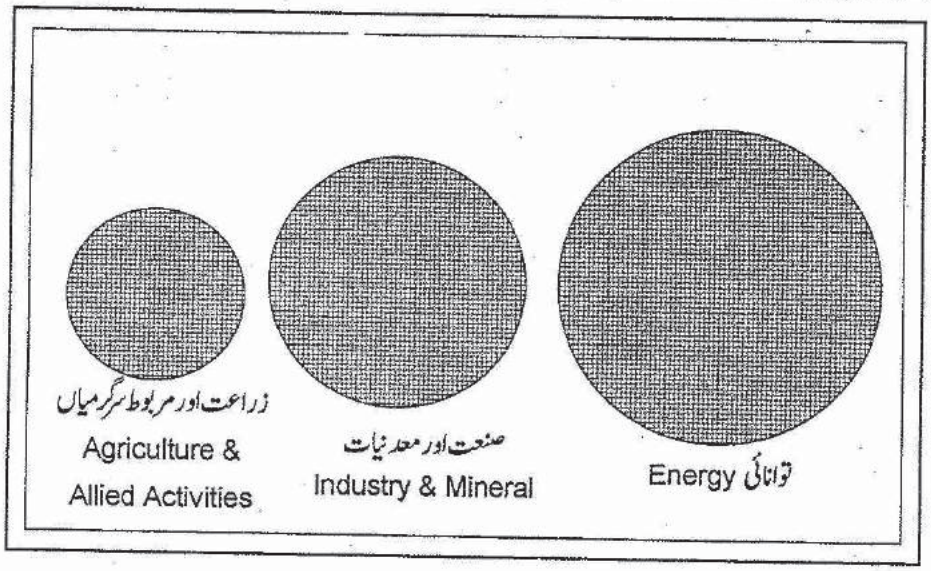
شکل 8.9A : (1987-88) کے دوران مختلف شعبوں کے لیے سالانہ منصوبہ مصارف ظاہر کرنے والے مربعے

Diagram 8.9A : Squares Showing Annual Plan Outlay for Various Sectors During 1987-88



شکل 8.9B : (1987-88) کے دوران مختلف شعبوں کے سالانہ منصوبہ مصارف
ظاہر کرنے والے دائرے

Diagram 8.9B : Circles Showing Annual Plan Outlay for Various Sectors During 1987-88



8.6.4 پائی اشکال Pie Diagrams

پائی شکل ایک ذیلی منقسم دائرہ ہے۔ کسی دیئے گئے متغیرہ کے مختلف اجزاء کی نشاندہی کے لیے دائرے کی ذیلی تقسیم کی جاتی ہے۔ پائی شکل میں مختلف ذیلی تقسیموں کے رقبہ جات قابل اظہار مواد کے تناسب میں ہوتے ہیں۔ مختلف اجزاء کا کل مجموعہ بطور 360^0 (ایک نقطے کے اطراف (درجات) کی کل تعداد) لیا جاتا ہے اور مختلف اجزا کی انفرادی درجوں کو کل درجات یعنی 360^0 اور ان اجزاء کی قدروں کے تناسب میں محسوب کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر، ایک سنگھار میز کی کل پیداواری لاگت 500 روپے ہے، جس میں خام مال کی قیمت 200 روپے ہے۔ کل پیداواری لاگت یعنی (500 روپے) کو 360^0 کے مساوی مان لیا جاتا ہے، اور اس میں خام مال کا حصہ ہے 40% یعنی 144^0 لیا جاتا ہے۔ دوسرے مختلف اجزاء کی ڈگری بھی اسی ڈھنگ سے محسوب کی جاتی ہے اور دائرے کی مجموعی ڈگریوں کی بنیاد پر دائرہ کی ذیلی تقسیم کی جاتی ہے۔ پائی شکل مختلف اجزاء کے درمیان موجود روابط کا بہ آسانی تعین کرنے میں مددگار ہوتی ہے۔ بہر حال یہ خیال رکھا جائے کہ کسی دائرے میں ذیلی تقسیمیں کثیر تعداد میں نہ ہوں۔ اب ہم ایک تمثیل لے کر پائی شکل کی تشکیل کریں گے۔

تمثیل 10

کسی مہینے کے دوران کسی خاندان کے مختلف مدات پر مصارف کے تعلق سے مندرجہ ذیل معلومات کا اظہار کرنے کے لیے ایک پائی شکل بنایئے۔

	مدات	رقم (روپیوں میں)
(1)	غذا	800
(2)	لباس	200
(3)	کرایہ	300
(4)	دیگر مصارف	500

حل :

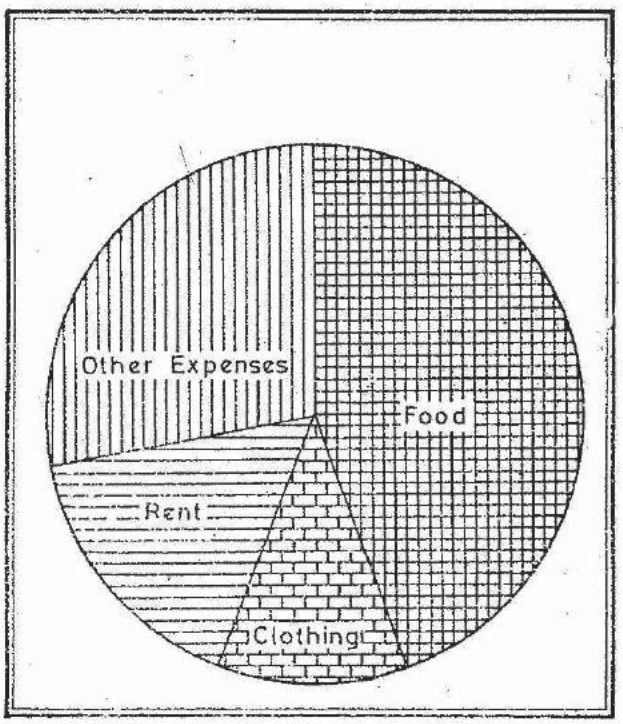
مختلف مدات پر کل مصارف ہیں 1,800 روپے۔ ان کو 360° کے مساوی لیا گیا ہے۔ اس بنیاد پر مختلف مدوں کے لیے درجوں (degrees) کی تعداد مقرر کی گئی ہے ان کو جدول کی شکل میں پیش کرنے پر شکل 8.10 میں ظاہر شدہ پائی شکل حاصل ہو گی۔

ڈگریوں کی تحسیب

	مدیں	رقم (روپیوں میں)	ڈگریاں / درجے	تعددی ڈگریاں
(1)	غذا	800	160	160
(2)	لباس	200	40	200
(3)	کرایہ	300	60	260
(4)	دیگر اخراجات	500	100	360
	جملہ	1800	360	

شکل 8.10 کسی خاندان کے مختلف مدات پر ماہانہ مصارف
کو ظاہر کرنے والی پائی شکل

Diagram 8.10 : Pie Diagram Showing the Monthly Expenditure of a Family on Various Items



اپنی معلومات کی جانچ B

(1) مستطیل اور سلاخ کے فرق کو واضح کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

(2) دی گئی قدروں کو ظاہر کرنے والے دائروں کی تشکیل کے لیے جذرالمربع (Square root) محسوب کرنے کی اہمیت کو واضح کیجئے۔

.....

.....

.....

.....

(3) دائرہ اور پائی شکل کے فرق کو واضح کیجئے۔

.....

.....

.....

.....

(4) تحریر کیجئے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) دوابعادی اشکال طول اور بلندی کی بنیاد پر تیار کیے جاتے ہیں۔

(ii) مستطیل کی بھی ذیلی تقسیم کی جاسکتی ہے۔

(iii) ذیلی منقسم مستطیل میں ذیلی منقسم حصے بھی رقبے کی نشاندہی کرتے ہیں۔

(iv) ذیلی منقسم مستطیل کو تیار کرنے کے لیے مجموعی قدریں (Cumulative value) لینا ضروری نہیں ہے۔

(v) دائرہ تیار کرنے میں دیئے گئے مواد کا جذرالمربع (Square root) محسوب کیا جاتا ہے۔

(vi) مربع تیار کرنے میں دی گئی قدروں کا جذرالمربع محسوب کرنے سے بڑی قدریں قابل لحاظ حد تک کم ہو جاتی ہیں۔

(vii) پائی شکل تیار کرتے وقت مختلف اجزاء کی ڈگریاں (degrees)، کل ڈگریوں اور ان اجزاء کی قدروں کے تناسب میں ہوتی ہیں۔

(5) قوس میں دیئے گئے مناسب الفاظ سے خالی جگہوں کو پر کیجئے:۔

(i) دوابعادی اشکال ..... کی ترجمانی کرتے ہیں۔ (حجم (volume) / رقبہ)

(ii) ہم کسی مربع کا ضلع معلوم کرنے کے لیے دیئے گئے مواد کا جذرالمربع (square root) محسوب ..... ہیں۔ (کرتے / نہیں کرتے)

(iii) اگر کسی ایک شکل میں ایک سے زائد مربعے بنانا ہو تو یہ ضروری ..... کہ تمام مربعوں کے قاعدے ہم خط ہوں۔ (ہے / نہیں ہے)

(iv) دائرہ کھینچنے کے لیے ہم ..... معلوم کرتے ہیں۔ (قطر diameter / نصف قطر)

(v) پائی شکل تیار کرتے وقت ہم مختلف اجزاء کا کل مجموعہ ..... لیتے ہیں۔ (300°/360°)

(vi) پائی شکل میں قطعوں (Segments) کی تعداد بہت بڑی ..... چاہیئے۔ (ہونی / نہیں ہونی)

8.7 خلاصہ Let Us Sum Up

مواد کو جدولی شکل میں پیش کرنے کے علاوہ، اس کو اشکال اور ترسیمات کے ذریعہ بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔ مواد کا بصری اظہار، عددی مواد کے پھیکے پن کا ازالہ کرتا ہے، مواد کے تقابل کو سہل بناتا ہے، مختلف شماریاتی پیمائشوں کے تعین میں مددگار ہوتا ہے اور گزشتہ کارگزاری (Past performance) کے رجحانات کو قائم کرتا ہے۔

اشکال کو دو ترسیمی محوروں یعنی محور X اور محور Y کے لحاظ سے تیار کیا جاتا ہے۔ لیکن ان کو ترسیمی کاغذ پر تیار کرنا ضروری نہیں ہے۔ شکل کا عنوان مختصر اور واضح ہونا چاہیئے۔ ترسیم میں مختلف اجزاء کو نمایاں کرنے کے لیے ہلکے اور گہرے رنگوں کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔ دستیاب جگہ سے بہتر استفادہ کرتے ہوئے شکل کو معنی خیز بنایا جاسکتا ہے۔

اشکال کو تین زمروں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے : (1) یک بُعدی شکل (2) دوابعادی شکل اور (3) سہ ابعادی شکل۔ یک بُعدی شکل کو صرف طول کی بنا پر تیار کیا جاتا ہے۔ مختلف سلاخوں کا طول دیئے گئے مواد کی قدر کے متناسب ہوتا ہے۔ ان اشکال میں منفی اقدار کو بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے اور سلاخوں، کو افقی یا عمودی طور پر تیار کیا جاسکتا ہے۔ یک بُعدی شکل کو (1) سادہ سلاخی شکل (2) کثیر سلاخی شکل (3) ذیلی منقسم سلاخی شکل اور (4) فیصد ذیلی منقسم سلاخی شکل کے طور پر درجہ بند کیا جاتا ہے۔ یک سلاخی شکل ایک قدر کی ترجمانی کرتی ہے جبکہ کثیر سلاخی شکل ایک سے زیادہ قدروں کی ترجمانی کرتی ہے۔ ایک ذیلی منقسم سلاخی شکل ، کسی دیئے گئے متغیرہ کے مختلف اجزاء کی ترجمانی کرتی ہے اور فیصد کی بنیاد پر بھی تیار کی جاسکتی ہے۔

دوابعادی اشکال طول اور عرض کی بنیاد پر تیار کی جاتی ہیں۔ یہ شکلیں رقبہ کی علامت ہیں۔ دوابعادی اشکال کو حسب ذیل طریقہ سے درجہ بند کیا جاتا ہے : (1) مستطیل (2) ذیلی منقسم مستطیل (3) مربع اور دائرے اور (4) پائی شکلیں۔ مستطیل تیار کرنے کے لیے، اس کے طول اور عرض کا تعین کرنا ضروری ہے۔ ایک مستطیل کی ذیلی تقسیم کی جاسکتی ہے اور ذیلی منقسم مستطیل بھی رقبہ ظاہر کرتے ہیں۔ مربعوں اور دائروں کو تیار کرنے کے لیے، دیئے گئے مواد کا جذرالمربع (Square root) محسوب کرنا ضروری ہے۔ مربع کی صورت میں ضلع (side) اور دائرہ کے لیے نصف قطر (diameter) معلوم کرنا ضروری ہے۔ پائی شکل (Pie diagram) دائرہ کی مقطوعہ شکل ہے، جہاں پر اس کے قطعات کسی نقطے کے اطراف 360^0 کی بنیاد پر متعین کئے جاتے ہیں۔ مختلف قطعات کی ڈگریاں (درجے) اُسی تناسب میں لی جاتی ہیں جو تناسب ان اجزاء (Components) اور کُل کے مابین پایا جاتا ہے۔

8.8 کلیدی الفاظ Key Words

سلاخ (Bar) : یک بُعدی شکل صرف طول کی علامت ہے جس میں عرض (width) کی اہمیت نہیں۔ اگرچہ یہ شکل مستطیل جیسی نظر آتی ہے لیکن یہ مستطیل نہیں ہے کیونکہ مستطیل میں طول اور عرض دونوں کی اہمیت ہوتی ہے۔

دائرہ (Circle) : ایک دوابعادی شکل جو رقبہ πr^2 کی تعبیر کرتی ہے۔

کثیر سلاخی شکل (Multiple Bars) : یک بُعدی شکل جس میں سلاخوں کی تعداد ایک سے زیادہ ہوتی ہے، جو یا تو مختلف متغیروں کی قدروں کو ظاہر کرتے ہیں یا ایک ہی متغیرہ کے مختلف اجزاء کی قدروں کو پیش کرتی ہیں۔

یک بُعدی شکل (One Dimensional Diagram) : ایک شکل جو صرف ایک بُعد یعنی طول کی بنیاد پر تیار کی جاتی ہے۔

پائی شکل (Pie Diagram) : ایک دائرہ جو قطعات (Sectors) میں منقسم ہوتا ہے ایک ہی متغیرہ کے مختلف اجزاء کے اضافی رقبوں (relative areas) کو پیش کرتا ہے۔

مستطیل (Rectangle):دوابعادی شکل جو طول (لمبائی) اور عرض (چوڑائی) کی بنیاد پر تیار کی جاتی ہے۔اس کا رقبہ کسی متغیرہ کی ترجمانی کرتا ہے۔

مربع (Square) : دوابعادی شکل جو رقبہ کو ظاہر کرتی ہے چونکہ مربع کے چاروں اضلاع کا طول مساوی ہوتا ہے،اس کو تیار کرنے کے لیے صرف ایک ضلع کا طول معلوم کیا جاتا ہے۔

ذیلی منقسم سلاخی شکل (Sub-divided Bar Diagram) :ایک ہی متغیرہ کے مختلف اجزا(components) کی قدروں کی بنیاد پر اس کی ذیلی تقسیم کی جاتی ہے۔

ذیلی منقسم مستطیل (Sub-divided Rectangle) : ایک مستطیل جو ایک ہی متغیرہ کے مختلف اجزاء کی قدروں (values of various components) کی بنیاد پر ذیلی طور پر منقسم ہوتا ہے۔

دوابعادی شکل(Two Dimensional Diagram) :ایک شکل جو دو ابعاد یعنی طول اور عرض کی بنیاد پر تیار کی جاتی ہے۔

سہ ابعادی شکل (Three Dimensional Diagram) : ایک شکل جو تین ابعاد یعنی طول عرض اور بلندی کی بنیاد پر تیار کی جاتی ہے۔

محور - X (X-axis) :وہ ترسیمی محور جو افقی طور پر کھینچا جاتا ہے۔

محور - Y (Y-axis) :وہ ترسیمی محور جو عمودی طور پر کھینچا جاتا ہے۔

8.9 اپنی معلومات کی جانچ:جوابات

6 A) (i) صحیح (ii) صحیح (iii) غلط (iv) صحیح (v) صحیح (vi) صحیح (vii) صحیح
(viii) صحیح (ix) غلط (x) صحیح (xi) صحیح (xii) صحیح

7) (i) ازالہ (ii) آسان تر (iii) ایک (iv) کر سکتی (v) یکساں (vi) مجموعی
(vii) کیا جاسکتا ہے (viii) کی جاسکتی ہے۔

4 B) (i) غلط (ii) صحیح (iii) صحیح (iv) غلط (v) صحیح (vi) صحیح (vii) صحیح

5) (i) رقبہ (ii)(محسوب)کرتے(iii)ضروری ہے (iv) نصف قطر (v) 360° (vi) نہیں ہوتی

8.10 امتحانی سوالات / مشقیں Terminal Questions/Exercises

(1) مواد کے بصری اظہار سے کیا مراد ہے؟ مواد کے بصری اظہار کے کیا مقاصد ہوتے ہیں؟

(2) شماریات میں استعمال ہونے والی مختلف قسم کے اشکال کیا ہیں؟ مختلف قسم کی یک بُعدی اشکال سے بحث کیجئے۔

(3) مواد کے شکلی اظہار کے اصولوں سے بحث کیجئے۔

(4) مربع اور دائرہ تیار کرنے کے طریقے کی تمثیل کے ذریعہ تشریح کیجئے۔

(5) مختلف قسم کی دوابعادی شکلوں سے بحث کیجئے۔

مشقیں

(1) 1984-85 میں مختلف قسم کے تیل کے بیجوں سے متعلق مندرجہ ذیل مواد کے لیے ایک سلاخی شکل تیار کیجیے۔

تیل کے بیج	پیداوار (کیلوگرام رہیکٹر)
مونگ پھلی	898
ریاپ سیڈ اور رائی	711
سویابین	768
سیسامم	246
نائجر سیڈ	251

(2) مندرجہ ذیل مواد ہندوستان میں چار برسوں کے دوران چاول کی پیداوار سے متعلق ہے۔

سال	پیداوار (لاکھ ٹن)
1983 - 84	601
1984 - 85	583
1985 - 86	638
1986 - 87	604

(3) مندرجہ بالا مواد کے لیے سادہ سلاخی شکل تیار کیجیے۔

سال :	1984	1985	1986	1987	1988
(000 روپوں میں) :	+5	+3	-2	+4	-1

(4) مندرجہ ذیل مواد کو کثیر سلاخی شکل میں پیش کیجیے۔

فصل	پیداوار (ملین ٹن میں)	
	1984 - 85	1985 - 86
گیہوں	44	47
چاول	58	64
دالیں	12	13
دیگر اجناس	31	26

(5) مندرجہ ذیل مواد کو ذیلی منقسم سلاخی شکل میں پیش کیجیے۔

نتائج	طلبہ کی تعداد		
	1985 - 86	1986 - 87	1987 - 88
پہلا درجہ	50	90	80
دوسرا درجہ	250	300	300
تیسرا درجہ	100	120	200
ناکام	100	90	170
جملہ	500	600	750

(6) فی الماری لاگت، حاصلات (Sale Proceeds)، نفع یا نقصان پر مشتمل مندرجہ ذیل مواد کے لیے فیصد ذیلی منقسم سلاخی شکل تیار کیجئے۔

1989

تفصیل	جنوری	فروری	مارچ
خام مال	400	550	550
اجرتیں	200	300	350
دیگر لاگتیں	100	150	200
حاصلات فروخت فی الماری	800	1000	1000
نفع(+) یا نقصان(-)	+100	0	-100

(7) دو خاندانوں کے ماہانہ اخراجات سے متعلق مندرجہ ذیل مواد کو مستطیلی اشکال کے ذریعہ پیش کیجئے۔

مدات خرچ	خاندان X	خاندان Y
غذا	1,000	1,000
لباس	300	500
کرایہ مکان	500	750
متفرق	200	250
جملہ	21,000	2,500

(8) مندرجہ ذیل مواد کے لیے مربعے اور دائرے تیار کیجئے۔

ملک	چاول کی پیداوار (پونڈ فی ایکڑ)
ہندوستان	728
امریکہ	1,469
اٹلی	2,903

(9) نئی دہلی میں فروخت ہونے والے مختلف اخبارات کا فیصد ذیل میں دیا گیا ہے۔ اس مواد کے لیے پائی شکل (Pie diagrams) تیار کیجئے۔

اخبار کا نام	فیصد / % حصہ
ٹائمز آف انڈیا	45
انڈین اکسپرس	12
ہندوستان ٹائمز	28
دیگر	14
جملہ	100

(10) 1984-85 کے دوران صارفین کے مختلف منطقوں (Sectors) میں برقی کے صرفہ سے متعلق مواد درج ذیل ہے۔ اس مواد کے لیے پائی شکل تیار کیجئے۔

صارفین کے منطقے	برقی کا صرفہ (بلین کیلوواٹ)
صنعتی	73.5
گھریلو	15.5
زراعت	21.5
دیگر	15.0

نوٹ : یہ سوالات اس اکائی کے سمجھنے میں مددگار ثابت ہوں گے۔ ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجئے لیکن آپ کے جواب یونیورسٹی کو نہ بھیجئے۔ یہ آپ کی مشق کے لئے ہیں۔

اکائی 9 ترسیمی اظہار

UNIT:9 - GRAPHIC PRESENTATION

Structure	ساخت	
Objectives	مقاصد	9.0
Introduction	تمہید	9.1
Importance of Graphic Presentation	ترسیمی اظہار کی اہمیت	9.2
Principles of Preparing a Graph	ترسیم تیار کرنے کے اصول	9.3
Graphs of Time Series - Historigrams	زمانی سلسلوں کی ترسیمات۔ ہسٹوری گرام	9.4
Types of Historigrams	ہسٹوری گرام کی قسمیں	9.5
One Dependent Variable Historigram	ایک تابع متغیرہ ہسٹوری گرام	9.5.1
More than One Dependent Variable Historigram	ایک سے زائد تابع متغیرہ ہسٹوری گرام	9.5.2
Mixed Graph	مخلوط ترسیم	9.5.3
Range Graph	رینج ترسیم	9.5.4
Graphs of Frequency Distribution	تعددی تقسیم ترسیمات	9.6
Types of Frequency Distribution Graphs	تعددی تقسیم ترسیمات کی قسمیں	9.7
Historigram	ہسٹوری گرام	9.7.1
Frequency Polygon	تعددی کثیر الاضلاع	9.7.2
Frequency Curve	تعددی منحنی	9.7.3
Ogive or Cumulative Frequency Graph	اوجائیو ترسیم یا مجموعی تعددی ترسیم	9.7.4
Let Us Sum Up	خلاصہ	9.8
Key Words	کلیدی الفاظ	9.9
Answers to Check Your Progress	اپنی معلومات کی جانچ: جوابات	9.10
Terminal Questions/Exercises	امتحانی سوالات / مشقیں	9.11

9.0 Objectives مقاصد

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:۔

- ترسیمی اظہار کی اہمیت کی وضاحت کر سکیں۔
- ترسیم کی تیاری کے اصولوں کی وضاحت کر سکیں۔
- ترسیم کی مختلف قسموں کی فہرست تیار کر سکیں اور
- کئی قسم کی ترسیمیں تیار کر سکیں۔

9.1 تمہید Introduction

اکائی 8 میں آپ نے سیکھا ہے کہ مواد کا بصری اظہار مقداری مواد کے اظہار کی غیر دلچسپ کیفیت کو ایک دلچسپ مشق میں تبدیل کر دیتا ہے۔ بصری اظہار مواد کے تقابلی موازنے میں یا سابقہ کارگزاری کے رجحانات کے تعین کرنے میں مددگار ثابت ہو سکتا ہے۔ آپ نے قبل ازیں مواد کے بصری اظہار کی تکنیکیوں میں سے ایک یعنی شکلی اظہار کا مطالعہ کیا ہے۔ بصری اظہار کی ایک اور اہم تکنیک ہے ترسیمی شکلوں کے ذریعہ مواد کا اظہار۔ اس اکائی میں آپ ترسیمات تیار کرنے کے اصول، زمانی سلسلوں اور تعددی تقسیمات کے لئے مختلف قسموں کی ترسیمات اور ان کو تیار کرنے کے طریقے سیکھیں گے۔

9.2 ترسیمی اظہار کی اہمیت Importance of Graphic Presentation

مواد کا ترسیمی اظہار نہایت دیدہ زیب ہوتا ہے۔ اس سے ذہن پر ایک دیرپا اثر قائم ہوتا ہے اور مواد کے رجحانات اخذ کرنا آسان تر ہو جاتا ہے۔ مواد کی ترسیمی پیشکش سے مندرجہ ذیل فوائد حاصل ہوتے ہیں۔

(i) مواد کا ترسیمی اظہار اس کے تقابلی موازنے کو آسان تر بناتا ہے۔ ترسیمات پر خطوط منحنی یا خطوط مستقیم کی سمتوں (directions) کی وجہ سے تقابل آسان ہو جاتا ہے۔

(ii) مواد کے ترسیمی اظہار سے سابقہ کارگزاری کے متعین کرنے میں مدد ملتی ہے۔ ترسیمی طریقہ پر زمانی سلسلوں کے مواد کی پیشکش سے قدروں کے ادراج (Interpolation) اور استخراج (Extrapolation) کو ممکن بناتا ہے لہذا یہ پیش قیاسی میں مددگار ہے۔

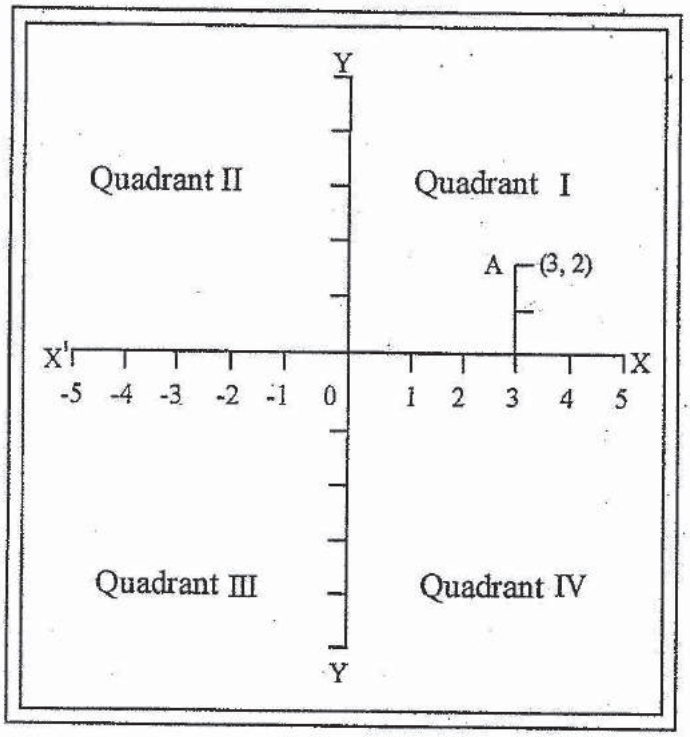
(iii) مواد کا ترسیمی اظہار وضعی اواسط (Positional averages) جیسے وسطانیہ (median)، چوتھائیہ (quartiles)، کثیریہ (Mode) وغیرہ کی اقدار کا معلوم کرنا ممکن ہوتا ہے۔ تعددی تقسیم کی ترسیمات ان اواسط کی قدروں کے معلوم کرنے میں ممد و معاون ہوتی ہیں۔

(iv) ترسیمی اظہار کے ذریعہ دو متغیروں کے درمیان ہم رشتگی (correlation) قائم کرنا بھی ممکن ہے۔ انتشاری شکل (Scatter diagram) ترسیمی اظہار کی ایک تکنیک ہے جس ہم رشتگی کے درجہ کا تعین کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ ہم رشتگی (Correlation) کا مطالعہ اس نصاب میں شامل نہیں ہے، اس اکائی میں ہم ترسیمی اظہار کے انتشاری شکلی طریقہ کو زیر بحث نہیں لائیں گے بلکہ ہم صرف زمانی سلسلے اور تعددی تقسیم کی ترسیمات ہی پر توجہ مرکوز کریں گے۔

9.3 ترسیم تیار کرنے کے اصول Principles of Preparing a Graph

ترسیمات، محددی طریقہ ترسیم (Coordination system) پر تیار کئے جاتے ہیں۔ اس طریقہ کار کے تحت محددوں کے ذریعہ ترسیمی کاغذ پر صحیح مقام متعین کرنے کے لئے مختلف نقطوں کو نشان زد کیا جاتا ہے اور ان نشان زدہ نقطوں کو جوڑ کر ایک منحنی کھینچی جاتی ہے۔ جب ایک دوسرے پر دو عمودی خطوط کھینچے جاتے ہیں ان خطوط کے نقطہ تقاطع کو نقطہ آغاز یا مبدا کہا جاتا ہے۔ افقی خط محور X اور عمودی خط محور Y کہلاتا ہے۔ یہ باہم عمودی خطوط، مستوی شکل (Plane figure) کو چار حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں ربعات **(Quadrants)** کہا جاتا ہے۔ دو باہم عمودی خطوط اور ان سے تشکیل شدہ چار ربعات کو شکل 9.1 میں بتایا گیا ہے۔

ترسیمی شکل 9.1 ترسیم کے حصے



X کی مثبت قدروں کو مبدا کے دائیں جانب اور منفی قدروں کو اس کے بائیں جانب لیا جاتا ہے۔ Y کی مثبت اقدار کو مبداء کے اوپر اور منفی اقدار کو نیچے لیا جاتا ہے۔ ترسیم پر کسی نقطہ کا مقام متعین کرنے کے لئے یہ دیکھا جاتا ہے کہ محور X پر اور محور Y پر وہ نقطہ مبدا سے کتنے فاصلہ پر واقع ہے۔ اس کی نشاندہی کے لئے اس فاصلہ کو لکھ کر قوسین میں بند کیا جاتا ہے۔ اوپر دی گئی ترسیم 9.1 نقطہ A (3, 2) مرتسم کیا گیا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ نقطہ A محور X پر مبدا سے 3 اکائیاں دوری پر اور محور Y پر 2 اکائیاں دوری پر واقع ہے۔

کسی نقطہ کی قدریں محور X اور محور Y دونوں میں مثبت ہوں تو اس نقطہ کو ربع I میں مرتسم کیا جائے گا اور اگر کوئی قدر منفی ہو تو یہ نقطہ ایک مختلف ربع میں مرتسم ہوگا۔ اگر محور X کی قدریں منفی ہوں اور محور Y کی قدریں مثبت ہوں تو اس نقطہ کو ربع II میں مرتسم کیا جائے گا۔ اگر محور X کی قدریں مثبت ہوں اور محور Y کی قدریں منفی ہوں تو اس نقطہ کو ربع IV میں مرتسم کیا جائے گا اور اگر محور X اور محور Y دونوں کی قدریں منفی ہوں تو اس نقطہ کو ربع III میں مرتسم کیا جائے گا۔ شماریاتی مواد کی ترسیم عموماً ربع I میں ہوتی ہے۔

9.4 زمانی سلسلہ کی ترسیمات ۔ ہسٹوری گرام
Graphs of Time Series-Historigrams

عام طور پر شماریاتی مواد کی ترسیمات دو قسم کی ہوتی ہیں

(i) زمانی سلسلہ کی ترسیمات جنہیں ہسٹوری گرام کہا جاتا ہے (Graphs of Time Series called Historigrams)

(ii) تعددی تقسیم کی ترسیمات (Graph of Frequency Distribution)

زمانی سلسلے کی ترسیم، مواد کا ایک ایسا سلسلہ ہوتا ہے جو تاریخ وار ترتیب دیا جاتا ہے۔ دس سال کی مدت پر محیط کسی تنظیم کے مال کی فروخت سے

متعلق مواد، زمانی سلسلہ کے مواد کی ایک مثال ہے۔ ایک مخصوص مدت کے لئے ایک یا زیادہ متغیروں کے اظہار کے لئے زمانی سلسلہ کی ترسیم تیار کی جاتی ہے۔ زمانی سلسلہ کی اس ترسیم یا گراف کو ہسٹوری گرام کہا جاتا ہے کیونکہ اس طرح تاریخ کو گراف کی شکل میں پیش کیا جاتا ہے۔

ہسٹوری گرام تشکیل دینے کے اصول

زمانی سلسلہ کی ترسیم یا ہسٹوری گرام کی تشکیل مندرجہ ذیل اصولوں کی بنیاد پر کی جاتی ہے۔

(1) زمان یا وقت کو غیر تابع متغیرہ کے طور پر لیا جاتا ہے لہذا محور X پر پیش کیا جاتا ہے۔ مواد کی قدر کو تابع متغیرہ کے طور پر لیا جاتا ہے اور محور Y پر پیش کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر 88-1980 کے دوران کسی کاروباری ادارے کی فروخت سے متعلق مواد کی ترسیم تیار کرنا ہو تو دیئے گئے مواد سے متعلقہ نقاط کو مرتسم کرنے کے بعد ان کو وقت کی ترتیب میں ایک خط مستقیم کی شکل میں جوڑا جاتا ہے۔ اس طور پر تیار کردہ ترسیم یا گراف کو مواد کا ہسٹوری گرام کہا جاتا ہے۔ مرتسم خطوط کے اتار چڑھاؤ سے وقت کے ساتھ ساتھ مواد میں رونما ہونے والی تبدیلی کا اظہار ہوتا ہے۔ اس طرح سے مرتسم مختلف سطحوں کو اجتماعی طور پر مواد سے متعلق منحنی بھی کہا جاتا ہے۔

(2) محور Y (جسے عمودی محور بھی کہا جاتا ہے) عموماً صفر سے شروع ہوتا ہے۔ اگر دیئے گئے مواد کی کمترین قدر اور صفر میں بہت وسیع فرق ہو تو محور Y کو بھی شکستہ کیا جاسکتا ہے اور نقلی خط قاعدہ لیا جاسکتا ہے۔ نقلی خط قاعدہ سے متعلق اس اکائی میں آپ بعد میں پڑھیں گے۔

(3) دونوں محوروں پر پیمانے اس طرح لے جائیں کہ مواد کی قدریں نمایاں طور پر ظاہر ہوں۔

(4) ترسیم کا عنوان جامع اور خود وضاحتی ہونا چاہیئے۔

(5) ایک سے زیادہ متغیروں سے متعلق مواد بھی ہسٹوری گرام کے ذریعہ بتلایا جاسکتا ہے۔ اس صورت میں ہسٹوری گرام میں ایک سے زیادہ منحنیاں (curves) ہوں گی، جہاں پر ہر منحنی سے ایک علحدہ متغیرہ کی ترجمانی ہوتی ہے۔ عموماً مختلف منحنیوں کو مختلف طور پر نشان زد کیا جاتا ہے تاکہ ایک دوسرے میں امتیاز کیا جاسکے۔ کبھی کبھی مختلف منحنیوں میں امتیاز کرنے کے لئے رنگوں کا بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

(6) اگر متغیروں کی پیمائش مختلف اکائیوں میں لی جائے تو، محور Y پر دُہرے پیمانے لئے جاسکتے ہیں۔

(7) ترسیم کی تیاری میں استعمال شدہ پیمانوں کو واضح طور پر ظاہر کیا جاتا ہے۔

9.5 ہسٹوری گرام کی قسمیں Types of Historigrams

ہسٹوری گرام کو دو طریقوں سے تیار کیا جاسکتا ہے۔ (1) اس کو قدرتی پیمانے پر تیار کیا جاسکتا ہے۔ اس صورت میں ترسیم کے ذریعہ کسی مدت کے دوران مطلق قدروں میں رونما تبدیلیوں کی عکاسی ہوتی ہے۔ اس صورت میں ترسیم کے ذریعہ کسی مدت کے دوران اضافی قدروں میں رونما تبدیلی کا اظہار ہوتا ہے۔ (2) اس کو نسبتی پیمانوں (ratio scale) پر تیار کیا جاسکتا ہے جہاں پر ترسیم کسی مدت کے دوران اضافی قدر کی عکاسی کرتی ہے۔ اس نصاب میں ہم صرف پہلے طریقہ کا مطالعہ کریں گے یعنی قدرتی پیمائشی ترسیم۔ قدرتی پیمائشی ترسیم میں تابع متغیرہ کی اقدار کو محور Y پر لیا جاتا ہے اور پیمانہ کو اس طرح نشان زد کیا جاتا ہے کہ محور Y پر مساوی فاصلہ، اقدار میں مساوی اضافہ کو ظاہر کرتا ہے۔ یہ پیمانہ نشان لگانے کا حسب معمول طریقہ ہے اور یہ وہی طریقہ ہے جسے سکشن 9.3 میں ترسیم 9.1 میں بتلایا گیا ہے۔ ہسٹوری گرام کی مندرجہ ذیل چار قسموں میں درجہ بندی کی جاتی ہے۔

(1) یک تابع متغیرہ ہسٹوری گرام

(2) ایک سے زائد تابع متغیرہ ہسٹوری گرام

(3) مخلوط ترسیم

(4) ریخ ترسیم

ہسٹوری گرام کی ان مختلف قسموں اور ان کو تیار کرنے کے طریقوں سے ذیل میں بحث کی گئی ہے۔

9.5.1 ایک تابع متغیرہ ہسٹوری گرام One Dependent Variable Historigrams

اس قسم میں، صرف ایک تابع متغیرہ ہوتا ہے۔ جیسا کہ پہلے کہا گیا ہے، تابع متغیرہ کی اقدار محور Y پر لی جاتی ہیں جبکہ وقت کو محور X پر لیا جاتا ہے۔ کسی مدت کے دوران، فروحت سے متعلق مواد یک تابع متغیرہ ہسٹوری گرام کی ایک مثال ہے۔ اس صورت میں، فروخت سے متعلقہ مواد کو محور Y پر اور وقت کو محور X پر پیش کیا جاتا ہے۔ یہ سادہ ترین ترسیم ہے۔ تمثیل 1 کا مطالعہ کیجئے اور یک تابع متغیرہ ہسٹوری گرام کی تشکیل کے طریقے کو سمجھیے۔

تمثیل 1

مندرجہ ذیل مواد مختلف برسوں میں کسی ادارے کی جانب سے عہدہ داروں کی تربیت سے متعلق ہے۔

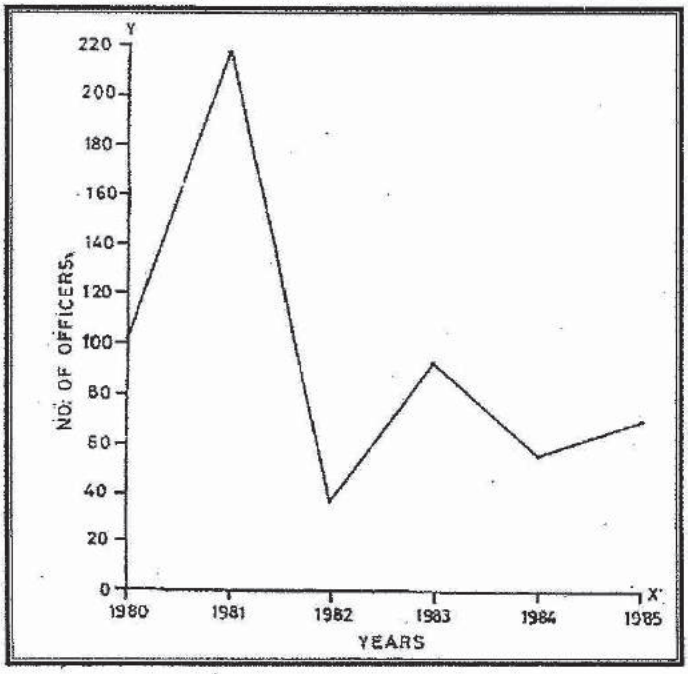
سال :	1980	1981	1982	1983	1984	1985
تربیت یافتہ عہدہ داروں کی تعداد :	100	217	36	90	56	70

حل :

چونکہ مواد ایک ہی تابع متغیرہ سے متعلق ہے، ہم کو یک تابع متغیرہ ہسٹوری گرام تیار کرنا چاہیئے۔ مختلف برسوں کو محور X پر اور تربیت یافتہ عہدہ داروں کی تعداد کو محور Y پر لیا جائے گا۔ چونکہ تابع متغیرہ کی تمام قدریں مثبت ہیں، ترسیم پہلے ربع میں ہوگی۔ اس لئے محور X کو ترسیمی کاغذ کے نچلے حصے میں مرتسم کیا جائے گا اور محور Y کو انتہائی بائیں جانب۔ شکل 9.2 کو بغور دیکھیے۔ محور X پر اتنی جگہ ہے کہ 10 بڑے مربعے بنائے جاسکتے ہیں۔ اس لئے مواد کے آغازی سال کی ابتدا مبدا سے کی جائے گی اور محور X پر تمام برسوں کو بالترتیب لکھا جائے گا اور اس کے تحت لفظ "برسوں Years" لکھا ہوگا۔ محور Y پر 12 بڑے مربعے بنانے کی جگہ حاصل ہے۔ ہم کو 217 کی اعظم ترین قدر کو ظاہر کرنا ضروری ہے۔ عموماً پیمانے کو صحیح اعداد میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ لہذا 20 کی نمایندگی کرنے والا ایک بڑا مربع ہونا چاہیئے۔ اسی مطابقت سے پیمانہ لکھا جانا چاہیئے اور الفاظ "تربیت یافتہ عہدہ داروں کی تعداد" کو محور Y کے محاذی لکھنا چاہیئے۔ اب مختلف نقاط (1980, 100) , (1981, 217) وغیرہ کی ترسیم کی جانی چاہیئے اور خط مستقیم سے انہیں جوڑنا چاہیئے۔ ہمیں ایک عنوان بھی لکھنا چاہیئے۔ اس مواد کے لئے بنائی گئی ترسیم کو شکل 9.2 میں دیکھیے۔

ترسیم 9.2 کسی ادارے سے تربیت یافتہ عہدہ داروں کی تعداد ظاہر کرنے کے لئے یک متغیرہ ہسٹوری گرام

Graph 9.2 : One Variable Historigram Showing the Number of Officers Trained by an Institute



تمثیل 2

مندرجہ ذیل مواد کسی کاروباری ادارے کے نفع / نقصان سے متعلق ہے۔اس مواد کے لئے "یک متغیرہ ترسیم" تیار کیجئے۔

سال	1983	1984	1985	1986	1987	1988
نفع+یا نقصان(-)	+10	+3	-5	+2	-3	6

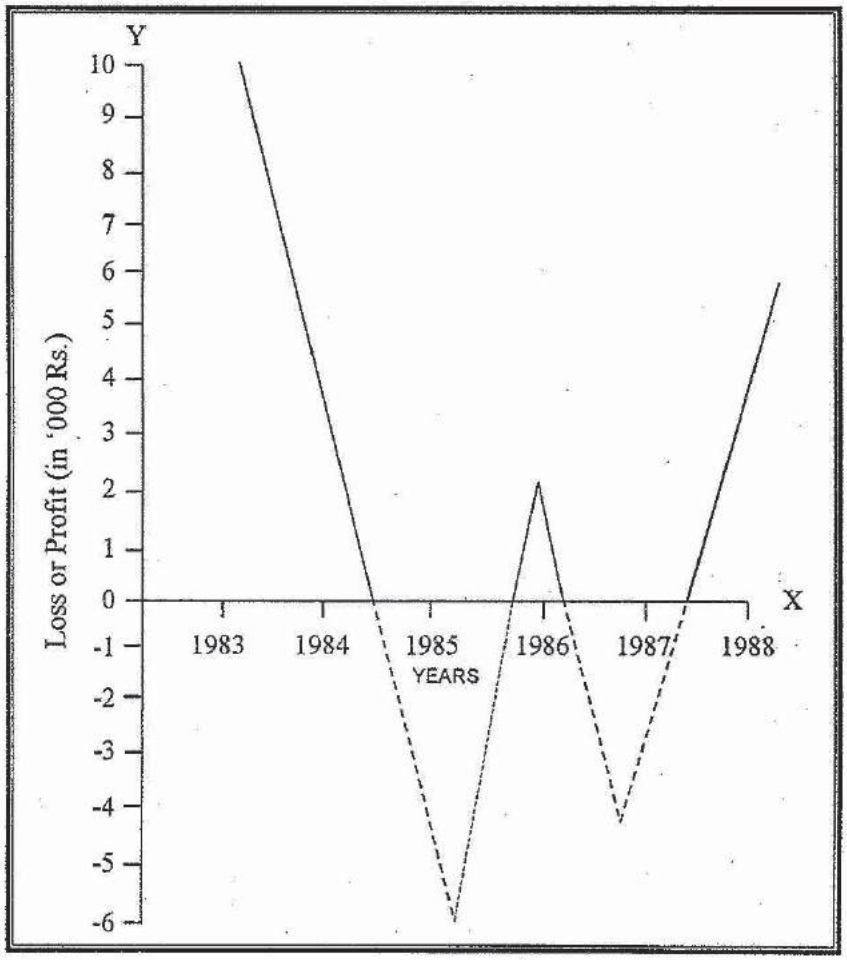
(000، ہزار روپیوں میں)

حل:

اس تمثیل میں نفع اور نقصان دونوں دیئے گئے ہیں۔اگر نفع کو مثبت قدروں سے ظاہر کیا جائے تو نقصان کو منفی قدروں سے ظاہر کیا جائے گا۔ مثبت اقدار کو محور Y کے مبداء کے بالائی حصے میں اور منفی اقدار کو مبداء کے زیرین حصے میں مرتسم کیا جائے گا۔لہذا اس صورت میں محور X کو ترسیم کے بالکل نچلے حصے میں نہیں لیا جائے گا بلکہ منفی اقدار کے لحاظ سے اس کو قدرے درمیان میں رکھا جائے گا۔ترسیم 9.3 کو غور سے دیکھیئے اور اندازہ کیجئے کہ محور X پر خط کو کس طرح کھینچا گیا ہے۔ موجودہ صورت میں، دستیاب جگہ پر ہم نے ایک سال کی نمایندگی کرنے کے لئے دو بڑے مربعے لئے ہیں اور نفع / نقصان فی ایک ہزار کے لئے ایک بڑا مربع بنایا گیا ہے۔ترسیم 9.3 کا بغور مطالعہ کیجئے اور سمجھ لیجیے کہ نفع و نقصان کو کس طرح مرتسم کیا گیا ہے۔

ترسیم 9.3 (1983-88) کے دوران فرم کے منافع اور نقصان دونوں کو ظاہر کرنے کے لیے ایک متغیرہ ترسیم

Graph 9.3 : One Variable Graph Showing the Profit and Loss of the Firm during 1983-88



نقلی خطِ قاعدہ False Base Line :

ہسٹوری گرام کی تشکیل میں استعمال شدہ اصولوں کا مطالعہ کرتے وقت، ہم نے کہا تھا کہ عمودی محور کو عموماً صفر سے شروع کرنا چاہیئے۔ اگر صفر اور دیئے گئے مواد کی اقل ترین قدر میں فرق زیادہ ہو تو عمودی محور کو شکستہ کیا جاتا ہے، اور نقلی خط قاعدہ لیا جاتا ہے (جسے بڑھے میڑھے انداز میں کھینچا جاتا ہے) نقلی قاعدے کے خط کو مرتسم کرنے کا مقصد یہ ہے کہ مواد کو نمایاں طور پر ظاہر کیا جائے۔ مواد کی اقل ترین قدر کے مساوی قدر، یا دی گئی کمترین قدر سے کم صحیح عدد کو بطور نقلی قاعدہ، محور Y پر نشان لگایا جاتا ہے۔ اس کو ہم ایک تمثیل کے ذریعہ عملاً سیکھیں گے۔

تمثیل 3

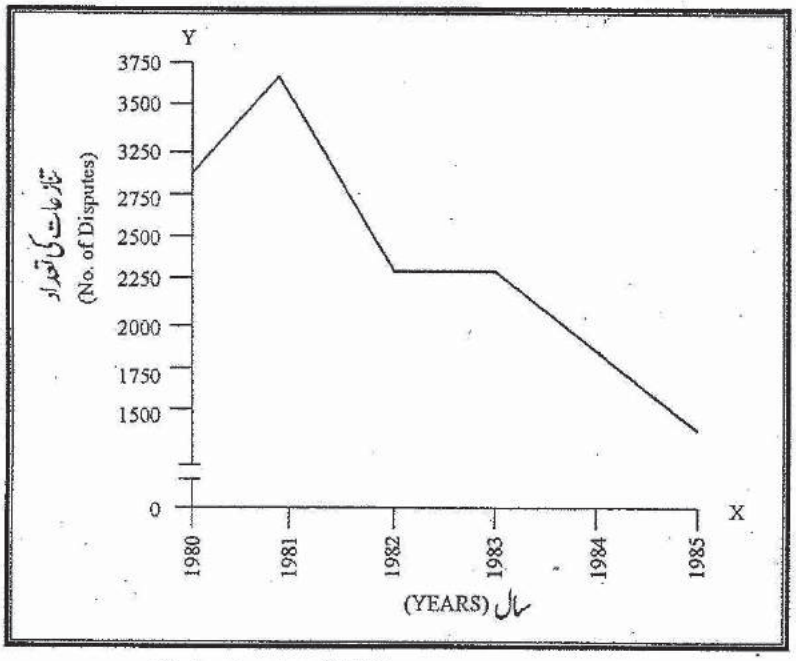
مندرجہ ذیل مواد ہندوستان میں صنعتی تنازعات کی تعداد سے متعلق ہے۔

سال	1980	1981	1982	1983	1984	1985
تنازعات کی تعداد	2,856	3,589	2,483	2,488	2,061	1,522

حل :

صنعتی تنازعات کی اقل ترین تعداد 1,522 ہے جو صفر (0) سے کافی دور ہے۔ اس لئے محور Y کو محور X کے نزدیک شکستہ کیا گیا ہے اور نقلی قاعدے کا خط کھینچا گیا ہے۔ نقلی قاعدے کے خط پر پیمائش کا نشان لگانے کے لئے قدر 1,500 لی جاسکتی ہے۔ یہ وہ قدر ہے جو کمترین تنازعوں کی تعداد یعنی 1,522 سے کم ہے۔ محور Y پر جگہ کی دستیابی پر منحصر، اب ایک بڑا مربع 250 کی تعبیر کرنے کے لئے لیا جاتا ہے۔ اب ترسیم 9.5 پر غور کیجئے کس طرح نقلی قاعدے کا خط کھینچا جاتا ہے اور مواد کی ترسیم کی جاتی ہے۔

ترسیم 9.4 یک متغیرہ ترسیم معہ نقلی قاعدہ کا خط Graph 9.4 : One Variable Graph with a False Base Line



نوٹ : اگر نقلی قاعدہ نہ لیا جائے تو Y محور پر صفر (0) تا 1500 سے متعلق جگہ (جس کے لئے منتخب پیمانہ پر چھ بڑے مربعوں کے مساوی جگہ درکار ہوتی ہے) ضائع ہو جاتی ہے۔ جس کی وجہ سے ترسیمی کاغذ کے اوپری حصہ میں کھینچی گئی ترسیمی شکل مختصر ہو جاتی ہے۔ شکستہ خط (The broken line) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ترسیمی کاغذ کا وہ حصہ جس پر قدریں مرتسم نہ ہوں نہیں دکھلایا گیا ہے۔

9.5.2 ایک سے زائد تابع متغیرہ ہسٹوری گرام
More than one Dependent Variable Historigram

کبھی کبھی، ہسٹوری گرام میں مواد، ایک سے زائد متغیروں سے متعلق ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر یہ مواد ایک مدت کے دوران گیہوں اور چاول

دونوں کی پیداوار سے متعلق ہے۔ اس ہسٹوری گرام، جو دو اشیاء (ایک گیہوں کی پیداوار اور دوسری چاول کی پیداوار) کے لئے تیار کیا جاتا ہے، ایک سے زائد تابع متغیرہ ترسیم، کہا جاتا ہے۔ یہ ایک سے زائد متغیرہ ترسیم اسی طرح سے تیار کی جاتی ہے جس طرح یک متغیرہ ترسیم تیار کی جاتی ہے۔ اس صورت میں نقلی قاعدے کا خط بھی لیا جاسکتا ہے۔ اب تمثیل 4 پر غور کیجئے اور اس قسم کی ترسیم کی تیاری کے عملی طریقہ کار کو سمجھنے کی کوشش کیجئے۔

تمثیل 4

مندرجہ ذیل مواد ہندوستان میں آبادی کی شرح پیدائش، شرح اموات اور شرح افزائش (growth rate) سے متعلق ہے۔ اس مواد کے لئے ایک سے زائد تابع متغیرہ ہسٹوری گرام کی ترسیم کیجئے۔

فی سال فی ہزار آبادی کی شرح

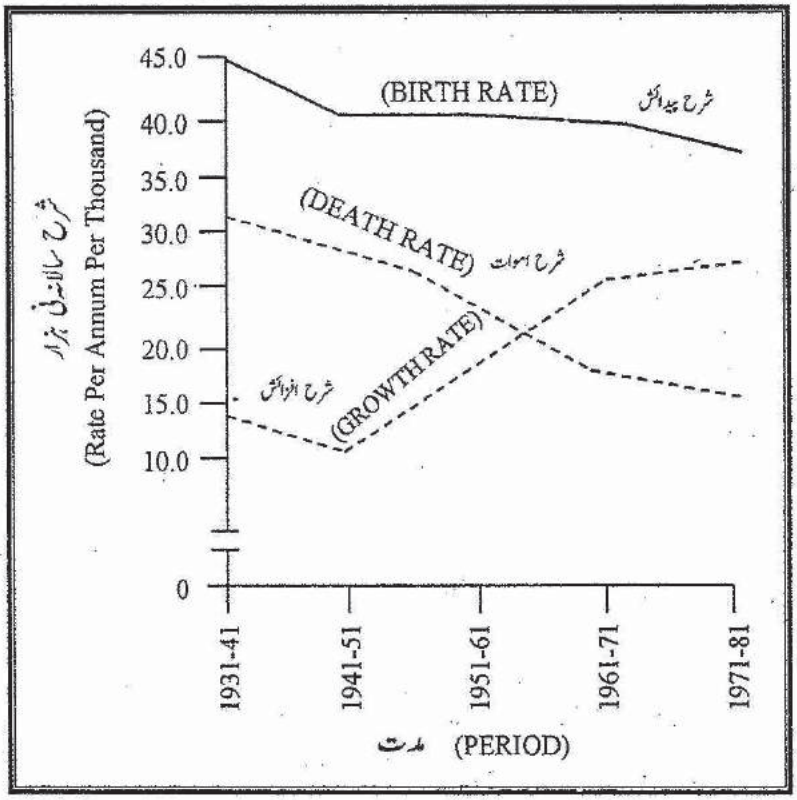
مدت	:	1931-41	1941-51	1951-61	1961-71	1971-81
شرح پیدائش	:	45.2	39.9	40.9	40.0	37.9
شرح اموات	:	31.2	27.4	22.8	17.8	15.4
شرح افزائش	:	14.0	12.5	18.1	22.2	22.5

حل :

اس مواد کے لئے ایک کثیر متغیرہ ہسٹوری گرام ترسیم 9.5 تیار کی گئی ہے۔ نقلی قاعدے کا خط بھی لیا گیا ہے۔ اس ترسیم میں ہر متغیرہ کے لئے ایک منحنی ترسیم تیار کی گئی ہے (یعنی شرح پیدائش، شرح اموات اور شرح افزائش تینوں کے لئے)۔ آسانی سے شناخت کے لئے، ہر منحنی کو جوڑنے کی خاطر مختلف طریقوں سے نشان لگایا جاتا ہے۔ ترسیم صاف طور پر بتلاتی ہے کہ وقت کے ساتھ ساتھ شرح اموات میں تنزل، شرح پیدائش میں کمی کی بہ نسبت بہت زیادہ ہے اس لئے 1941 کے بعد شرح افزائش بتدریج بڑھ رہی ہے۔

ترسیم 9.5 : ایک سے زاید تابع متغیرہ ہسٹوری گرام جو آبادی کی پیدائش، اموات اور افزائش کی شرحوں کو ظاہر کرتا ہے

Graph 9.5 : More than One Variable Historigram Showing Birth, Death and Growth Rates in India



9.5.3 مخلوط ترسیم Mixed Graph

مخلوط ترسیم وہ ترسیم ہے جو کسی دو تابع متغیروں کے لئے تیار کی جاتی ہے جبکہ ان دونوں متغیروں کے لئے پیمانے یکساں نہیں ہوتے اور ان دونوں شرحوں کی قدروں کو دو مختلف پیمانوں کے ذریعہ پیش کیا جاتا ہے یعنی اس صورت میں دو y محور ہوں گے پہلا محور y جو عام طور پر لیا جاتا ہے۔ دوسرا y محور جو کہ داہنے افقی محور پر لیا جائے گا۔ مخلوط ترسیم تیار کرتے وقت مندرجہ ذیل نکات کو ذہن نشین رکھنا ضروری ہے:۔

(i) دو عمودی محوروں پر لئے گئے پیمانوں کے وسطی نقطوں کا ایک ہی خطہ پر ہونا ضروری ہے۔

(ii) دو مختلف منحنیاں (curves) کھینچی جانی چاہئیں ایک عمومی محور y پر اور دوسری اس دوسرے y محور پر جو محور x کے دائیں جانب لیا گیا ہے۔

(iii) اس صورت میں حسب ضرورت نقلی خط قاعدہ بھی لیا جاسکتا ہے۔

اب ایک تمثیل کے ذریعہ مخلوط ترسیم کی تیاری کی وضاحت کی جائے گی۔

تمثیل 5

مندرجہ ذیل مواد ایک کاروباری ادارے کے فروخت یعنی مال کی بکری سے متعلق ہے۔ مخلوط ترسیم کے ذریعہ اس مواد کا اظہار کیجئے۔

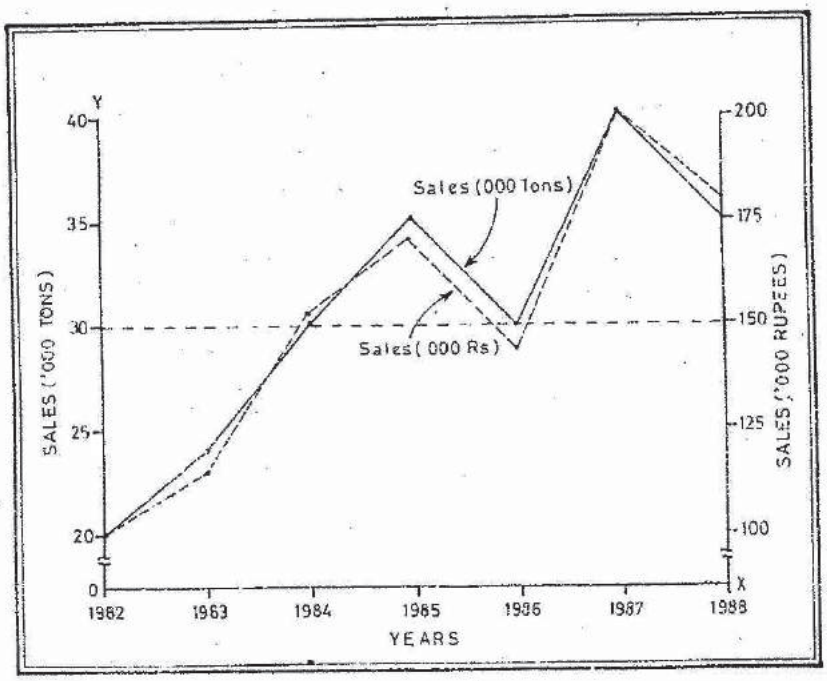
سال	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
مقدار فروخت ('000 یعنی ہزار ٹنوں میں)	20	24	30	35	30	40	35
قدر فروخت ('000 یعنی ہزار روپیوں میں)	100	115	155	170	145	200	180

حل

اب ترسیم نمبر 9.6 میں پیش کی گئی مخلوط ترسیم پر نظر ڈالیے۔ مقدار فروخت کو معمول کے محور y پر اور قدر فروخت کو محور x کی دائیں جانب لے گئے محور y پر ظاہر کیا گیا ہے مقدار میں فروخت کا رینج (Range) 20 تا 40 ہزار ٹن ہے اور قدر فروخت کا رینج 100 تا 200 روپے ہے۔ دونوں منحنیوں کو نمایاں طور پر بتلانے کے لئے (ترسیم کی جگہ ضائع جانے سے بچانے کے لئے) نقلی خط قاعدہ کا استعمال کیا جائے گا اور ٹنوں کی جانب نقطہ مبداء یعنی 20 پر نشان لگائیں گے اور روپیوں کی جانب 100 پر نشان لگائیں گے۔ ٹنوں کی وسطی قدر 30 ،اور روپیوں کی 150 بھی ایک ہی خط پر لی جائے گی۔ اس کو ترسیم میں نقطہ وار خطہ (Dotted line) کی شکل میں دکھلایا گیا ہے۔ مقدار سے متعلق محور y پر، دو 2 بڑے مربعے 5 ہزار ٹنوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ اسی طرح فروخت سے متعلق محور y پر دو بڑے مربعے 25 ہزار روپیوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ دونوں منحنیوں میں امتیاز کرنے کے لئے ہم نے فروخت کو ٹنوں میں مسلسل خط (Continuous line) کے ذریعہ اور فروخت کو روپیوں میں شکستہ خط (Broken line) کے ذریعہ ظاہر کیا ہے۔

ترسیم 9.6 : فروخت کی مقدار اور قدر کے اظہار کے لئے مخلوط ترسیم

Graph 9.6 : Mixed Graph Showing Quantity and Value of Sales



9.5.4 رینج ترسیم (Range Graph)

کبھی کبھی، تابع متغیرہ کے لئے، دو انتہائی قدریں (یعنی اعظم ترین اور اقل ترین) دی جاتی ہیں۔ کسی مخصوص دن اعظم ترین اور اقل ترین درجہ حرارت اس کی ایک مثال ہے۔ وہ ترسیم جو دو انتہائی قدروں کو ظاہر کرتی ہے، رینج ترسیم کہلاتی ہے۔ اس قسم کی ترسیم دو ملحسنیوں کو ظاہر کرتی ہے ایک اعظم ترین اور دوسری اقل ترین قدر کے لئے جو مختلف وقت سے تعلق رکھتی ہیں۔ اس کو رینج ترسیم کہتے ہیں کیونکہ یہ دیئے گئے مواد کی قدروں میں رینج کو بتلاتی ہے۔ رینج سے مراد تغیر پذیر یا متغیر مقداروں کے ایک سلسلہ کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی مقدار کا درمیانی فرق ہے۔

تمثیل 6

جنوری 1989 کے پہلے ہفتے کے دوران xyz کمپنی کے حصص کی اعظم ترین اور اقل ترین قیمتوں کے مندرجہ ذیل مواد کے لئے رینج ترسیم تیار کیجئے۔

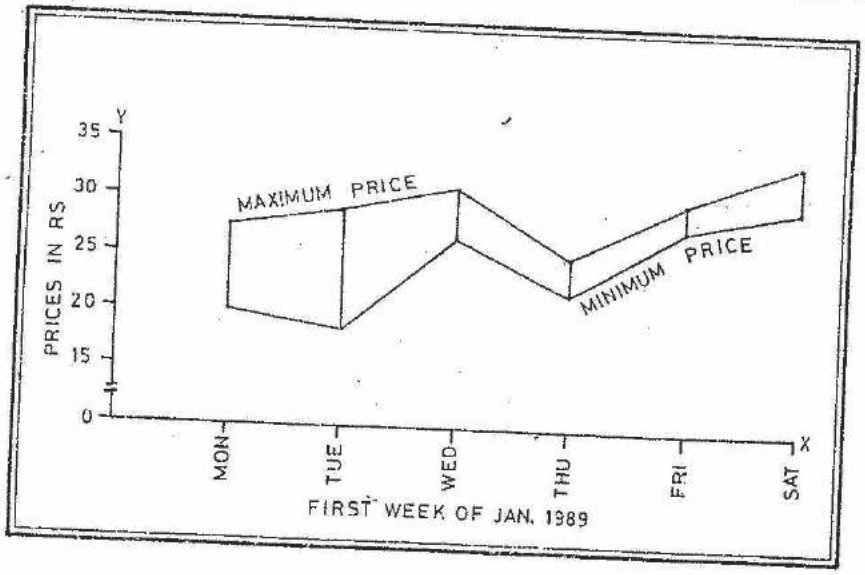
دن	اقل ترین قیمت (روپے)	اعظم ترین قیمت (روپے)
پیر	20	27
منگل	18	29
چہار شنبہ	27	31
جمعرات	22	25
جمعہ	28	30
ہفتہ	30	34

حل

رینج ترسیم کو ترسیم نمبر 9.7 میں تشکیل دے کر پیش کیا گیا ہے۔ یہ دونوں منحنیوں کو پیش کر رہی ہے، ایک اعظم ترین قیمت اور دوسرا اقل ترین قیمت کے لئے۔

ترسیم نمبر 9.7 : xyz کمپنی کے حصص کی اعظم ترین اور اقل ترین قیمتوں کو بتلانے والی ترسیم

Graph 9.7 : Range Graph Showing the Maximum and Minimum Prices of the Shares of XYZ Company



مختلف دنوں پر عمودی خطوط اس دن کی قیمتوں کے رینج کو ظاہر کرتے ہیں۔ دو افقی خطوط میں نشیب و فراز، مدت کے دوران قیمتوں کے نشیب و فراز کو ظاہر کرتے ہیں۔ لہذا ایسی ترسیم سے ان دو قسم کی معلومات پر روشنی پڑتی ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ A

(1) زمانی سلسلے کی ترسیم کیا ہے؟

.....

.....

.....

.....

(2) ایک تابع متغیرہ ہسٹوری گرام اور ایک سے زائد تابع متغیرہ ہسٹوری گرام میں فرق کیجئے۔

.....

.....

.....

.....

(3) نقطی خطے قاعدہ کیا ہے؟

.....

.....

.....

.....

(4) مخلوط ترسیم اور رینج ترسیم میں فرق کیجئے۔

.....

.....

.....

.....

(5) بتلایئے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) مواد کا ترسیمی اظہار مواد کے تقابل کو آسان بنا دیتا ہے۔

(ii) ترسیمات کے ذریعہ سابقہ کارگزاری کے رجحانات کو قائم نہیں کیا جاسکتا۔

(iii) اگر اقدار مثبت ہوں تو عام طور پر ترسیموں کو پہلے ربع میں تیار کیا جاتا ہے۔

(iv) ہسٹوری گرام میں، محور y کبھی شکستہ نہیں ہوتا۔

(v) ہسٹوری گرام کبھی بھی ایک سے زیادہ تابع متغیرہ کے متعلق مواد کو ظاہر نہیں کر سکتا۔

(vi) نقطی خطہ قاعدہ کے لینے کا بنیادی مقصد یہ ہے کہ مواد کو نمایاں طور پر ظاہر کیا جائے۔

(vii) ایک سے زیادہ تابع متغیرہ ہسٹوری گرام کی صورت میں، تابع متغیروں کو محور x پر لیا جاتا ہے۔

(viii) مخلوط ترسیم کی صورت میں نقطی خطہ قاعدہ کو نہیں لیا جاسکتا۔

(6) قوس میں دیئے ہوئے الفاظ میں سے موزوں لفظ سے خالی جگہوں کو پُر کیجئے۔

(i) وضعی اواسط (Positional averages) کی اقدار کے تعین میں مواد کا ترسیمی اظہار ..... (مدد کرتا ہے/مدد نہیں کرتا)

(ii) اگر تابع متغیرہ کی قدر منفی ہے تو ترسیم کو ربع ..... میں تیار کیا جاتا ہے۔ (III/IV)

(iii) ہسٹوری گرام میں، وقت کو ..... محور پر لیا جاتا ہے۔ (y/x)

(iv) کسی ترسیم کو نسبتی پیمانہ پر تیار ..... (کیا جاسکتا ہے / نہیں کیا جاسکتا ہے)

(v) نقطی خط قاعدہ، ایک سے زیادہ تابع متغیرہ ہسٹوری گرام کی صورت میں ..... جاسکتا ہے۔ (لیا / نہیں لیا)

(vi) مخلوط ترسیم مختلف پیمانوں کی اکائی والے ..... تابع متغیروں کی قدروں کے اظہار کے لئے تیار کئے جاتے ہیں۔ (دو / تین)

(vii) مخلوط ترسیم کی صورت میں، دو پیمانوں کے وسطی نقاط ایک ہی خط پر ..... ہیں۔ (ہوتے / نہیں ہوتے)

(viii) رینج ترسیم، کسی متغیرہ کی دو انتہائی قدروں کے ..... کو بتلاتی ہے۔ (فرق / جمع)

9.6 تعددی تقسیم ترسیمات Graphs of Frequency Distribution

اکائی 7 میں آپ نے مطالعہ کیا کہ تعددی تقسیم کو جدول کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ در حقیقت تعددی تقسیم کو ترسیمی شکل میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔ جدولی اظہار کے مقابلے میں تعددی تقسیم کی ترسیمات، خصوصیات اور روابط کی شناخت میں مددگار ثابت ہوتی ہیں۔ تعددی تقسیم کی ترسیمات وضعی اواسط جیسے کثیریہ، وسطانیہ، چوتھائیہ وغیرہ کے تعین کرنے میں بھی کار آمد ہیں۔ اب ہم تعددی تقسیم کی ترسیمات کی تیاری کے بنیادی اصولوں کا مطالعہ کریں گے۔

تعددی تقسیم ترسیمات :تیاری کے اصول :

تواتری تقسیم ترسیمات مندرجہ ذیل اصولوں کی بنیاد پر تیار کی جاتی ہیں۔

(1) متغیرہ کی اقدار کو محور x پر لیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر تعددی تقسیم میں جس میں طلبا کی عمر (برسوں میں) ظاہر کی جاتی ہے تو عمر کو محور X پر لیا جاتا ہے۔

(2) مدات کے تعدد سے اخذ کردہ قدروں / جماعتوں کو محور X پر بتلایا جاتا ہے۔

(3) یہ ضروری نہیں کہ افقی محور صفر سے شروع ہو لیکن ان ترسیمات میں محور X شکستہ نہیں ہوگا۔ نقلی خط قاعدہ نہیں لیا جاسکتا۔

(4) دونوں محوروں پر پیمانوں کو اس طرح لیا جائے کہ مواد کی نمایاں طور پر عکاسی ہو۔ ان پیمانوں کی صاف طور پر صراحت کی جانی چاہیئے۔

(5) ترسیم کا ایک مختصر اور خود آشکار عنوان ہونا چاہیئے۔

9.7 تعددی تقسیم ترسیمات کی قسمیں
Types of Frequency Distribution Graphs

تعددی تقسیم کی ترسیمات کی درجہ بندی اس طرح کی جاتی ہے۔ (1) ہسٹوگرام (2) تعددی کثیر الاضلاع (3) تعددی منحنی اور (4) اوجائیو یا مجموعی تعددی ترسیم۔ اب ہم ان چار قسم کی ترسیمات کی تیاری کے طریقے کو سمجھنے کی کوشش کریں گے۔

9.7.1 ہسٹوگرام (Histogram)

ہسٹوگرام مستطیلوں کا وہ سلسلہ ہے، جو اپنی چوڑائی میں جماعتی وقفے کی ضخامت سے متناسب ہے اور رقبے میں متعلقہ جماعتی وقفے کے تعددوں کی تعداد سے متناسب ہے۔ اس ترسیم میں مدات / جماعتی وقفے محور x پر لئے جاتے ہیں، اور تعدد سے اخذ کی ہوئی قدروں کو y محور بطور مستطیل کی اونچائی کے لیا جاتا ہے۔ اونچائی اخذ کرنے کیلئے، اقل ترین جماعتی وقفے کو ایک اکائی کی چوڑائی کے طور پر لیا جاتا ہے۔ مابقی دوسرے جماعتی وقفوں کی چوڑائی کو اس اکائی کی مناسبت سے لیا جاتا ہے۔ اُس کے اس عدد سے تعدد کو تقسیم کیا جاتا ہے۔ اس طرح سے حاصل شدہ قدر کو تعددی کثافت (Frequency Density) یا تطبیقی تعدد (Adjusted Frequency) کہا جاتا ہے۔ یہ فی اکائی جماعتی وقفہ کو ظاہر کرتا ہے۔ جب تمام جماعتی وقفے مساوی ہوں تو، ہر جماعتی وقفے کی چوڑائی اُس ایک اکائی کے برابر ہوتی ہے۔ اس لئے تعدد (جسے رقبے سے تعبیر کیا جاتا ہے) کو ایک سے تقسیم کرنے پر ہمیں اونچائی (یعنی تعددی کثافت) حاصل ہوتی ہے جو تعداد میں تعدد کے برابر ہوتی ہے۔ لہذا مساوی جماعتی وقفوں کی صورت میں اونچائی کو تعدد کے تناسب میں لیا جاتا ہے لیکن در حقیقت تصوراتی طور پر یہ رقبہ ہوتا ہے جو تعدد کے تناسب میں ہوتا ہے۔

ہسٹوگرام کی تیاری میں دو متصل مستطیلوں کے درمیان فصل (gap) نہیں ہونا چاہیئے۔ اگر مواد کو داخلی جماعتی وقفے یا غیر مسلسل متغیرہ میں دیا گیا ہو تو

پہلے مسلسل مواد کو، خارجی قسم کے جماعتی وقفوں میں تبدیل کیا جائے۔ ہسٹوگرام مواد کے کثیریہ (Mode) کو معلوم کرنے میں مددگار ہے جس کو آپ اس نصاب میں بعد میں سیکھیں گے۔

تمثیل 7

مندرجہ ذیل تقسیم (مواد) کسی کالج کے طلبہ کے مضمون شماریات میں حاصل کردہ نشانات سے متعلق ہے۔ ترسیم کے ذریعہ اس کو پیش کیجئے۔

نشانات :	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
طلبہ کی تعداد :	5	15	25	50	40	30	10	5

حل:

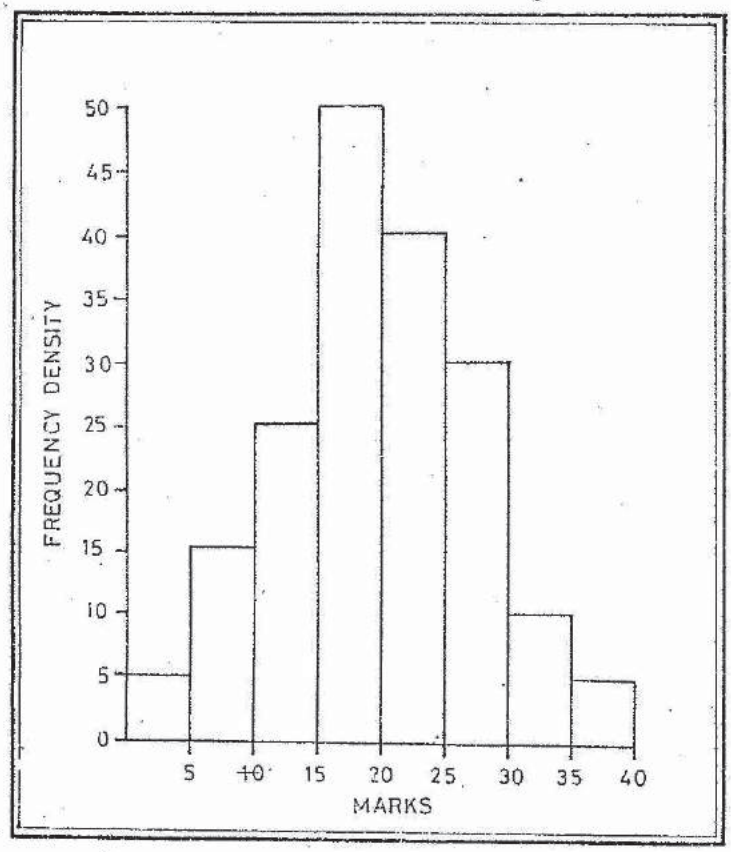
اس تمثیل میں تعدد یعنی نشانات کو خارجی قسم کی مسلسل تعددی تقسیم کی شکل میں دیا گیا ہے۔ لہٰذا دیے گیے جماعتی وقفوں کو محور x پر لیا جاتا ہے چونکہ تمام جماعتی وقفے ایک ہی سائز کے ہیں۔ ان کی لمبائی کو ایک اکائی کے ذریعہ ظاہر کرنے سے ہر جماعتی وقفہ ایک یونٹ چوڑا ہوگا۔ تعدد (یعنی مستطیل کے رقبہ) کو اس چوڑائی سے تقسیم کرنے سے مستطیلوں کی اونچائی ان کے تعددوں کے مساوی ہوگی۔

نشانات	تعداد طلبہ (رقبہ)	چوڑائی اکائیاں (قاعدہ)	تعددی کثافت (اونچائی)
0 - 5	5	1	5/1 = 5
5 - 10	15	1	15/1 = 15
10 - 15	25	1	25/1 = 25
15 - 20	50	1	50/1 = 50
20 - 25	40	1	40/1 = 40
25 - 30	30	1	30/1 = 30
30 - 35	10	1	10/1 = 10
35 - 40	5	1	5/1 = 5

اونچائی کو محور Y پر لیا جائے گا۔ اب محور X اور محور Y پر موزوں پیمانوں کے نشان لگائے جائیں۔ ہسٹوگرام کی تشکیل کے لئے، قاعدے کے خط پر بطور جماعتی وقفہ کئی مستطیل تشکیل دیے جائیں گے۔ اونچائی مندرجہ بالا ماخوذ قدروں کے مساوی لی جائے گی۔ ہسٹوگرام کو ترسیم نمبر 9.8 پر پیش کیا گیا ہے۔

ترسیم 9.8 : شماریات میں طلبہ کے نشانات (مساوی چوڑائی کے حامل جماعتی وقفے) ظاہر کرنے والا ہسٹوگرام

Graph 9.8 : Histogram Showing the Marks of Students in Statistics (Class Intervals with Equal Width)



غیر مساوی چوڑائی والے جماعتی وقفوں کی صورت میں ہسٹوگرام

(Histogram in case of Class Intervals with Unequal Width)

مثال 7 میں آپ نے غور کیا ہوگا کہ تمام جماعتی وقفوں کی چوڑائی یکساں ہے لہذا اس صورت میں تعداد اور تعددی کثافت عددی طور پر یکساں ہیں لیکن اس بات کا بھی قوی امکان رہتا ہے کہ تعددی تقسیم میں جماعتی وقفوں کی چوڑائی یکساں نہ ہو تو اس صورت میں جماعتی وقفوں کی چوڑائی مختلف ہو سکتی ہے۔ ایسی صورت میں جماعتی وقفوں کا تعداد اور تعددی کثافت ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں جیسا کہ اوپر اشارہ کیا جا چکا ہے کہ اقل ترین چوڑائی والے جماعتی وقفے کو دوسرے جماعتی وقفوں میں مطابقت پیدا کرنے کے لئے ایک اساس کے طور پر لیا جاتا ہے۔ دوسرے جماعتی وقفوں کے تطبیقی تعداد یا تعددی کثافت کو مندرجہ ذیل فارمولے کے تحت محسوب کیا جاتا ہے :-

$$\text{کسی بھی جماعت کا تطبیقی تعداد} = \frac{\text{اساسی جماعت کی چوڑائی}}{\text{دی گئی جماعت کی چوڑائی}} \times \text{دی گئی جماعت کا تعداد}$$

اس طریقہ تطبیق سے بھی مستطیل کی اونچائی سابقہ تمثیل میں محسوب کردہ اونچائی کے مساوی حاصل ہوتی ہے۔ اس طریقہ میں بھی مستطیل کا رقبہ تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ اب ہم ایک تمثیل کے ذریعہ اس کو عملی طور پر سمجھنے کی کوشش کریں گے۔

تمثیل 8

اکاؤنٹنسی میں ایک جماعت کے طلبا کے حاصل کردہ نشانات سے متعلق مندرجہ ذیل تقسیمی مواد کیلئے ہسٹوگرام کی ترسیم کیجئے۔

نشانات :	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 40	40 - 60
تعداد طلبہ:	5	15	25	50	40	30	20	16

حل:

اس تمثیل میں جماعتی وقفوں کی چوڑائی مساوی نہیں ہے لہذا کچھ جماعتی وقفوں کے تعددوں میں مناسب ردوبدل ضروری ہے۔ اقل ترین چوڑائی (5) کو بطور نارمل چوڑائی لے کر، دو جماعتوں یعنی 30-40 اور 40-60 کے تعددوں کو حسب ذیل طریقہ پر مرتب کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{کسی جماعت کا تطبیقی تعدد} = \frac{\text{اساسی جماعت کی چوڑائی}}{\text{دی گئی جماعت کی چوڑائی}} \times \text{دی گئی جماعت کا تعدد}$$

جماعت 30-40 کے لئے تطبیقی تعدد یا تعددی کثافت $= 20 \times 5/10 = 10$

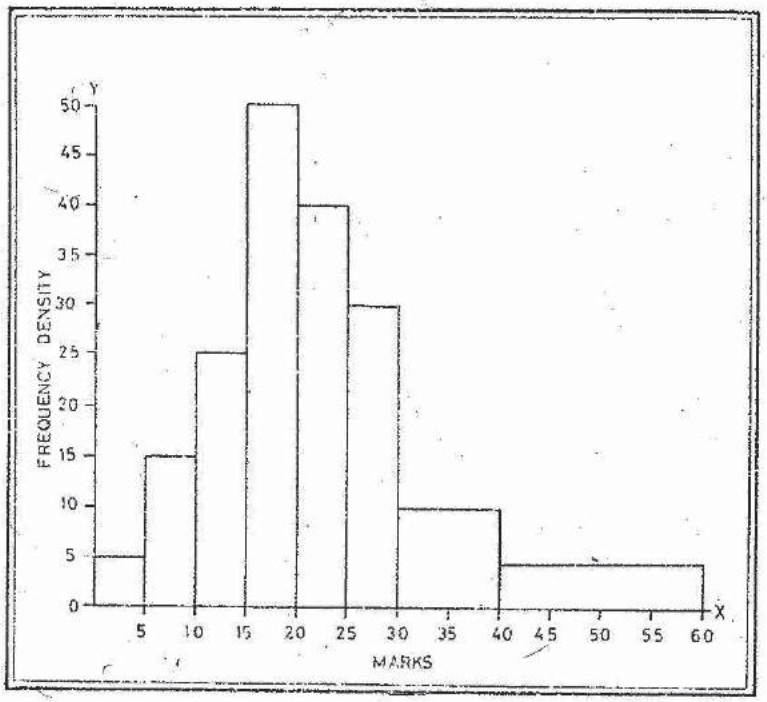
جماعت 40-60 کے لئے تطبیقی تعدد یا تعددی کثافت $= 16 \times 5/20 = 4$

تمثیل 7 میں ظاہر کردہ طریقے کے ذریعہ سے بھی تعددی کثافت معلوم کریں گے اور مطالعہ کریں گے کہ آیا اونچائی کیلئے دونوں طریقے یکساں قدریں پیش کرتے ہیں یا نہیں۔

ترسیم 9.9 میں ہسٹوگرام کو تشکیل دے کر پیش کیا گیا ہے۔

ترسیم 9.9 : اکاؤنٹنسی (حسابات) میں طلبہ کے نشانات ظاہر کرنے والا ہسٹوگرام (غیر مساوی چوڑائی کے ساتھ جماعتی وقفے)

Histogram Showing the Marks of Students in Accountancy (Class Intervals with Unequal Width)



نشانات	طلبہ کی تعداد (ر ب)	چوڑائی کی اکائیاں (قاعدہ)	تعددی کثافت (اونچائی)
0 - 5	5	1	5/1 = 5
5 - 10	15	1	15/1 = 15
10 - 15	25	1	25/1 = 25
15 - 20	50	1	50/1 = 50
20 - 25	40	1	40/1 = 40
25 - 30	30	1	30/1 = 30
30 - 40	20	2	20/2 = 10
40 - 60	16	4	16/4 = 4

ان دو جماعتوں کی درمیانی جماعتیں مندرجہ ذیل ہوں گی۔

چوڑای اکائی = 2 { 30 - 35, 35 - 40 }

چوڑای اکائی = 4 { 40 - 45, 45 - 50, 50 - 55, 55 - 60 }

تمثیل 9

مندرجہ ذیل مواد کے لئے جو کسی کلب کے ممبروں کی (قریبی سالگرہ کے مطابق) عمر سے متعلق ہے، ہسٹوگرام ترسیم کیجئے۔

عمر (برسوں میں):	10 - 14	15 - 24	25 - 39	40 - 59
تعداد ممبران :	5	12	24	12

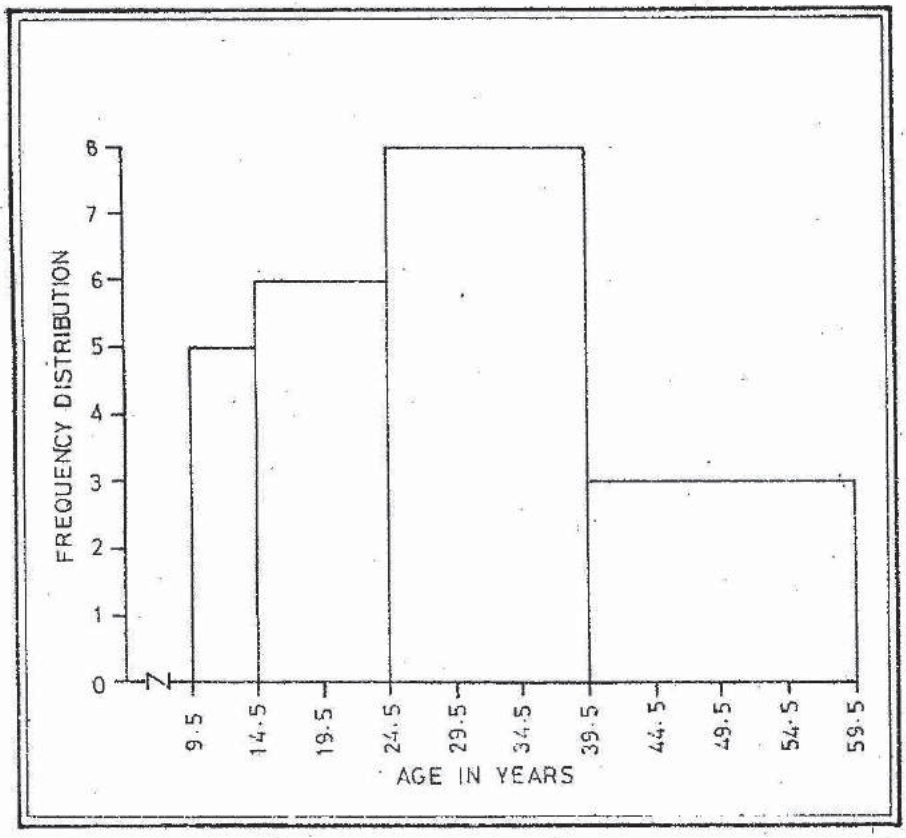
حل:

اس تمثیل میں جماعتی وقفے غیر مساوی سائز کے ہیں اور یہ 'داخلی شکل' میں دیئے گئے ہیں۔ 'خارجی شکل' میں ان کو تبدیل کرنا ضروری ہے تاکہ درمیان میں فصل یعنی جگہ نہ رہے، اور اقل ترین جماعتی وقفہ (یعنی 5) کو بطور چوڑائی کی اکائی لیا جائے تو، مواد حسب ذیل ہوگا:۔

عمر (برسوں میں):	9.5 - 14.5	14.5 - 24.5	24.5 - 39.5	39.5 - 59.5
ممبروں کی تعداد : (رقبہ)	5	12	24	12
چوڑائی کی اکائیاں : (قاعدہ)	1	2	3	4
تعددی کی کثافت: (اونچائی)	5	6	8	3

ترسیم 9.10 کلب کے ممبروں کی عمر ظاہر کرنے والا ہسٹوگرام

Graph 9.10 : Histogram Showing the Age of Club Members



ترسیم 9.10 کو بغور دیکھیے جس میں دیے گیے مواد کا ہسٹوگرام پیش کیا گیا ہے۔ اس ترسیم میں 5 سال کی تعبیر کرنے کے لئے ایک بڑا مربع لیا گیا ہے۔ نقطے 9.5 وغیرہ پر موٹے خط کے نشان لگائے گئے ہیں. ترسیم آسان ہو جائے۔ مبداء کے پاس محور x کو شکستہ کیا گیا ہے تاکہ یہ ظاہر کیا جائے کہ محور x کے اس حصے کا پیمانہ، محور کے باقی حصے سے الگ ہے۔

9.7.2 تعددی کثیر الاضلاع (Frequency Polygon)

کثیر الاضلاع تعددی تقسیم کو ترسیمی طور پر پیش کرنے کا ایک دوسرا طریقہ ہے۔تعددی کثیر ضلعی کی تشکیل کے دو طریقے ہیں پہلے طریقے میں دیے گئے جماعتی وقفوں کے ساتھ، صفر تعدد رکھنے والے دو زائد جماعتی وقفے لئے جاتے ہیں جن میں سے ایک جماعتی وقفہ شروع میں اور دوسرا جماعتی وقفہ آخر میں لیا جاتا ہے۔ تب تعددی کثافتیں وسطی نقطوں کے بالمقابل مرتسم کی جاتی ہیں اور انہیں خط مستقیم سے جوڑا جاتا ہے۔ تعددی کثیر الاضلاع کی تشکیل کا ایک اور طریقہ یہ ہے کہ حسب معمول ہسٹوگرام تشکیل دیا جائے۔ یہاں پر وسطی نقطوں کی چوٹیوں پر ایک بڑا نقطہ رکھا جائے اور پہلے اور آخری عمودی خطوط پر بھی بڑا نقطہ رکھا جائے۔ اس کے بعد بڑے نقطوں کو خط مستقیم سے جوڑ کر تعددی کثیر الاضلاع کی تکمیل کی جائے۔ ان طریقوں سے ظاہر ہوتا ہے کہ تعددی کثیر الاضلاع کا آغاز جماعتی وقفہ کی نچلی حد کی بائیں جانب نچلے حصہ سے ہوتا ہے جو کہ اس جماعتی وقفہ کا وسطی نقطہ ہوتا ہے اس طرح سے وہ بڑھ کر جماعتی وقفہ کی اوپری حد کی جانب وسطی نقطہ تک پہنچتا ہے۔

یہ امر قابل غور ہے کہ ہسٹوگرام اور تعددی ترسیم دونوں کے تحت رقبہ یکساں ہوتا ہے جو کہ مجموعی تعدد کی ترجمانی کرتے ہیں۔

تمثیل 10

مندرجہ ذیل مواد کے لئے ہسٹوگرام اور تعددی کثیر الاضلاع کی ترسیم کیجئے۔

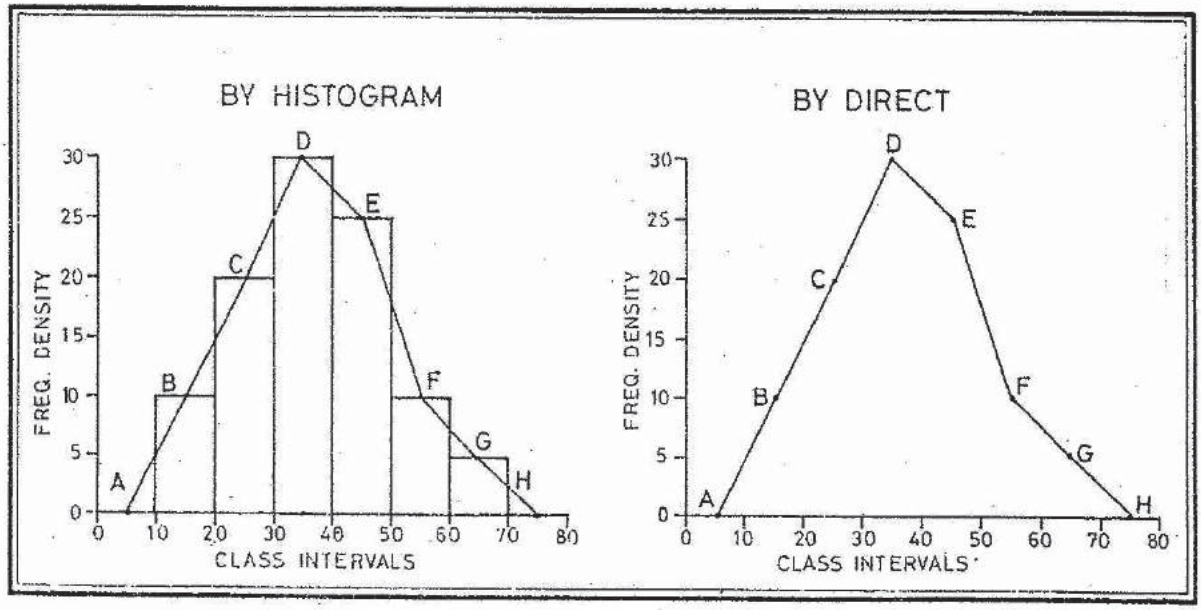
جماعتی وقفہ	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
تعدد	10	20	30	25	10	5

حل:

ہسٹوری گرام اور تعددی کثیر الاضلاع کی تشکیل کے لئے تحسیبات حسب ذیل ہیں

جماعتی وقفہ	تعدد (رقبہ)	عرضی اکائیاں (قاعدہ)	تعددی کثافت (اونچائی)	وسطی نقطے
10 - 20	10	1	10	15
20 - 30	20	1	20	25
30 - 40	30	1	30	35
40 - 50	25	1	25	45
50 - 60	10	1	10	55
60 - 70	5	1	5	65

ترسیم 9.11 : دو طریقوں سے تعددی کثیر الاضلاع



دیئے گئے جماعتی وقفوں کے علاوہ ابتدا اور آخر میں دو زائد جماعتی وقفے صفر تعدد کے ساتھ لئے جاتے ہیں پہلا جماعتی وقفہ 10 - 0 ہے اور دوسرا جماعتی وقفہ 80 - 70 ہیں، کیونکہ ان دونوں جماعتی وقفوں کے لئے کوئی مدات نہیں۔ ان کے لئے تعددی صفر لئے جاتے ہیں۔ اب تعدد کثیر الاضلاع کو دو طریقوں سے تشکیل دیا جاتا ہے۔ (1) ہسٹوگرام استعمال کر کے اور چوٹی کے وسطی نقطوں کو جوڑ کر (یعنی G'F'E'D'C'B'A اور H)۔ (2) راست طریقے سے یعنی دیئے گئے جماعتی وقفوں کے وسطی نقطوں اور دو مزید جماعتی وقفوں کے وسطی نقطوں کو یعنی G'F'E'D'C'B'A اور H کو جوڑ کر۔

ترسیم **9.11** کا بغور مطالعہ کیجئے۔ آپ مندرجہ ذیل نکات اخذ کریں گے۔

(1) ہسٹوگرام کی صورتوں میں، کسی جماعتی وقفے کے اندر مختلف نقطوں پر اونچائی پورے جماعتی وقفے میں یکساں رہتی ہے جب کہ تعددی کثیر الاضلاع ضلعی میں یہ تبدیل ہوتی رہتی ہے اس کا مطلب ہے کہ ہسٹوگرام میں کسی جماعتی وقفے میں تعددات یکساں منقسم ہوتے ہیں، جبکہ تعددی کثیر الاضلاع میں مختلف نقطوں پر تعددی کثافت مختلف ہوتی ہے۔

(2) تعددی کثیر الاضلاع ، تعدد کثافت کے نشیب و فراز کی بتدریج شرح کو ظاہر کرتا ہے، جبکہ ہسٹوگرام جماعتی وقفوں کے اختتامی نقطوں پر اچانک جست لگاتا ہے۔ لہذا جب ایک گروہ سے دوسرے گروہ پر تعدد کے نشیب و فراز بتلانا مطلوب ہو تو تعددی کثیر الاضلاع استعمال کیا جاتا ہے۔

لہذا ایک گروپ سے دوسرے گروپ تک تعددات کے نشیب و فراز کا مستقل اظہار کرنا ہو تو ہسٹوگرام کا استعمال کیا جاتا ہے اور جب بتدریج نشیب و فراز بتلانا مقصود ہو تو کثیر الاضلاع کا استعمال ہوتا ہے۔

تمثیل 11

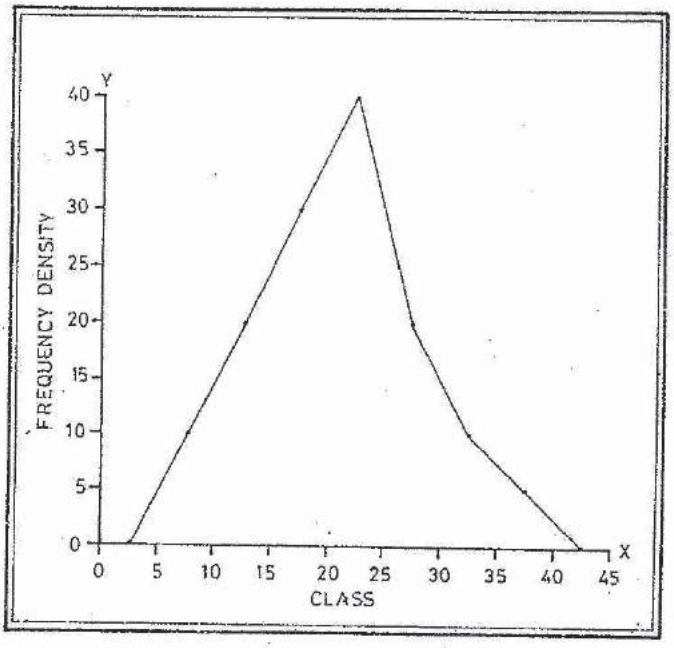
مندرجہ ذیل تقسیم (مواد) کے لئے تعددی کثیر الاضلاع کی ترسیم کیجئے۔

وسطی نقاط	:	7.5	12.5	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5
تعدد	:	10	20	30	40	20	10	5

حل : اس تمثیل میں وسطی نقاط کی بناء پر تعددی کثیر الاضلاع بآسانی تیار کیا جاسکتا ہے پہلے جماعتی وقفہ کی لمبائی دو متعدد وسطی نقاط کا فرق ہے یعنی 12.5 - 7.5 = 5 اس طرح جماعتی وقفوں کی لمبائی اول تا آخر یکساں ہے۔ اس لئے مواد سے قبل ایک اور اس کے بعد ایک، دو جماعتی وقفوں کے وسطی نقطے 2.5 اور 42.5 ہوں گے اور تعددی کثافت تعداد میں تعددات کی تعداد کے مساوی ہوگی۔ ترسیم 9.12 میں پیش کردہ تعددی کثیر الاضلاع کا بغور مطالعہ کیجئے۔

ترسیم 9.12 : تعددی کثیر الاضلاع

Graph 9.12 : Frequency Polygon



9.7.3 تعددی منحنی (Frequency curve)

تعددی کثیر الاضلاع کو ہموار کرنے کے لئے تعددی منحنی کی تشکیل کی جاتی ہے۔ اس کو اس طرح تیار کیا جاتا ہے کہ تعددی کثیر الاضلاع کے بازو سے ایک آزاد منحنی اس طرح کھینچی جاتی ہے کہ تعددی کثیر الاضلاع اور اس منحنی کے تحت رقبہ مساوی ہوتا ہے۔ تعددی منحنی کا جملہ رقبہ تعددی مجموعہ کو ظاہر کرتا ہے۔ تعددی منحنی تعددی کثیر الاضلاع کی ایک عمومی شکل کو پیش کرتی ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر دیا گیا مواد ایک بہت بڑے گروپ کا ایک چھوٹا نمونہ ہے تو تعددی منحنی سے بڑے گروپ کے عام رجحان کا اظہار ہوتا ہے۔

تمثیل 12

مندرجہ ذیل مواد کے لئے ہسٹوگرام، تعددی کثیر الاضلاع اور تعددی منحنی کی ترسیم کیجئے۔

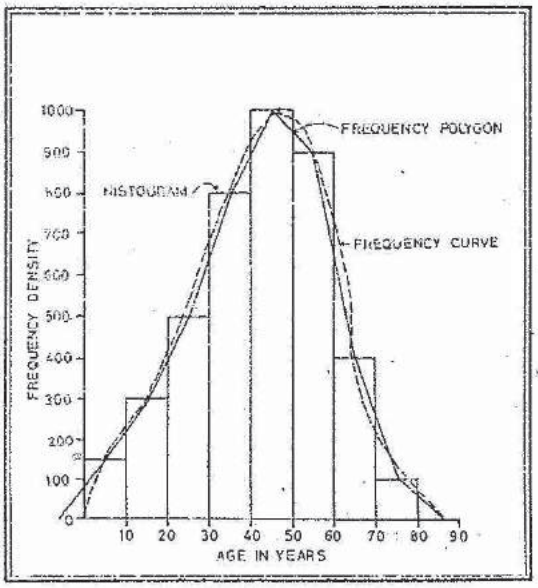
عمر (برسوں میں):	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
مکینوں کی تعداد :	150	300	500	800	1000	900	400	100

حل:

اس صورت میں تمام جماعتی وقفے مساوی ہیں۔ ہم ہسٹوگرام کو اسی طرح تیار کر سکتے ہیں جیسا کہ سابق میں بیان کیا جا چکا ہے۔ ہسٹوگرام کی مدد سے تعددی کثیر الاضلاع کھینچ سکتے ہیں۔ اب ترسیم 9.13 کا احتیاط سے مطالعہ کیجیے۔ آپ واقف ہو جائیں گے کہ ہسٹوگرام کا پہلا عمودی خط خود محور y ہی ہے۔ اس لیے جب ہم پہلے عمودی خط کے وسطی نقطہ کو پہلے مستطیل کے اوپری حصہ کے وسطی نقطہ سے جوڑ دیں گے تو کثیر الاضلاع خط (Polygon line) محور x کے منفی جانب جائے گا جس کا مطلب یہ ہوتا ہے کہ مواد میں منفی مدات موجود ہیں لیکن حقیقت میں منفی مدات موجود نہیں ہیں۔ در حقیقت تعددی کثیر الاضلاع کو منفی جانب اس لیے جانے دیا جاتا ہے کہ ہسٹوگرام اور کثیر الاضلاع کے رقبہ جات مساوی ہوتے ہیں جن سے کل تعدد کا اظہار ہوتا ہے۔ تعددی منحنی کھینچنے کے لیے تعددی کثیر الاضلاع کی تیاری کے عام طرز کو اختیار کرنا چاہیئے اور ایک ہموار خط کھینچنا چاہیئے، جو کبھی کثیر الاضلاع کے نیچے اور کبھی اوپر ہو تاکہ اس کا رقبہ اور تعددی منحنی کا رقبہ مساوی رہے۔ عموماً ایسی صورتوں میں منفی جانب کے لئے مطابقت پیدا کرنے کے مقصد سے تعددی منحنی کو 'O' سے شروع کیا جاتا ہے۔

ترسیم 9.13 : ہسٹوگرام، تعددی کثیر الاضلاع اور تعددی منحنی، مکینوں کی عمر کے لئے

Graph 9.13 : Histogram, Frequency Polygon and Frequency Curve for Age of Residents



9.7.4 اوجائیو ترسیم یا مجموعی تعددی ترسیم
Ogive or Cummulative Frequency Graph

مجموعی تعددی ترسیم، مجموعی تعدادات کی بنیاد پر تیار کی جاتی ہے۔ ہم نے قبل ازیں سیکھا ہے کہ مجموعی تعددی تقسیم یا تو بڑھتی ہوئی یا گھٹتی ہوئی ترتیب میں ہوتی ہے۔ اسی طرح اوجائیو بھی یا اوجائیو بھی یا تو "سے کم" یا "سے زیادہ" طرز پر ہوتی ہے۔ "سے کم" اوجائیوں میں جماعت کے "سے کم" نوعیت کے تعددوں کو اُس وقت جماعت کی بالائی حد کے بالمقابل مرتسم کیا جاتا ہے۔ "سے زیادہ" اوجائیوں کی صورت میں "سے زیادہ" نوعیت کے تعددوں کو اُس جماعت کی زیریں حد کے بالمقابل مرتسم کیا جاتا ہے۔ اوجائیوں کے ذریعہ ہم وسطانیہ، چوتھائیے اور صدوسیئے وغیرہ معلوم کر سکتے ہیں۔

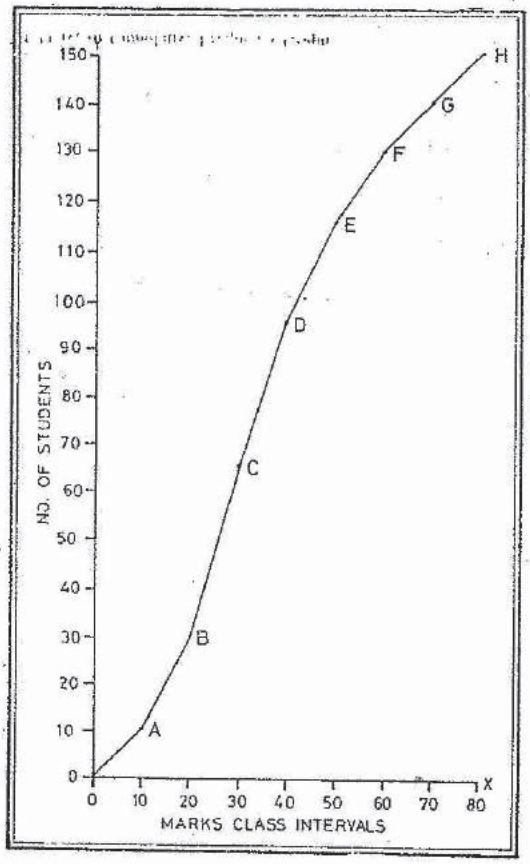
تمثیل 13

مندرجہ ذیل مواد مضمون اکاونٹنسی (حسابیات) میں کسی جماعت کے طلبا کے حاصل کردہ نشانات سے متعلق ہے 'سے کم' اور 'سے زیادہ' اوجائیو الگ الگ ترسیمات میں کھینچا جائے نیز دونوں اوجائیوں کو ایک ہی ترسیم کے ذریعہ ظاہر کیجئے۔

نشانات	:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
تعداد طلبہ	:	10	20	35	30	20	15	10	10

ترسیم 9.14 "سے کم" اوجائیو جو اکاؤنٹنسی (حسابیات) میں طلبہ کے نشانات کو ظاہر کرتی ہے

Graph 9.14 : Less than Ogive Showing the Marks of Students in Accountancy



حل:

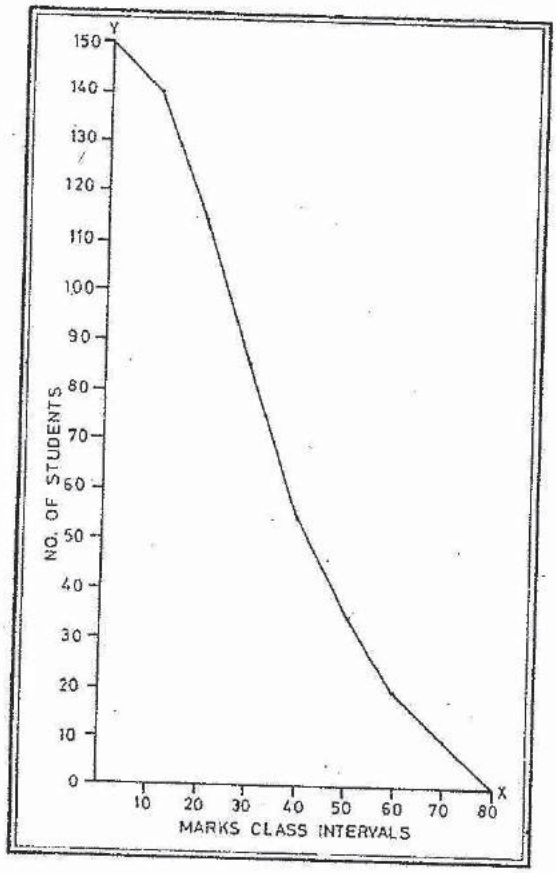
پہلے، دی گئی تقسیم سے کم" اور "سے زیادہ" کو مجموعی تعددی تقسیم میں تبدیل کرنا چاہیے۔ ان دو مجموعی تعددی تقسیموں کی حسب ذیل تشکیل کی گئی ہے۔

مجموعی تعددی تقسیم کی تشکیل

نشانات	تعداد	"سے کم" مجموعی تعدادات	"سے زیادہ" مجموعی تعدادیں
0 - 10	10	10	150
10 - 20	20	30	140
20 - 30	35	65	115
30 - 40	30	95	85
40 - 50	20	115	55
50 - 60	15	130	35
60 - 70	10	140	20
70 - 80	10	150	10

ترسیم 9.15 : "سے زیادہ" اوجائیو جو اکاؤنٹنسی (حسابیات) میں طلبہ کے نشانات کو ظاہر کرتی ہے

Graph 9.15 : More than Ogive showing the Marks of Students in Accountancy

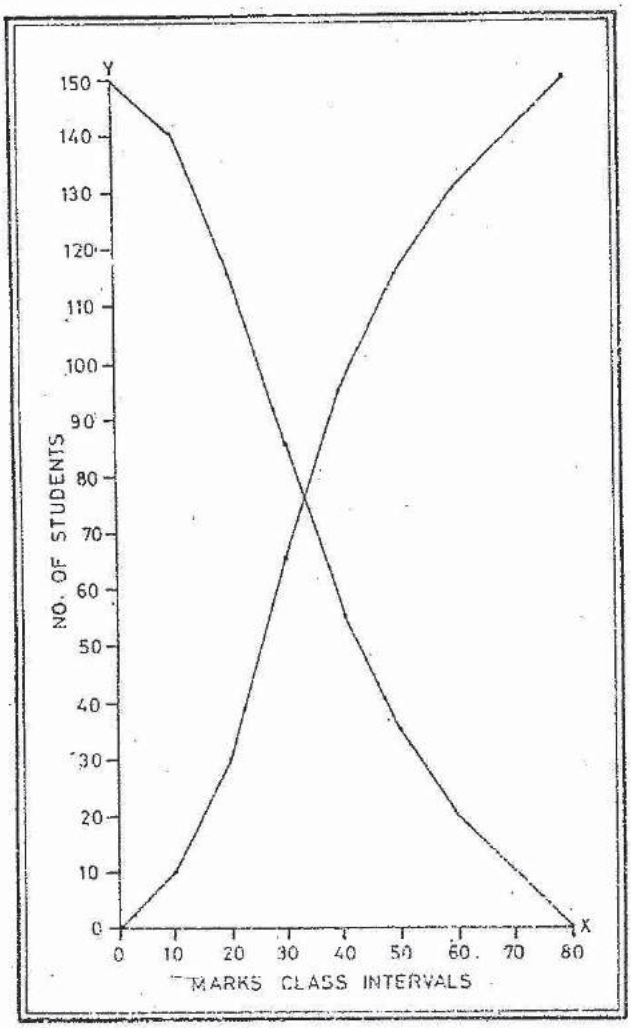


اب ترسیم 9.14 کا مطالعہ کریں۔ "سے کم" اوجائیو مرتسم کرنے کے لئے، مختلف جماعتوں کے بالائی حدود کے مقابل، کم مجموعی تعدادوں کی ترسیم کرنا چاہیئے۔ لہذا نقاط (10, 10) (20, 30) (30, 65) (40, 95) (50, 115) (50, 130) (70,140) اور (80, 150) کو A, B, C, D, E, F, G اور H کے بطور مرتسم کرنا چاہیئے۔ اس طور پر مرتسم ہر نقطہ جماعتی وقفہ کی ایک مخصوص اوپری حد سے کم نشانات کے حاصل کرنے والے طلبہ کی تعداد کو ظاہر کرے گا۔ اگر آپ جماعتی وقفوں کے حدود پر نظر ڈالیں تو آپ کو معلوم ہوگا کہ پہلے جماعتی وقفے کی نچلی حد (یعنی "0" صفر) کے سوائے تمام قدروں کے لئے نقاط مرتسم کئے گئے ہیں۔ "0" سے کم نشانات حاصل کرنے والے طلبہ نہیں ہیں۔ اس لئے دئے ہوئے تمام جماعتی حدود کے لئے نقطوں کو مرتسم کرتے وقت نقطہ (0, 0) میں نقطہ P کی حیثیت سے مرتسم کیا گیا ہے۔ اب تمام نقطوں کو ایک خط مستقیم کے ذریعہ جوڑا جاتا ہے۔

ترسیم 9.15 کے بغور مطالعہ سے آپ کو معلوم ہوگا کہ مختلف جماعتی وقفوں کے نچلے حدود اور آخری جماعتی وقفہ کی بالائی حد (یعنی 80) کے بالمقابل مجموعی تعدادوں سے متعلقہ نقطوں کو مرتسم کرکے "سے زیادہ" اوجائیو کو تشکیل دیا گیا ہے۔

ترسیم 9.16 : اکاؤنٹنسی (حسابیات) میں طلبہ کے نشانات ظاہر کرنے والے "سے کم" اور "سے زیادہ" اوجائیو

Graph 9.16 : Less than Ogive and More than Ogive Showing the Marks of Students in Accountancy



ترسیم 9.16 سے آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ "سے زیادہ اوجائیو" اور "سے کم اوجائیو" ایک ایسے نقطے پر تقاطع کرتے ہیں جو 50% تعدد کے مساوی ہوتا ہے۔ اس صورت میں وہ نقطہ 150/2 یا 75 تعدد ہوتا ہے اور ایسی صورت حال ہمیشہ رہتی ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ B

(1) ہسٹوگرام اور ہسٹوری گرام کے فرق کو بیان کیجئے۔

.....

.....

.....

.....

(2) Frequency polygon سے کیا مراد ہے؟

.....

.....

.....

.....

(3) جماعتی وقفے یکساں نہ ہوں تو ہسٹوگرام کی تشکیل کے لئے آپ تعددوں کی کس طرح تطبیق کریں گے؟

.....

.....

.....

.....

(4) Frequency curve سے کیا مراد ہے؟

.....

.....

.....

.....

(5) "سے کم" اور "سے زیادہ" اوجائیو کے فرق کو واضح کیجئے۔

.....

.....

.....

.....

9.10 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات Answers to Check Your Progress

A .5) (i) صحیح (ii) غلط (iii) صحیح (iv) غلط (v) غلط (vi) صحیح (vii) غلط (viii) غلط

A .6) (i) مدد کرتا ہے (ii) IV (iii) x (iv) کیا جاسکتا ہے

(v) لیا جاسکتا ہے (vi) دو (vii) ہوتے ہیں (viii) فرق

B .6) (i) صحیح (ii) غلط (iii) صحیح (iv) غلط (v) غلط (vi) صحیح (vii) صحیح

7. (i) y محور (ii) کثیریہ (iii) رقبہ (iv) ہے (v) مجموعی (vi) چڑھتی ہوئی (vii) وسطانیہ

9.11 امتحانی سوالات / مشقیں Terminal Questions/Exercises

سوالات

(1) مواد کے ترسیمی اظہار کے قواعد بیان کیجیے۔

(2) مواد کے ترسیمی اظہار کی اہمیت پر بحث کیجیے۔

(3) زمانی سلسلے کی ترسیم کیا ہے؟ زمانی سلسلے کی ترسیم کو تشکیل دینے کے اصولوں پر بحث کیجیے۔

(4) تعددی تقسیم کی ترسیم کیا ہے؟ تعددی تقسیم کی ترسیم کو تیار کرنے کے اصولوں پر بحث کیجیے۔

(5) تعددی تقسیم پر مبنی ترسیموں کے مختلف اقسام بیان کیجیے۔

(6) زمانی سلسلے کی مختلف ترسیمات کی قسمیں بیان کیجیے۔

مشقیں

(1) مندرجہ ذیل مواد برقی کی عدم سربراہی کی وجہ سے کسی کارخانے میں ضائع شدہ ایام کار کی تعداد سے متعلق ہے۔ ایک موزوں ترسیم کے ذریعہ اس کو ظاہر کیجیے۔

سال	:	1980	1981	1982	1983	1984	1985
ضائع شدہ کار ایام	:	1900	1588	1469	1461	1927	1011

(2) مختلف پنج سالہ منصوبوں کے دوران تعلیم کے تخمینہ مصارف سے متعلق مندرجہ ذیل مواد کے لئے ہسٹوری گرام کی ترسیم کیجیے۔

منصوبے	:	I	II	III	IV	V	VI	VII
فیصد تخمینہ مصارف	:	7.6	5.9	6.9	4.9	3.3	2.6	3.6

(3) مندرجہ ذیل مواد ہندوستان کی آبادی سے متعلق ہے، موزوں ترسیم تیار کیجیے۔

سال	:	1931	1941	1951	1961	1971	1981
آبادی (کروڑوں میں)	:	27.9	31.9	36.1	43.9	54.8	68.5

(4) کسی ملک کے توازن تجارت (Balance of trade) سے متعلق مندرجہ ذیل مواد کے لئے موزوں ترسیم تیار کیجیے۔

سال	:	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
توازن تجارت ('000 روپے)	:	+3	+5	+1	-4	-2	+3	-5	+6

(5) مندرجہ ذیل مواد ہندوستان میں کامگار آبادی (کام کرنے والی آبادی) کی پیشہ وارانہ تقسیم سے متعلق ہے۔

سال	ابتدائی%	ثانوی%	ثالثی%	جملہ آبادی
1941	76.0	10.5	13.5	100
1951	72.1	10.7	17.2	100
1961	--	--	--	--
1971	72.1	11.2	16.7	100
1981	70.6	12.9	16.5	100

اس مواد کے لئے ایک سے زیادہ تابع متغیرہ ترسیم تیار کیجئے۔

(6) مقدار اور قدر کی اصطلاحوں میں کسی جنس کی پیداآوری سے متعلق مندرجہ ذیل مواد کے لئے مخلوط ترسیم (Mixed graph) تیار کیجئے۔

سال	:	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
مقدار (000' میں)	:	20	24	24	26	25	28	30
قدر (لاکھ روپے)	:	1000	1100	1200	1350	1350	1500	1800

(7) مندرجہ ذیل مواد دہلی میں حرارت سے متعلق ہے۔ اس مواد کے لئے رینج ترسیم (Range graph) تیار کیجئے۔

تاریخ	اعظم ترین حرارت (سل سی یس)	اقل ترین حرارت
1-11-89	32.5	16.5
2-11-89	31.6	16.0
3-11-89	30.2	16.0
4-11-89	29.5	15.5
5-11-89	30.5	15.0
6-11-89	31.6	14.5
7-11-89	30.0	14.5

(8) مندرجہ ذیل مواد کے لئے ایک ہسٹوگرام بنایئے۔

کئے گئے گو کی تعداد	:	0	1	2	3	4	5	6
میچوں کی تعداد	:	8	12	20	10	6	4	2

(9) مندرجہ ذیل مواد کے لئے ایک ہسٹوگرام تیار کیجئے۔

سائز	:	1	2	3	4	5	6	7	8
تعدد	:	5	15	20	30	25	20	10	10

(10) مندرجہ ذیل مواد کے لئے ایک ہسٹوگرام تیار کیجئے۔

(عمر برسوں میں) :	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14	14 - 16	16 - 18
بچوں کی تعداد :	50	80	140	200	300	180	40

(11) مندرجہ ذیل مواد کسی کالج میں معاشیات میں طلبہ کے حاصل کردہ نشانات سے متعلق ہے۔ اس مواد کے لئے مخلوط ترسیم تیار کیجیے۔

نشانات :	0 - 10	10 - 20	20 - 30	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 100
تعداد طلبہ :	10	15	40	30	50	30	15

(12) مندرجہ ذیل مواد کے لئے ایک ہسٹوگرام، ایک تعددی کثیر الاضلاع اور تعددی منحنی (Frequency curve) کی ترسیم کیجیے۔

جماعت	:	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35
تعدد	:	5	20	40	50	30	10	5

(13) مندرجہ ذیل مواد کے لئے تعددی کثیر الاضلاع تیار کیجیے۔

وسطی نقطہ	:	5	15	25	35	45	55	65
تعدد	:	20	40	50	80	60	30	10

(14) مندرجہ ذیل مواد کے لئے "سے کم" اور "سے زیادہ" اوجائیو کی الگ الگ ترسیمیں تیار کیجیے۔

جماعت	:	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35
تعدد	:	5	20	40	50	30	10	5

(15) مندرجہ ذیل مواد کے لئے ایک ہی ترسیم میں "سے کم" اور "سے زیادہ" اوجائیو تیار کیجیے۔

نشانات	:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-100
طلبہ کی تعداد	:	20	40	80	150	250	100	60	10

نوٹ : یہ سوالات اس اکائی کے سمجھنے میں مددگار ثابت ہوں گے۔ ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجیے لیکن آپ کے جواب یونیورسٹی کو نہ بھیجیے۔ یہ آپ کی مشق کے لئے ہیں۔

SOME USEFUL BOOKS چند مفید کتب

Elhance, D.N., and Veena Elhance, 1988, Fundamentals of Statistics, Ketab Mahal : Allhabad (Chapter 3-6)

Gupta, C.B., An Introduction to Statistical Methods, Vikas Publishing House: New Delhi, (Chapters 4-8).

Gupta, S.P., 1989, Elementary Statistical Methods, Sultan Chand & Sons: New Delhi. (Chapters 3-6).

Sancheti, D.C., and Kapoor, V.K., 1989, Statistics Theory, Methods and Applications, Sultan Chand & Sons: New Delhi. (Chapter 2-4)

Shenoy, G.V., Srivastava V.K., and Sharma, S.C., 1989. Business Statistics, Wiley Eastern: New Delhi, (Chapter 2-3)

Simpson, G, and Kafka, F. Basic Statistics, Oxford & IBH Publishing: New Delhi (Chapter 3, 6-9).

☆☆☆

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
حیدرآباد

بلاک

3

Measures of Central Tendency مرکزی رجحان کے پیمانے

اکائی 10	Concept of Central Tendency and Mean	5
مرکزی رجحان کا تصور اور اوسط		
اکائی 11	Median	36
وسطانیہ		
اکائی 12	Mode	63
کثیریہ		
اکائی 13	Geometric, Harmonic and Moving Averages	90
ہندسی، ہارمونی اور متحرک اوسط		

مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی

Maulana Azad National Urdu University

Urdu Translation
Under the Supervision of: Translation Division,
Maulana Azad National Urdu University

Translator
Dr. Mohd. Jahangir Ali,
Lecturer in Commerce

Editor
Dr. Mohd. Osman Ahmed
Lecturer in Commerce, Anwar-ul-uloom College,

Language Consultant
Dr. Mustafa Ali Khan Fatimi
Maulana Azad National Urdu University

اردو ترجمہ
زیر اہتمام ٹرانسلیشن ڈویژن
مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

مترجم
ڈاکٹر محمد جہانگیر علی، لکچرر کامرس

ایڈیٹر
ڈاکٹر محمد عثمان احمد، لکچرر کامرس، انوار العلوم کالج

ناظر زبان
ڈاکٹر مصطفیٰ علی خاں فاطمی، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

EMESCO BOOKS,HYDERABAD YEAR-2011

Indira Gandhi National Open University

Expert Committee

Prof. B.S. Sharma
Vice-Chancellor, IGNOU

Prof. J. Satyanarayana (*Chairman*)
Osmania University, Hyderabad

Prof. G.V. Shenoy
Institute of Rural Management, Anand

Prof. B.S. Bhatia
Punjabi University, Patiala

Prof. P.K. Ghosh
Delhi University, Delhi

Prof. Rakesh Khurana
Director
School of Management Studies, IGNOU

Prof. R.B. Upadhyaya
University of Rajasthan Jaipur

Prof. I.H. Farooqi
Aligarh Muslim University, Aligarh

Mr. A.K. Majumdar
Institute of Chartered Accountants
of India, New Delhi

Prof. Amar Chand
Madras University, Madras

Course Preparation Team

Mr. Vidya Ratna
Sri. Ram College of Commerce
Delhi University,
Delhi

Prof. Brahmha Bhatt
School of Commerce
Gujrat University,
Ahmedabad

Faculty Members Indira Gandhi National Open University

Dr. R.K. Grover
Dr. N.V. Narasimham
Ms. Madhu Surya
Mr. Nawal Kishor
Dr. Madhu Tyagi
Prof. G. Sambasiva Rao (*Language Editor*)

© *Indira Gandhi National Open University, 1990 (Reprint January 1999)*
All rights reserved. No part of this work may be reproduced in any form, by mineograph or any other means, without permission in writing from the Indira Gandhi National Open University

بلاک 3 مرکزی رجحان کے پیمانے

MEASURES OF CENTRAL TENDENCY

باب 2 میں آپ نے مواد جمع کرنے کے طریقے اور اشکال، ترسیمات اور تعددی تقسیمات کے ذریعہ مواد کی پیشکشی سے متعلق سیکھا۔ بلاشک و شبہہ یہ طریقے مواد کے ذخیرے کی تلخیص کرتے ہیں، لیکن مواد کو صحیح طور پر سمجھنے کے لیے ہمیں کچھ ایسے پیمانوں کی ضرورت ہوتی ہے جو مواد کی اہم خصوصیات کا زیادہ صحیح طریقہ سے تجزیہ کرنے میں مفید ہوں۔

اس باب میں آپ ایسے پیمانوں کے پہلے سٹ (set) سے متعلق جان کاری حاصل کریں گے، جو پورے مواد کا طائرانہ جائزہ فراہم کرتے ہیں یا مواد کے مخصوص یا مرکزی درمیانی نقطہ پر روشنی ڈالیں گے۔ ایسے پیمانوں کو مرکزی رجحان کے پیمانے یا مقام بندی کے پیمانے (Measures of location) کہا جاتا ہے۔ اس باب میں چار اکائیاں ہیں :

اکائی 10 میں مرکزی رجحان کے معنی کی وضاحت کی گئی ہے، اور مختلف مرکزی رجحانوں کے پیمانوں کی فہرست فراہم کی گئی ہے و نیز سادہ اور وزنی حسابی اوسط کے تصور، ان کو محسوب کرنے کے طریقوں، خاصیتوں، استعمالات اور خامیوں پر بھی بحث کی گئی ہے۔

اکائی 11 وسطانیہ (Median) کے معنی، طریقہ تحسیب (Computation)، اس کی خوبیوں اور خامیوں سے متعلق ہے اس میں ان دیگر تقسیمی قدروں سے متعلق بحث کی گئی ہے جو واقعی مرکزی رجحان کے پیمانے نہیں ہیں لیکن بہ اعتبار تصور بڑی حد تک وسطانیہ سے مشابہہ ہیں۔

اکائی 12 کثیریہ (Mode) کے معنی، طریقہ تحسیب، خوبیوں، استعمالات اور خامیوں سے متعلق ہے۔

اکائی 13 میں ہندسی، ہارمونی اور متحرک اوسطوں کی تشریح کی گئی ہے۔ نیز اس میں یہ بھی بحث کی گئی ہے کہ دی گئی صورت حال میں کس طرح موزوں مرکزی رجحان کے پیمانوں کا انتخاب کیا جائے۔

اکائی 10 مرکزی رجحان کا تصور اور اوسط

UNIT:10 - CONCEPT OF CENTRAL TENDENCY AND MEAN

Structure ساخت

Objectives	مقاصد	10.0
Introduction	تمہید	10.1
Concept of Central Tendency	مرکزی رجحان کا تصور	10.2
Essentials of an Ideal Average	مثالی اوسط کے لوازمات	10.3
Objectives of Averages	اوسطوں کے مقاصد	10.4
Different Measures of Central Tendency	مرکزی رجحان کے مختلف پیمانے	10.5
What is Arithmetic Mean?	حسابی اوسط کیا ہے؟	10.6
Computation of Arithmetic Mean	حسابی اوسط کی تحسیب	10.7
Ungrouped Data	غیر گروہ بند مواد	10.7.1
Grouped Data	گروہ بند مواد	10.7.2
Weighted Arithmetic Mean	وزنی حسابی اوسط	10.8
Computation of Weighted Arithmetic Mean	وزنی حسابی اوسط کی تحسیب	10.8.1
Comparision with Simple Arithmetic Mean	سادہ حسابی اوسط سے تقابل	10.8.2
Uses of Weighted Arithmetic Mean	وزنی حسابی اوسط کے استعمالات	10.8.3
Properties of Arithmetic Mean	حسابی اوسط کی خاصیتیں	10.9
Merits and Limitations of Arithmetic Mean	حسابی اوسط کی خوبیاں اور خامیاں	10.10
Some Illustrations	چند تمثیلات	10.11
Let Us Sum Up	خلاصہ	10.12
Key Words and list of symbols	کلیدی الفاظ اور علامتوں کی فہرست	10.13
Answers to Check Your Progress	اپنی معلومات کی جانچ: جوابات	10.14
Terminal Questions/Exercises	امتحانی سوالات / مشقیں	10.15

10.0 Objectives مقاصد

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:۔

- یہ وضاحت کر سکیں کہ مرکزی رجحان کیا ہے؟
- اوسطوں کی تحسیب کے مقصد کو سمجھ سکیں۔

- مثالی اوسط کی خاصیتوں کا شمار کر سکیں۔
- مختلف قسم کے مواد کے لیے حسابی اوسط اور وزنی حسابی اوسط کی تعریف اور تحسیب کر سکیں۔
- اوسط کی خاصیتوں اور خوبیوں کی تشریح کر سکیں۔
- اوسط کی خامیوں اور استعمالات کو بیان کر سکیں۔

10.1 تمہید Introduction

آپ نے تفصیل سے پڑھا ہے کہ مواد کو کس طرح درجہ بند کر کے جدولوں، اشکال اور ترسیمات کے ذریعہ پیش کیا جاسکتا ہے۔ اگر مواد کی خاصیتوں کو موزوں طریقہ سے سمجھنا ہے تو مواد کی مزید تلخیص اور تجزیہ ضروری ہے۔ اس سمت میں پہلا قدم یہ ہے کہ اوسط یا مرکزی رجحان کو محسوب کیا جائے تاکہ پورے مواد پر ایک طائرانہ نظر ڈالی جاسکے۔

اس اکائی میں آپ اوسط کی تحسیب کے مقصد اور مثالی اوسط کی ضروریات کا مطالعہ کریں گے اور اوسط کے مختلف پیمانوں کی شناخت کریں گے۔ اس کے علاوہ اوسط کے دو پیمانوں یعنی حسابی اوسط اور وزنی حسابی اوسط کے طریقہ تحسیب، ان کی خوبیوں اور خامیوں سے واقف ہو جائیں گے۔

10.2 مرکزی رجحان کا تصور Concept of Central Tendency

تعددی تقسیم کے تجزیہ میں مستعمل مختلف شماریاتی پیمانوں کو ٹھیک طور پر سمجھنے کے لئے یہ نوٹ کرنا ضروری ہے کہ اکثر شماریاتی تقسیمات میں چند خصوصیات مشترک ہوتی ہیں۔ اگر ہم کسی متغیرہ کی کمترین قدر سے بلند ترین قدر کی جانب جائیں تو یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ہر مرحلے پر مدوں (Items) کی تعداد مسلسل بڑھتی جاتی ہے اور اس طرح ہم اعظم ترین قدر تک پہنچتے ہیں، اس کے بعد جیسے جیسے ہم آگے بڑھتے ہیں ان مدات کی تعداد گھٹتی جاتی ہے۔ اس طرز کا مواد عموماً ایک متغیرہ سے دوسرے متغیرہ تک مندرجہ ذیل تین طریقوں میں ایک دوسرے سے مختلف ہوتا ہے۔

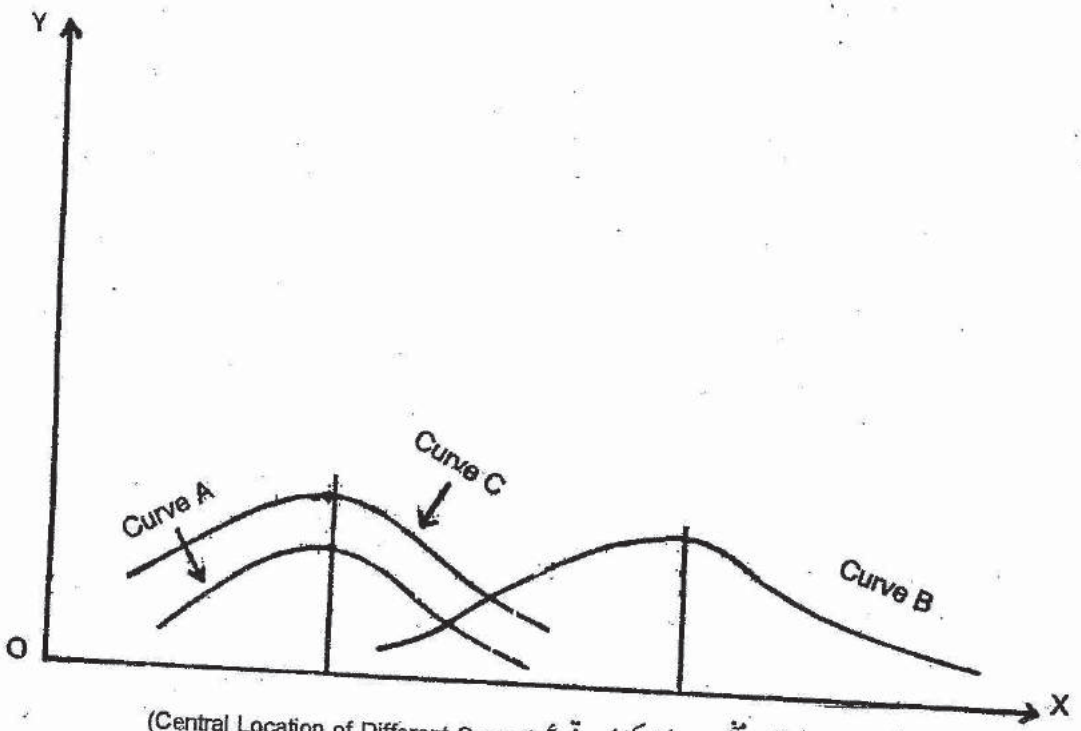
(1) وہ (شماریاتی مواد) متغیروں کی ان قدروں سے مختلف ہو سکتے ہیں جن کے اطراف مدوں کی اکثریت جمع ہوتی ہے (یعنی اوسط Average)۔

(2) وہ (شماریاتی مواد) مدات کے درجہ انتشار کی حد تک مختلف ہو سکتے ہیں (یعنی انتشار Dispersion)

(3) وہ (شماریاتی مواد) چند معیاری تقسیمات (جن کو طبعی نارمل تقسیم کہا جاتا ہے) سے انحراف کی حد تک مختلف ہو سکتے ہیں (یعنی خمیدگی اور حدبیت Skewness and Kurtosis)

چنانچہ مندرجہ بالا تین خصوصیات کے مطالعہ کے لئے تین قسم کے شماریاتی پیمانوں کے مجموعے موجود ہیں۔ فی الحال ہم پہلی قسم کے پیمانوں تک ہی اپنی توجہ مرکوز کریں گے جن کو اوسط یا مرکزی رجحان ناپنے کے پیمانے یا مقام بندی کے پیمانے (Measures of location) کہتے ہیں۔

مواد کی عام طبعی تقسیم کی صورت میں کسی ایسی قدر کی شناخت کر سکتے ہیں جس کے اطراف دوسرے مدوں کا کثیر اجتماع عمل میں آتا ہے۔ یہ وہ قدر ہوتی ہے جو کم و بیش تمام مدوں کے بیچوں بیچ واقع ہوتی ہے۔ اس مثالی مد (ایٹم) کے اس رجحان کو مرکزی رجحان (Central tendency) کہا جاتا ہے اسی سبب اس کو مقام بندی کا پیمانہ (Measure of location) بھی کہتے ہیں جس طرح سے ایک مضمون کا عنوان اس کے مرکزی خیال کی عکاسی کرتا ہے۔ اسی طرح عددی مواد کے مرکزی رجحان سے پورے مواد کے مرکزی خیال کی عکاسی ہوتی ہے شکل 10.1 کو بغور دیکھیے۔ اس میں تین مختلف منحنیوں (Curves) A, B اور C کے مرکزی وقوع کو دکھایا گیا ہے۔ آپ نے غور کیا ہوگا کہ منحنی A اور C کے مرکزی مقامات مساوی ہیں جب کہ منحنی B کا مرکزی مقام A اور C منحنیوں کے مرکزی وقوع سے دائیں جانب واقع ہے۔



شکل 10.1 مختلف منحنیوں کا مرکزی وقوع (Central Location of Different Curves)

10.3 مثالی اوسط کے لوازمات Essentials of An Ideal Average

ممتاز ماہرین شماریات یول اور کینڈال (Yule and Kendall) کے مطابق ایک مثالی اوسط مندرجہ ذیل خصوصیات کا حامل ہوتا ہے :

(1) سمجھنے میں آسان اور تخمیب میں سہل: کسی اوسط کا تعین آسان ہونا چاہیئے اور اس کو محسوب کرنا بھی سہل ہونا چاہیئے۔

(2) بے لوچ تعریف : کسی اوسط کی ریاضیاتی ضابطے (Formula) کے ذریعہ ٹھوس بنیادوں پر تعریف کی جانی چاہیئے تاکہ مختلف اشخاص کی جانب سے محسوب کرنے پر یکساں جواب حاصل ہو اس کا انحصار محسوب کرنے والے کے شخصی میلانات یا طرفداری پر نہیں ہونا چاہیئے۔

(3) مواد کے تمام مدوں پر مبنی ہو : اوسط کے محسوب کرنے میں مواد کا ہر ایک مد شامل کیا جانا چاہیئے۔ ایک مد کو بھی نہیں چھوڑا جانا چاہیئے، ورنہ اوسط کی قدر تبدیل ہو سکتی ہے۔

(4) انتہائی مدوں سے غیر ضروری طور پر متاثر نہیں ہونا چاہیئے : ایک واحد انتہائی قدر یعنی اعظم ترین یا اقل ترین قدر، اوسط کو غیر ضروری طور پر متاثر کر سکتی ہے۔ ایک بہت چھوٹا مد، کسی اوسط کی قدر کو کم کر سکتا ہے، اور بہت بڑا مد اس کی قدر کو بڑی حد تک ابھار سکتا ہے۔ کسی انتہائی مد کے شامل یا خارج ہونے سے اگر اوسط تبدیل ہو رہا ہو، تو یہ مواد کے مجموعہ کا حقیقی نمائندہ نہیں ہو سکتا۔

(5) مزید الجبرائی عمل کے قابل ہونا چاہیئے : اوسط مزید الجبرائی عمل کے قابل ہونا چاہیئے۔ اس سے اس کی افادیت میں اضافہ ہونا چاہیئے۔ مثلاً اگر ہم کو ایک ہی نوعیت والے مواد کے تین مجموعے دیئے جائیں تو ان تینوں کے مشترک اوسط کا تعین ممکن ہونا چاہیئے۔

(6) نمونہ بندی استحکام :اوسط کو مستحکم نمونہ بندی کا حامل ہونا ضروری ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر مجموعے سے مختلف نمونے لے جائیں تو ہر نمونہ کا اوسط دیگر نمونوں کے اوسط کے مساوی ہونا چاہیئے۔

10.4 اوسطوں کے مقاصد Objectives of Averages

آپ نے ایک مثالی اوسط کی خصوصیات کا مطالعہ کیا۔ اب ہم اوسط محسوب کرنے کے اہم مقاصد پر روشنی ڈالیں گے۔ اوسط کے اہم مقاصد مندرجہ ذیل ہیں۔

(1) **ایک قدر واحد کی شناخت جو پورے مواد کی خصوصیات کی حامل ہو :** ایک اوسط کے ذریعہ مواد کے ذخیرے کو ایک واحد نمائندہ قدر میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جس کی وجہ سے تفصیلات میں گئے بغیر مواد کی نمایاں خصوصیات کو سمجھنے میں مدد ملتی ہے۔ ہزاروں یا لاکھوں کے اقدار کو اس طرح سے ایک قدر واحد کے ذریعہ ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی بڑے کارخانے کے ہر مزدور کی ماہانہ اُجرت کو یاد رکھنا تقریباً ناممکن ہے لیکن اگر تمام مزدوروں کی کل اُجرتوں کی بل کو مزدوروں کی تعداد سے تقسیم کر کے اوسط اُجرت حاصل کریں تو ہم یہ جان سکتے ہیں کہ اوسطاً ایک مزدور کی آمدنی کتنی ہے۔

(2) **تقابل کی سہولت:** خام مواد کے دو ضخیم مجموعوں کا تقابل آسان نہیں ہوتا لیکن مواد کے دو ضخیم مجموعوں کا ان کے اوسط سے بآسانی تقابل کیا جاسکتا ہے۔ یہ تقابل کسی مخصوص لمحۂ وقت یا کسی مدت وقت کے لحاظ سے کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر الف اور ب دو کاروباری فرموں کے سال رواں کے دوران فروخت مال کا تقابل خود ان کے سال گزشتہ کی فروخت مال سے، ان دونوں مدتوں کے فروخت کے اوسط کے ذریعہ کیا جاسکتا ہے۔ مواد کے دو مجموعوں کے تقابل کے لئے اوسط کا یکساں پیمانہ، اور طریق تحسیب اختیار کرنا ضروری ہے۔

(3) **شماریاتی استنباط کی سہولت:** آبادی سے متعلق نامعلوم پیمانوں یا پیرامیٹر سے متعلق نتائج اخذ کرنے کے لئے اوسط کا استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ طریقہ عمل شماریاتی استنباط کہلاتا ہے۔ نمونہ سے حاصل شدہ اوسط آبادی کے محسوب کرنے میں معاون ہوتا ہے۔

(4) **فیصلہ سازی میں معاون :** منتظمین (منیجروں) کے لئے فیصلہ سازی میں اوسط نہایت کار آمد ہوتے ہیں۔ عام طور پر پلانٹ کے مصنوعات (جملہ پیداوار)، جملہ فروخت، مجموعی پیداواریت کے اشاریہ، قیمت کے اشاریہ وغیرہ میں منتظمین کو کافی دلچسپی ہوتی ہے اور یہ تمام درحقیقت ایک اوسط کے تعبیری یا اشارتی مفہوم ہیں۔

10.5 مرکزی رجحان کے مختلف پیمانے
Different Measures of Central Tendency

اوسط یا مرکزی رجحان کے مختلف پیمانے مندرجہ ذیل ہیں۔

(1) ریاضیاتی اوسط (Mathematical Averages)
- (i) حسابی اوسط (Arithmetic Mean)
- (ii) ہندسی اوسط (Geometric Mean)
- (iii) ہارمونی اوسط (Harmonic Mean)

یہ سب پیمانے سادہ ہو سکتے ہیں یا وزنی۔ حسابی اوسط کے متعلق آپ اسی اکائی میں آگے چل کر تفصیل کے ساتھ پڑھیں گے۔ ہندسی یا ہارمونی اوسط اکائی 13 میں زیر بحث لائے گیے ہیں۔

(2) مقام بندی کے اوسط (Averages of Postion)
- (i) وسطانیہ (Median)
- (ii) کثیریہ (Mode)

وسطانیہ کے متعلق اکائی 11 اور کثیریہ کے متعلق اکائی 12 میں بحث کی جائے گی۔

(3) مخصوص اواسط (Special Averages)

(i) متحرک اواسط (Moving Averages)

(ii) متزائد اواسط (Progressive Averages)

یہ مخصوص اواسط اکثر کاروبار سے متعلق زمانی سلسلے کے تجزیہ میں استعمال کیے جاتے ہیں۔اکائی 13 میں ہم متحرک اواسط کا تفصیلی مطالعہ کریں گے۔

10.6 حسابی اوسط کیا ہے؟ What is Arithmetic Mean

حسابی اوسط کو ہم عموماً اوسط بھی کہتے ہیں۔یہ مرکزی رجحان کا ایک پیمانہ ہے کیونکہ مواد کے دوسرے اعداد اس کے اطراف جمع ہوتے ہیں۔ کسی دیئے گئے مواد کے مجموعہ میں تمام مشاہدات کی قدروں کی میزان کو جملہ مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کرنے پر حسابی اوسط حاصل ہوتا ہے۔ مختلف مضامین جیسے کامرس، انتظامیہ (مینجمنٹ)، معاشیات، مالیات، پیدائش (Production) وغیرہ میں استعمال ہونے والا یہ شماریاتی پیمانہ ہے۔ حسابی اوسط کو "سادہ حسابی اوسط" بھی کہا جاتا ہے۔

10.7 حسابی اوسط کی تحسیب Computation of Arithmetic Mean

جیسا کہ آپ جانتے ہیں، اکٹھا کیے گیے مواد کو ان کی مماثلت اور مشابہت کے مطابق مختلف جماعتوں یا گروہوں میں درجہ بند کیا جاتا ہے۔ حسابی اوسط کے ذریعہ غیر درجہ بند مواد یا غیر گروہ بند مواد (خام مواد) ، نیز درجہ بند اور گروہ بند مواد کی بھی تحسیب کی جاسکتی ہے۔ لیکن محسوب کرنے کے طریقے مختلف ہیں۔ اب ہم غیر درجہ بند مواد اور درجہ بند مواد کے لئے حسابی اوسط کے محسوب کرنے کے طریقہ پر اپنی توجہ مرکوز کریں گے۔ عموماً حسابی اوسط کو $\bar{X}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے جسے بطور "$\bar{X}$ بار" پڑھا جاتا ہے۔

10.7.1 غیر گروہ بند مواد Ungrouped Data

طریقہ 1 : غیر گروہ بند مواد کی صورت میں حسابی اوسط کا محسوب کرنا بہت آسان ہے یعنی جب تعددی تقسیم نہیں کی جاتی ہو۔ تمام مشاہدات کی قدروں کو جمع کرکے، حاصل جمع کو مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کیجئے۔ اس کو حسب ذیل طریقوں سے سمجھایا جاسکتا ہے اور فارمولے کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n}$$

جہاں پر $\bar{X}$ ، متغیرہ X کا حسابی اوسط ہے اور $X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$ ، متغیرہ X کی مختلف قدریں ہیں اور n مشاہدات کی تعداد ہے۔
سادہ شکل میں اس ضابطے کو مندرجہ ذیل طریقے سے لکھا جاسکتا ہے :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{n}$$

جہاں پر Σ (جس کو سگما پڑھا جاتا ہے) ایک یونانی علامت ہے جو X کی تمام قدروں کے میزان (حاصل جمع) کو ظاہر کرتی ہے۔

تمثیل 1

ایک کرانہ مرچنٹ پانچ قسم کا مال فروخت کرتا ہے۔ ہر قسم کے مال کی فروخت پر منافع فی اکائی مندرجہ ذیل ہے۔ اوسط منافع معلوم کیجئے۔

مال کی پہلی قسم 4 روپے

مال کی دوسری قسم 9 روپے
مال کی تیسری قسم 6 روپے
مال کی چوتھی قسم 2 روپے
مال کی پانچویں قسم 9 روپے

حل

اوسط منافع مندرجہ ذیل طریقہ پر محسوب کیا جاسکتا ہے :

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X_1}{n}$$

$$= \frac{4+9+6+2+9}{5}$$

$$= \frac{30}{5}$$

$$= 6.00 \text{ روپے}$$

طریقے 2 :

جب دیئے گئے مواد میں مشاہدوں کی قدریں بہت بڑی ہوں یا وہ کسور میں ہوں تو یہ طریقہ اختیار کیا جاتا ہے۔ یہ طریقہ اس حقیقت پر مبنی ہے کہ انفرادی مشاہدوں کے سلسلے کے اوسط سے انحرافات کا الجبرائی مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر 8, 14, 16, 12 اور 20 کا حسابی اوسط 14 ہے۔ ان میں سے ہر ایک کا فرق حسابی اوسط سے -6, 0, +2, -2, +6 ہے اور اس کا مجموعہ ہے 0۔ یہ ہمیشہ صحیح ہوتا ہے۔ اس طریقے سے حسابی اوسط معلوم کرنے کے لیے مندرجہ ذیل اقدامات ضروری ہیں۔

(1) کسی بھی اختیاری اوسط (A) کو فرض کرلیں تاکہ اس مفروضہ اوسط سے مدات کے انحرافات کو محسوب کیا جاسکے۔
(2) ہر انفرادی قدر (X) کا مفروضہ اوسط سے انحراف (d) محسوب کیجئے یعنی $d = X - A$۔
(3) سب انحرافات کا مجموعہ (جسے Σd سگما d کہتے ہیں) حاصل کیجئے۔
(4) مندرجہ ذیل فارمولہ استعمال کرکے حسابی اوسط معلوم کیجئے۔

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma d}{n}$$

جہاں پر $\overline{X}$، متغیر X کا حسابی اوسط ہے۔ A مفروضہ حسابی اوسط ہے، Σd مفروضہ حسابی اوسط سے انفرادی قدر کے انحرافات کا مجموعہ ہے اور n مشاہدات کی تعداد ہے۔

تمثیل 2

10 اسکوٹر ڈیلروں (فروشندوں) کی ماہانہ فروخت ذیل میں پیش کی گئی ہے۔ فی ماہ اوسط فروخت معلوم کیجئے۔

اسکوٹر ڈیلر :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
فروخت :	23	8	14	31	6	28	11	27	32	46

حل

حسابی اوسط کا محسوب کرنا

ڈیلر	فروخت (X)	d = X - A
1	23	-2
2	8	-17
3	14	-11
4	31	6
5	6	-19
6	28	3
7	11	-14
8	27	2
9	32	7
10	46	21
n = 10		Σ d = -24

مفروضہ اوسط A = 25 ، Σd = -24 ، n = 10

$$X = A + \frac{\Sigma d}{n} = 25 + \frac{-24}{10}$$

$$= 25 - 2.4 = 22.6 \qquad \bar{x} = 22.6$$

فروخت شدہ اسکوٹروں کی اوسط تعداد = 22.6

10.7.2 گروہ بند مواد Grouped Data

جیسا کہ اکائی 6 میں مطالعہ کیا گیا ہے، متغیروں کو غیر مسلسل اور مسلسل متغیروں میں درجہ بند کیا جا سکتا ہے۔ مسلسل متغیرہ کے لیے تیار شدہ تعددی تقسیم کو غیر مسلسل تقسیم اور مسلسل متغیرہ کے لیے تیار شدہ تعددی تقسیم کو مسلسل تقسیم کہا جاتا ہے۔ ان دونوں قسم کی تقسیمات کے لیے، حسابی اوسط معلوم کرنے کے طریقے الگ الگ ہیں۔ اب ان طریقوں کا مطالعہ کیا جائے گا۔

غیر مسلسل متغیرہ کے لیے حسابی اوسط Arithmetic Mean for Discrete Series

طریقہ 1 : اس طریقے کے تحت گروہ بند مواد کے لیے مندرجہ ذیل فارمولہ، استعمال کر کے حسابی اوسط معلوم کیا جائیگا۔

$$\bar{X} = \frac{f_1 X_1 + f_x X_2 + \ldots\ldots\ldots f_n X_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

جہاں پر X_1 ، X_2 ، X_3 وغیرہ جماعت 1, 2, 3 وغیرہ میں بالترتیب متغیروں کی قدروں کو ظاہر کرتے ہیں۔ اسی طرح سے f_1 ' f_2 ' f_3 وغیرہ جماعت 1 ' 2 ' 3 ..... وغیرہ کا بالترتیب تعدد ہیں۔ یہاں پر $f_1 X_1$ کا مطلب ہوتا ہے پہلی جماعت کے تعدد (f_1) اور اس جماعت

کے متغیرہ کی قدر x_1 کا حاصل ضرب۔اسی طرح سے $f_1 x_1, f_2 x_2, f_3 x_3 \ldots\ldots f_n x_n$، Σf تا f_n کا حاصل جمع ہے۔

طریقہ **2** : جب دی گئی تعددی تقسیم میں جماعتوں کی تعداد کثیر ہو تو اس طریقہ کو ترجیح دی جاتی ہے۔اس میں وہی طریقہ کار اختیار کیا جاتا ہے جو غیر گروہ بند طریقہ میں بیان کیا گیا ہے۔اس کے تحت مندرجہ ذیل طرز عمل اختیار کیا جاتا ہے۔

(a) ایک مفروضہ حسابی اوسط A لیجیے۔

(b) مفروضہ حسابی اوسط سے متغیرہ x کا فرق $(d = X-A)$ معلوم کیجیے۔کوئی بھی قدر بطور مفروضہ حسابی اوسط لی جاسکتی ہے لیکن دی گئی تقسیم کے بیچوں بیچ واقع جماعت میں سے متغیرہ x کی قدر کا انتخاب کرنا چاہیے۔

(c) Σfd معلوم کیجیے جو انحرافات (d) سے متعلقہ جماعت کی تعددوں (f) سے ضرب دے کر جمع کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

(d) Σfd اور Σf کی نسبت معلوم کرو یعنی $\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$ جسے اصلاحی عامل ضربی (Correction factor) بھی کہتے ہیں۔

(e) مفروضہ حسابی اوسط اور اصلاحی عامل ضربی کو جمع کرنے سے $\overline{X}$ حاصل ہوتا ہے۔

اس طریقہ کے تحت حسابی اوسط محسوب کرنے کا فارمولہ حسب ذیل ہے :۔

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma n} \quad \text{یا} \quad \overline{X} = A + \frac{\Sigma fd}{n}$$

جہاں پر A مفروضہ حسابی اوسط ہے۔

Σf ، مدات کی کل تعداد ہے جس کو 'n' سے بھی تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

Σfd ، انحرافات $(d = x-A)$ اور متعلقہ جماعت کے تعددوں کے حاصل ضرب کا مجموعہ ہے۔

اب ہم ایک تمثیل کے ذریعہ ان دو طریقوں سے حسابی اوسط معلوم کرنے سے متعلق معلومات حاصل کریں گے۔

تمثیل 3

مندرجہ ذیل مواد کے لیے دونوں طریقوں کے استعمال سے حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

نشانات :	10	20	30	40	50	60	70	80
طلبہ کی تعداد :	8	21	23	17	15	9	5	2

حل

حسابی اوسط کو محسوب کرنا

نشانات (x)	طلبہ کی تعداد (f)	$d = x - 40$	fd	fx
10	8	-30	-240	80
20	21	-20	-420	420
30	23	-10	-230	690
40	17	0	0	680
50	15	10	150	750
60	9	20	180	540
70	5	30	150	350
80	2	40	80	160
جملہ	$\Sigma f = 100$		$\Sigma fd = 300$	$\Sigma fx = 3,670$

اس صورت میں جبکہ مفروضہ حسابی اوسط (A) 40 ہے۔

طریقہ 1

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$$= \frac{3,670}{100} = 36.70$$

طریقہ 2

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$$= 40 + \frac{-330}{100}$$

$$= 40 - 3.30$$

$$= 36.70$$

مسلسل سلسلے کے لیے حسابی اوسط Arithmetic Mean for Continuous Series

مسلسل سلسلے (یعنی جب مواد کو جماعتی وقفوں کے مطابق درجہ بند کیا جاتا ہے) کے لیے حسابی اوسط مندرجہ ذیل طریقوں سے محسوب کیا جاسکتا ہے۔

طریقہ 1 : جیسا کہ آپ جانتے ہیں حسابی اوسط محسوب کرنے کے لیے تمام مدات کی جملہ قدروں کی ضرورت ہوتی ہے جب مواد کو جماعتی وقفوں کے مطابق درجہ بند کیا جاتا ہے تو آپ تمام مدات کی قدریں نہیں جانتے۔ آپ صرف یہ جانتے ہیں کہ مختلف گروپوں میں شامل مدات، متعلقہ جماعتی وقفوں پر پھیلے ہوئے ہیں۔ اس لیے، کل قدر معلوم کرنے کے لیے آپ فرض کرتے ہیں کہ کسی جماعت کے مدات اس گروہ میں یکساں طور پر پھیلے ہوئے ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ حسابی اغراض کے لیے آپ فرض کر سکتے ہیں کہ کسی گروہ میں شامل مدات کی قدر اس گروہ کے وسطی نقطہ کی قدر کے مساوی ہے۔ مسلسل سلسلے کی صورت میں، مختلف جماعتی وقفوں کے وسطی نقطے معلوم کیے جاتے ہیں اور جماعتی وقفوں کو ان سے بدل دیا جاتا ہے۔ ایک مرتبہ ایسا کرنے کے بعد مسلسل سلسلے اور غیر مسلسل سلسلے میں کوئی فرق نہیں رہ جاتا۔ اس مرحلے کے بعد حسابی اوسط کو محسوب کرنے کے لیے غیر مسلسل سلسلہ میں استعمال شدہ طریقہ کو یہاں پر بھی اختیار کیا جاتا ہے۔ غیر مسلسل سلسلہ میں استعمال شدہ دونوں طریقے یہاں پر بھی استعمال کیے جاسکتے ہیں۔ یہ طریقے، بہر حال، داخلی جماعتی وقفوں اور خارجی جماعتی وقفوں، دونوں کے لیے یکساں ہوتے ہیں۔

اس طریقے کے تحت حسابی اوسط کو مندرجہ ذیل فارمولے سے محسوب کیا جاسکتا ہے۔

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fm}{\Sigma f} \quad \text{یا} \quad \bar{X} = \frac{\Sigma m}{n}$$

جہاں پر 'm' کسی جماعت کی وسطی قدر ہے۔ پہلے ہر جماعتی وقفے کی وسطی قدر اور متعلقہ تعدد کا حاصل ضرب معلوم کیجیے اور ان کو جمع کر کے Σfm حاصل کیجیے۔ اس حاصل کو تعددوں کے حاصل جمع سے Σf تقسیم کیجیے۔

طریقہ 2 : غیر مسلسل سلسلہ میں استعمال شدہ ضابطہ یہاں پر بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔ جس میں 'd' معلوم کرنے میں تھوڑی تبدیلی کرنی پڑتی ہے۔ یہاں پر مفروضہ حسابی اوسط سے وسطی قدروں کا انحراف معلوم کرنا پڑتا ہے (یعنی d = m-A)۔

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} \quad \text{یا} \quad \bar{X} = A + \frac{\Sigma fd}{n}$$

اختصاری انحراف طریقہ Step Deviation Method : اگر مفروضہ حسابی اوسط سے انحرافات میں کوئی مشترکہ جزو ضربی موجود ہو تو انحرافات کو مشترکہ جزو ضربی 'c' سے تقسیم کر کے انحرافات کے سائز میں کمی کی جاسکتی ہے۔ ان نئے اختصاری انحرافات کو 'd' سے تعبیر کر سکتے ہیں یعنی $d^1 = (m-A)/c$ تب حسابی اوسط کو مندرجہ ذیل طریقے سے محسوب کر سکتے ہیں۔

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd^1}{\Sigma f} \times c \quad \text{یا} \quad \bar{X} = A + \frac{\Sigma fd^1}{n} \times c$$

نوٹ : اگر تمام جماعتی وقفے مساوی ہوں، تو جماعتی وقفہ مشترکہ عامل ضربی (Common factor) ہوتا ہے۔

تمثیل 4

کسی کمپنی کے 50 سیلز من (فروخت کنندوں) کی ہفتہ واری فروخت حسب ذیل ہے۔ اختصاری انحراف طریقے سے حسابی اوسط معلوم کیجئے۔

جملہ فروخت (000' روپے) :	0 - 5	5 - 10	10 - 25	25 - 50
سیلز مینوں کی تعداد :	3	6	25	10

حل

حسابی اوسط کی تحسیب

فی ہفتہ فروخت 000' روپے	سیلز من کی تعداد (f)	وسطی نقطہ $p^1(m)$	انحرافات (m-17.5)	اختصاری انحراف $d^1=m-17.5/5$	fd^1
0 - 5	3	2.5	-15	-3	-9
5 - 10	12	7.5	-10	-2	-24
10 - 25	25	17.5	0	0	0
25 - 50	10	37.5	20	4	40
جملہ	$\Sigma f = 50$				$\Sigma fd^1=7$

"انحراف" کے کالم سے یہ واضح ہے کہ یہاں پر مفروضہ حسابی اوسط (A) 17.5 ہے اور مشترکہ عامل ضربی 5 ہے۔

اب

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd^1}{n} \times C$$

$$= 17.5 + \frac{7}{50} \times 5$$

$$= 17.5 + 0.7$$

$$= 18.2$$

فروخت کا حسابی اوسط ہے 18.2 ہزار روپے فی ہفتہ

تمثیل 5

یامٹو مشین کمپنی کے ملازمین کے مصروف کار اوسط گھنٹوں کی تعداد معلوم کیجئے جب کہ مندرجہ ذیل مواد دیا گیا ہے:۔

مصروف کار گھنٹے (کام کے گھنٹوں میں)	ملازمین کی تعداد
36.0 - 37.8	6
37.8 - 39.6	7
39.6 - 41.4	24
41.4 - 43.2	7
43.2 - 45.0	2
45.0 - 46.8	4
جملہ	50

حل :

سب سے پہلے تمام جماعتوں کی وسطی قدروں (m) کو معلوم کیجئے اور مفروضہ حسابی اوسط 'A' (یعنی 42.3) سے انحرافات معلوم کیجئے۔ مشترک عامل ضربی 'c' 1.8 ہے جو مختلف گروہوں کے جماعتی وقفے کے مساوی ہے۔

حسابی اوسط کا محسوب کرنا

مصروف کار گھنٹے	m	f	$m - A$ $(m - 42.3)$	$d^1 = (m-A)/C$ $\left(d = \frac{m-42.3}{1.8}\right)$	fd_1
36.0 - 37.8	36.9	6	-5.4	-3	-18
37.8 - 39.6	38.7	7	-3.6	-2	-14
39.6 - 41.4	40.5	24	-1.8	-1	-24
41.4 - 43.2	42.3	7	0	0	0
43.2 - 45.0	44.1	2	+ 18	1	2
45.0 - 46.8	45.9	4	+3.6	2	8
	$M=\Sigma f=50$				$\Sigma fd^1=-46$

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd^1}{n} \times C$$

$$= 42.3 + \frac{(-46)}{50} \times 1.8$$

$$= 42.3 + (-0.92) \times 1.8$$

$$= 42.3 - 1.656$$

$$= 40.644$$

مصروف کار گھنٹوں کا حسابی اوسط 40.6 گھنٹے ہے۔

آپ غور کر سکتے ہیں کہ جب جماعتی وقفے مساوی ہوتے ہیں، d^1 کی قدریں ہوتی ہیں 3, 2, 1 ..... اور 1-, 2-, 3- ..... وغیرہ۔ لیکن جب جماعتی وقفے مساوی نہیں ہوتے d^1 کی قدروں کا ترتیب وار اعداد ہونا ضروری نہیں۔ ایسی صورت میں ضروری ہے کہ کالم m - A بنایا جائے، اور اس کو 'C' سے تقسیم کیا جائے۔ بہر حال جب جماعتی وقفے مساوی ہوں تو کالم m - A لکھنے سے احتراز کیا جاسکتا ہے اور d^1 کی قدریں راست طور پر لکھی جاسکتی ہیں۔

اپنی معلومات کی جانچ A

(1) قوس میں دیئے گئے موزوں الفاظ سے خالی جگہوں کو پر کیجئے۔

(i) ایک اوسط، پورے مواد کا ..... پیش کرتا ہے۔ (طائرانہ منظر / تصویر)

(ii) ایک اوسط، مواد کی اہم خصوصیات کا خلاصہ پیش کرتا ہے، اس لیے اس کو ..... کا پیمانہ بھی کہتے ہیں۔ (مرکزی رجحان / تلخیص)

(iii) ایک مثالی اوسط کو غیر ضروری طور پر ..... مدات سے متاثر نہیں ہونا چاہیئے۔ (وسطی / انتہائی)

(iv) اوسط، تقابل میں ..... ہوتا ہے۔ (سہولت بخش / مددگار نہیں)

(v) نمونہ قدروں کی بنیاد پر مجموعوں کے نامعلوم پیرامیٹرس / تبدیلیات کو محسوب کرنے کا عمل شماریاتی ..... کہلاتا ہے۔ (مطالعہ / استنباط)

(2) تحریر کیجئے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) جب پورا مواد دستیاب ہو تو مرکزی رجحان محسوب کرنا ضروری نہیں کیونکہ یہ اس سے زیادہ کوئی اور چیز نہیں پیش کرے گا جو مواد میں موجود ہے۔

(ii) حسابی اوسط، مقام بندی کا اوسط ہے۔

(iii) حسابی اوسط معلوم کرنے کے اختصاری انحراف طریقے میں؛ 'C' ہمیشہ جماعتی وقفہ کی تعبیر کرتا ہے۔

(iv) حسابی اوسط محسوب کرتے وقت، پورے مدات کی قدروں کو شمار کیا جاتا ہے۔

(v) دیئے گئے مواد کیلئے، اگر اوسط کو مختلف طریقوں سے معلوم کیا جائے تو مختلف نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

(3) (i) کسی مفروضہ حسابی اوسط 12 سے لیے گیے 6 مدات کے انحرافات کا مجموعہ اگر 6- ہے تو ان کا اوسط معلوم کیجئے؟

.....

.....

.....

.....

.....

(ii) کسی مسلسل سلسلے کے گروہ بند مواد سے حسابی اوسط محسوب کرنے میں استعمال ہونے والے طریقوں کے لیے ضابطے (فارمولے) لکھیئے۔

.....

.....

.....

.....

.....

(iii) جہاں کہیں ممکن ہو، اختصاری انحراف طریقے کو ترجیح دی جائے، کیوں؟

.....

.....

.....

.....

(iv) دیئے گئے مواد کے لیے اگر $\bar{X} = 33, \Sigma fd^1 = -20, \Sigma f = 100$ and $C = 100$ تو مفروضہ حسابی اوسط A معلوم کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

(v) گروہ بند مواد سے اوسط محسوب کرتے وقت اہم مفروضہ کیا ہوتا ہے؟

.....

.....

.....

.....

(4) کسی شہر میں 12 خاندانوں کی ماہانہ آمدنی مندرجہ ذیل ہے۔ حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

خاندان:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ماہانہ آمدنی:	280	180	96	98	104	75	80	84	100	75	600	200

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(5) مسلسل 12 ماہ کے دوران کسی مشین کے آپریٹر کی تیار کردہ اشیا میں مسترد اشیا (Rejected pieces) کی تعداد حسب ذیل ہے۔

82, 74, 65, 67, 62, 73, 68, 63, 65, 62, 69 and 66۔

(i) مسترد اشیا کی اوسط تعداد کیا تھی؟

.....

.....

.....

(ii) اس اوسط سے انحرافات کا حاصل جمع کیا ہے؟

.....

.....

.....

(6) متبادل طریقوں کو استعمال کر کے مندرجہ ذیل کے لیے حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

مزدوروں کی ہفتہ واری اجرت (روپے)	مزدوروں کی تعداد
100 - 105	200
105 - 110	210
110 - 115	230
115 - 120	320
120 - 125	350
125 - 130	320
130 - 135	410
135 - 140	320
140 - 145	280
145 - 150	210
150 - 155	160
155 - 160	90

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(7) اختصاری انحراف (Step-deviation method) کے طریقے سے مندرجہ ذیل تقسیم کے لیے حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

جماعتی وقفہ :	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75
تعدد :	4	11	19	14	0	2

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10.8 وزنی حسابی اوسط Weighted Arithmetic Mean

آپ نے مختلف قسم کے مواد کے مجموعوں کے لیے حسابی اوسط معلوم کرنے کے مختلف طریقوں کے متعلق معلومات حاصل کیں۔ان سب طریقوں میں ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ مواد کے مجموعوں میں ہر ایک مد کی مساوی اہمیت ہوتی ہے۔لیکن ہمیشہ اس کا صحیح ہونا ضروری نہیں۔ عملاً کسی ایک مد کو دوسرے پر سبقت حاصل ہو سکتی ہے۔مثال کے طور پر، کسی خاص جماعت کے لیے زندگی کے اشاریہ کی لاگت معلوم کرتے وقت، ان کے صرف میں آنے والے اجناس متغیر اہمیت کے حامل ہوتے ہیں۔ایسے اجناس کی قیمتوں کا سادہ حسابی اوسط ان کے طرز زندگی کی صحیح عکاسی نہیں کرتا۔ مختلف اجناس کے لئے وزن مقرر کرنا پڑتا ہے' اور ایسی صورتوں میں وزنی حسابی اوسط محسوب کرنا پڑتا ہے۔کسی کارخانے میں، جہاں پر صناعی کی اکائی لاگت کا تعین کرنا پڑتا ہے' وزنی اوسط بہت موزوں ہوتا ہے۔

10.8.1 وزنی حسابی اوسط کی تحسیب Computing of Weighted Arithmetic Mean

وزنی حسابی اوسط معلوم کرنے کے لئے، متغیرہ x کی مختلف قدروں (یعنی $x_1 , x_2 , ... , x_n$) کے لئے بالترتیب مختلف اوزان (یعنی $w_1, w_2 .... w_n$) مقرر کرنا پڑتا ہے۔ان مدات کو ان کے متعلقہ اوزان سے ضرب دیا جاتا ہے۔اوزان کے حاصل ضربوں کو جمع کر کے حاصل جمع (Σwx) حاصل کی جاتی ہے۔اس کو اوزان کے حاصل جمع (Σw) سے تقسیم کیا جاتا ہے اور نتیجہ کے بطور حاصلِ تقسیم عدد وزنی حسابی اوسط ہوتا ہے۔

وزنی حسابی اوسط معلوم کرنے میں سب سے بڑی مشکل ہے اوزان کا انتخاب۔اوزان تو حقیقی ہوتے ہیں یا تخمینی۔اگر حقیقی اوزان دستیاب ہوں تو انہیں استعمال کیا جانا چاہیئے۔اگر یہ دستیاب نہ ہوں تو صورتحال کے مطابق، اختیاری اوزان (Arbitrary weights) مقرر کرنا چاہیئے۔

تمثیل 6

تین اجناس یعنی A ' B اور C کی قیمتیں بالترتیب 40% , 60% اور 90% سے اضافہ ہوئیں۔ جنس A ، جنس C سے 6 گنا زیادہ اہم ہے اور جنس B جنس C تین گنا زیادہ اہم ہے۔ان تین اجناس کی قیمتوں کا اوسط اضافہ معلوم کیجیے۔

حل

چونکہ قیمتوں میں اوسط اضافہ معلوم کرنا ہے، قیمتوں میں اضافوں کو x سے تعبیر کیا جائے گا۔ A : B : C کی اضافی اہمیت ہوگی 6 : 3 : 1 لہذا ان اعداد کو بطور وزن 'w' لیا جائے گا۔

جنس	قیمتوں میں فیصد اضافہ (x)	وزن (w)	wx
A	40	6	240
B	60	3	180
C	90	1	90
جملہ		$\Sigma w = 10$	$\Sigma wx = 510$

وزنی حسابی اوسط $= \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$

$= \frac{510}{10}$

$= 51\%$

قیمتوں میں اوسط اضافہ 51% ہے۔

یہ نوٹ کیا جاسکتا ہے کہ محسوب کرنے کی غرض سے، مدات کے اوزان کو مدات کے تعدادوں کے طور پر استعمال کیا گیا ہے۔ اوزان در حقیقت تعدادات نہیں ہوتے۔ تعدد کا مطلب ہے کہ ایک عدد کتنی دفعہ مواد میں بہ تکرار ظاہر ہوتا ہے جب کہ اوزان سے مختلف مدات کی صرف اضافی اہمیت ظاہر ہوتی ہے۔ مدات در حقیقت صرف ایک مرتبہ مواد میں ظاہر ہوتے ہیں۔

وزنی حسابی اوسط کو وزنی اوسط بھی کہا جاتا ہے۔ جیسا کہ سابق میں تذکرہ کیا گیا ہے، شماریات میں لفظ 'اوسط' دوسرے مرکزی رجحان کے پیمانوں جیسے ہندسی اوسط، ہارمونی اوسط وغیرہ کے لیے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ اس لیے وسیع معنوں میں وزنی اوسط میں وزنی ہندسی اوسط اور وزنی ہارمونی اوسط بھی شامل ہوتے ہیں (ان سے متعلق تفصیل اکائی 13 میں آپ پڑھیں گے)

10.8.2 سادہ حسابی اوسط سے تقابل Comparison with Simple Arithmetic Mean

وزنی حسابی اوسط، حسابی اوسط سے مختلف ہوتا ہے کیونکہ اول الذکر میں اوزان استعمال کئے جاتے ہیں۔ وزنی حسابی اوسط اور سادہ حسابی اوسط میں مندرجہ ذیل روابط ہیں۔

(1) اگر تمام مدات کو مساوی وزن دیا جائے تو وزنی اوسط، حسابی اوسط کے مساوی ہو جائے گا۔

(2) اگر بڑے مدات کو بڑا وزن اور چھوٹے مدات کو چھوٹا وزن دیا جائے تو وزنی اوسط، سادہ اوسط سے بڑا ہو گا۔

(3) اگر بڑے مدات کو چھوٹا وزن اور چھوٹے مدات کو بڑا وزن دیا جائے تو وزنی اوسط، سادہ اوسط سے کم ہو گا۔

تمثیل 7

ان باہمی روابط کو سمجھنے کے لئے، اب ہم کچھ تمثیلیں لیں گے۔ تمثیل 6 کو لیجئے اور مندرجہ ذیل اوزان کے دو مجموعوں کو لے کر قیمت میں اوسط اضافے کو معلوم کریں گے۔

A : B : C	بطور	1 : 3 : 6	w_1	(سٹ نمبر 1)
A : B : C	بطور	10 : 10 : 10	w_2	(سٹ نمبر 2)

حل

وزنی حسابی اوسط کی تخمیب

جنس	% اضافہ	سٹ 1		سٹ 2	
	x	w_1	xw_1	w_2	xw_2
A	40	1	40	10	400
B	60	3	180	10	600
C	90	6	540	10	900
جملہ	$\Sigma x=190$	$\Sigma w_1=10$	$\Sigma xw_1=760$	$\Sigma w_2=30$	$\Sigma xw_2=1900$

(1) سٹ 1 کے لئے وزنی حسابی اوسط $= \frac{\Sigma x w_1}{\Sigma w_1} = \frac{760}{10} = 76\%$

(2) سٹ 2 کے لئے وزنی حسابی اوسط $= \frac{\Sigma x w_2}{\Sigma w_2} = \frac{1900}{30} = 63.3\%$

(3) سادہ حسابی اوسط $= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{190}{3} = 63.3\%$

اگر نتائج کا محتاط تقابل کیا جائے تو مندرجہ ذیل نکات پر روشنی پڑتی ہے۔

(i) اوزان کے سٹ 2 کے تحت، تمام اجناس کو مساوی اوزان دیئے گئے ہیں۔ یہاں پر وزنی حسابی اوسط (63.3) سادہ حسابی اوسط (63.3) کے مساوی ہے۔

(ii) اوزان کے سٹ 1 کے تحت، بڑی قدر 90 کو بڑا وزن 6 اور چھوٹی قدر 40 کو چھوٹا وزن 1 دیا گیا ہے۔ یہاں پر وزنی حسابی اوسط (76) سادہ حسابی اوسط (63.3) سے زیادہ ہے۔

(iii) اوزان کے اصل سٹ کے تحت (دیکھیے تمثیل 6) بڑی قدر 90 کو چھوٹا وزن 1 اور چھوٹی قدر 40 کو بڑا وزن 6 دیا گیا تھا۔ اس صورت میں، وزنی حسابی اوسط (51)، سادہ اوسط (63.3) سے کم تر تھا۔

وزنی اوسط کی یہ تینوں خاصیتوں سے (چونکہ یہ ہر قسم کے وزنی اواسط کے لیے صحیح ہیں) مندرجہ ذیل اہم حقیقت کا انکشاف ہوتا ہے۔ وزنی حسابی اوسط نہ صرف مدات کا حسابی اوسط ہے بلکہ یہ دو اشیاء کے اوسط کو بھی پیش کرتا ہے: (i) مدات کا اوسط اور (ii) کس طرح وزن دینے کے طرز سے مدات متاثر ہوتے ہیں۔ لہذا جب مدات کی اہمیت یکساں نہ ہو تو، موزوں اوسط معلوم کرنے کے لئے وزنی اوسط کا محسوب کرنا ضروری ہو جاتا ہے۔

10.8.3 وزنی حسابی اوسط کے استعمالات Uses of Weighted Arithmetic Mean

وزنی حسابی اوسط مندرجہ ذیل صورتوں میں نہایت کار آمد ہے:

(1) جب کہ دیئے گئے مدوں کی اہمیت یکساں نہ ہو۔

(2) فیصدوں کو متوسط کرنے کے عمل میں جبکہ ان کو محسوب کرتے وقت نسب نما میں مختلف مدات کے مختلف اعداد کو لیا گیا ہو۔

(3) جبکہ مختلف شماریاتی پیمانوں جیسے مختلف گروپوں کے اوسط وغیرہ کا اتحاد مطلوب ہو۔

وزنی حسابی اوسط کو بالخصوص مندرجہ ذیل صورتوں میں استعمال کیا جاتا ہے:

(1) اشاریہ اعداد کی تشکیل کے لیے۔

(2) معیاری شرح پیدائش و اموات کی تحسیب کے لیے۔

(3) فی مشین اوسط پیداوار معلوم کرنے کے لیے جب کہ مشینوں کی پیداآواری صلاحیت مختلف ہو۔

(4) کسی کارخانے کے ہنر مند، نیم ہنر مند اور غیر ہنر مند کاریگروں کی اوسط اجرتوں کا تعین کرنے کے لئے۔

10.9 حسابی اوسط کی خاصیتیں Properties of Arithmetic Mean

آپ نے حسابی اوسط کے معنی اور تحسیب کرنے کے طریقوں کو سیکھا۔ آپ نے یہ بھی سیکھا کہ وزنی حسابی اوسط، سادہ حسابی اوسط سے مختلف ہوتا ہے۔ اب ہم حسابی اوسط کی کچھ اہم خصوصیات کا مطالعہ کریں گے۔

(1) حسابی اوسط سے انفرادی مدات کے انحرافات کا حاصل جمع ہمیشہ صفر ہوتا ہے یعنی $\Sigma(x - \bar{x}) = 0$ ۔ مندرجہ ذیل تمثیل سے اس کی تشریح ہوتی ہے۔

x	$(x - \bar{x})$
5	-1
6	0
7	1
9	3
3	-3
30	$\Sigma(x - x) = 0$

$$\bar{X} = \Sigma x / n$$
$$= 30/5$$
$$= 6$$

اس تمثیل کے ذریعہ آپ یہ نتیجہ بھی اخذ کر سکتے ہیں کہ حسابی اوسط سے مثبت انحرافات کا حاصل جمع منفی انحرافات کے حاصل جمع کے مساوی ہوتا ہے۔ اسی مناسبت سے، حسابی اوسط کو مرکز ثقل (Centre of gravity) بھی کہتے ہیں۔ یہ اصول جمائی وقفوں کے ساتھ یا ان کے بغیر ہر قسم کے مواد کے لئے صحیح ہے۔

(2) حسابی اوسط سے انحرافات کے مربعوں کا حاصل جمع اقل ترین ہوتا ہے یعنی کسی اور قدر سے مدات کیے گیے تحریفات کے مربعوں کا حاصل جمع ہمیشہ کم تر ہوتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں $\Sigma(x - \bar{x})^2$ ہمیشہ اقل ترین ہوتی ہے۔ مندرجہ ذیل تمثیل سے اس کی وضاحت ہوتی ہے۔

حسابی اوسط سے لیے گیے انحرافات کا مربع $\bar{x} = 6$			کسی اور قدر جیسے 5 سے لیے گیے انحرافات کا مربع		
x	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$	x	$(x - 5)$	$(x - 5)^2$
5	-1	1	5	0	0
6	0	0	6	1	1
7	1	1	7	2	4
9	3	9	9	4	16
3	-3	9	3	-2	4
		20			25

یہ واضح ہے کہ $\Sigma(x - \bar{x})^2 < \Sigma(x - 5)^2$

(3) اگر مدوں کی تعداد اور حسابی اوسط معلوم ہو تو مدات کا حاصل جمع، مدوں کی تعداد کو حسابی اوسط سے ضرب دے کر معلوم کیا جاسکتا ہے یعنی $\Sigma x = nx$، جہاں پر n مدوں کی تعداد ہے۔

یہ خاصیت بہت عملی اہمیت کی حامل ہے۔ مثال کے طور پر، اگر ہم کو کسی فیکٹری کے مزدوروں کی تعداد معلوم ہو جیسے 100 اور ماہانہ اوسط اجرت 400 ہے تو ہم کل ماہانہ اجرت کی بل (Bill) آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں یعنی 400 روپے × 100 = 40,000 روپے۔

(4) اگر ہم کسی ایسے مشاہدے کا اضافہ کریں یا حذف کریں جس کی قدر حسابی اوسط کے برابر ہے تو حسابی اوسط غیر متاثر رہتا ہے۔

(5) اگر متغیرہ x کی ہر قدر میں کسی مستقل مقدار C کا اضافہ یا کمی ہو تو حسابی اوسط میں بھی اسی مقدار مستقل کے مساوی اضافہ یا کمی ہو گی۔ اس طرح متغیرہ x کی قدروں کو کسی مقدار مستقل K سے ضرب دیا جائے تو حسابی اوسط بھی اس مقدار مستقل سے ضرب کھاتا ہے۔

مثال کے طور پر، پچھلی تمثیل کو لیجیے اور ہر مشاہدے میں 2 جمع کریں اور ہر ایک کو 3 سے ضرب دیں تو نیا حسابی اوسط ہو گا : (اصل حسابی اوسط 2+) 3 x (2 + 6) = 3 x 8 = 24 ۔ اب ہم اس کی جانچ اور تصدیق کریں گے۔

x	x + 2	3 (x + 2)
5	7	21
6	8	24
7	9	27
9	11	33
3	5	15
30	40	120

x کا حسابی اوسط = 30/5 = 6

x+2 کا حسابی اوسط = 40/5 = 8 = 6 + 2 یعنی قدیم سابقہ اوسط + 2

3(x+2) کا حسابی اوسط = 120/5 = 24 یا 3 x 8 یا 3 x (6 + 2) یعنی (سابقہ اوسط +2)x 3

(6) اگر ہم دو یا دو سے زیادہ مربوط گروہوں کے حسابی اوسط اور مدات کی تعداد رکھتے ہوں تو ان گروہوں کا مخلوط حسابی اوسط حسب ذیل ہو گا۔

$$\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 - n_1\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

جہاں پر x_1 اور x_2 بالترتیب گروہ 1 اور 2 کے حسابی اوسط اور n_1 ' n_2 گروہ 1 اور 2 میں مدات کی تعداد ہے۔

مثال کے طور پر، جنوری تا اگست کے دوران کسی جنس کی اوسط پیداوار (Production) 400 ٹن فی ماہ اور ستمبر تا دسمبر پروڈکشن 430 ٹن فی ماہ ہے۔ اب ہم پورے سال کی اوسط پیداوار کو اس طرح محسوب کر سکتے ہیں:۔

$\bar{x}_1 = 400$

$\bar{x}_2 = 430$

$n_1 = 8$ (جنوری تا اگست - 8 ماہ)

$n_2 = 4$ (ستمبر تا دسمبر - 4 ماہ)

$$\bar{x}c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$ پورے سال کے لیے اوسط

$$= \frac{8 \times 400 + 4 + 430}{8 + 4}$$

$$= \frac{4920}{12}$$

= 410 ٹن فی ماہ

اس فارمولے کے پیچھے حسب ذیل منطق کارفرما ہے۔

پہلے گروہ میں شامل مدات کی کل قدر ہے $n_1 x_1$ اور دوسرے گروہ کی $n_2 x_2$ ۔ اس طرح سے $(n_1x_1 + n_2x_2)$ دونوں گروہوں میں شامل مدوں کی جملہ قدر ہے۔ بہ الفاظ دیگر، اجتماعی حسابی اوسط مختلف گروہوں کا وزنی حسابی اوسط ہے جہاں پر ہر گروہ کے مدوں کی تعداد ان کے اوزان ہوتے ہیں۔

اپنی معلومات کی جانچ B

(1) وزنی اور سادہ حسابی اوسط کے درمیان فرق کیجئے۔

.....

.....

.....

.....

.....

(2) مندرجہ ذیل مواد سے قیمتوں کا سادہ اور وزنی حسابی اوسط محسوب کیجئے اور دونوں کے درمیان فرق کی وجوہات بیان کیجیے۔

فی ٹن قیمت (روپے)	:	45.60	40.70	42.45
خرید شدہ ٹن (Tonnes)	:	135.00	40.00	25.00

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(3) دو کالجوں A اور B کے نتائج سے یہ معلوم کیا جائے کہ کونسا کالج بہتر ہے؟

Name of. the Exam. امتحان کا نام	کالج A		کالج B	
	شریک	کامیاب	شریک	کامیاب
M.A.	30	25	100	80
M.Com.	50	45	120	95
B.A.	200	150	100	70
B.Com.	120	75	80	50
Total	400	295	400	295

(4) مضامین A ' B اور C میں تحریری اور زبانی امتحانوں میں کسی طالب علم کے نشانات حسب ذیل ہیں۔

مضمون	C	B	A
تحریری (75 نشانات ہیں)	29	32	43
زبانی (25 نشانات میں)	18	12	15

.....

.....

.....

.....

.....

.....

زبانی امتحان میں فیصد نشانات کو بطور اوزان لے کر، تحریری امتحان میں اوسط نشانات معلوم کیجئے۔

(5) تحریر کیجئے آیا مندرجہ بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) اگر بڑے مدات کو بڑے اوزان دیں تو سادہ حسابی اوسط، وزنی حسابی اوسط سے بڑا ہوتا ہے۔

(ii) کچھ صورتوں میں سادہ حسابی اوسط کو بطور وزنی اوسط لیا جاسکتا ہے۔

(iii) وزنی حسابی اوسط، اگر موجود ہو تو، ہمیشہ سادہ اوسط سے بہتر پیمانہ ہے۔

(iv) کسی مد کو اگر '0' وزن دیں تو اس کا مطلب یہ ہے کہ وزنی اوسط محسوب کرنے میں اس کو نظر انداز کیا گیا ہے۔

(v) مواد کے اہم ترین مد کو منتخب کر کے وزنی اوسط معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(6) قوس میں دیئے گئے مناسب الفاظ سے خالی جگہوں کو پر کیجئے۔

(i) اشاریہ اعداد کی تشکیل میں ..... حسابی اوسط کو خاص طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔ (وزنی/غیر وزنی)

(ii) اگر اوزان نہ دیے جائیں تو اختیاری اوزان (Arbitrary weights) .....

(استعمال کیے جاسکتے ہیں / استعمال نہیں کیے جاسکتے)

(iii) کچھ مزدوروں کی اجرت کا بل (bill) 5,000 روپے ہے۔ ہر مزدور اوسطاً 250 روپے حاصل کرتا ہے۔ تب مزدوروں کی تعداد ..... ہے۔ (10/30)

(iv) 30 سے پیمائش کیے گئے 10 مدات کے سٹ کے انحرافات کا مجموعہ صفر ہے۔ اس لیے ان کا حسابی اوسط ..... ہے۔

(10/30)

(v) کسی عدد 35 سے 15 مدوں کے سٹ کے انحرافات کے مربعوں کا مجموعہ 890 ہے۔ حسابی اوسط 30 سے ان مدوں کے انحرافات کے مربعوں کا مجموعہ 890 کے بہ نسبت ..... ہے۔ (زیادہ/کم)

(vi) دن کی شفٹ میں کام کرنے والے 60 مزدوروں کی اوسط مزدوری 40 روپے ہے اور رات کی شفٹ میں کام کرنے والے 40 مزدوروں کی اوسط اجرت 35 روپے ہے۔ ان دونوں گروہوں کی اجتماعی اوسط اجرت ..... ہے۔

(Rs. 40/38)

(vii) 5 مدوں کے سٹ کا حسابی اوسط 10 ہے۔ ہر مد سے عدد 3 تفریق کیا گیا ہے، اور ہر مد کو عدد 2 سے ضرب دیا گیا ہے۔ نیا حسابی اوسط ہوگا ..... ۔ (14/15)

10.10 حسابی اوسط کی خوبیاں اور خامیاں
Merits and Limitations of Arithmetic Mean

حسابی اوسط کی خوبیاں اور خامیاں مندرجہ ذیل ہیں :

خوبیاں

(1) حسابی اوسط سمجھنے میں آسان اور محسوب کرنے میں سہل ہے۔ یہ نہایت وسیع پیمانے پر استعمال ہونے والا تلخیصی پیمانہ (Summary measure) ہے۔

(2) ٹھوس اور بے لوچ انداز میں اس کی تعریف کی جاسکتی ہے۔

(3) مواد کے پورے سٹ کا نمائندہ عدد ہے۔

(4) یہ مواد کے تمام مدوں پر مبنی ہوتا ہے۔ سلسلہ میں خود اس کے موقف پر اس کا انحصار نہیں ہوتا ہے۔

(5) یہ مزید حسابی عمل کے قابل ہوتا ہے۔

(6) یہ مزید شماریاتی تجزیہ میں کار آمد ہوتا ہے۔ اس کا دوسرے شماریاتی پیمانوں جیسے معیاری انحراف، تغیر کی قدر ضربی' خمیدگی کی قدر کے محسوب کرنے میں استعمال ہوتا ہے۔ (آپ بلاک 4 میں ان کے متعلق سیکھیں گے)

(7) اس کو مرکز جاذبہ نقطہ توازن کی اہمیت حاصل ہے۔

(8) مختلف نمونہ بندی طریقوں کے لئے، سادہ اوسط، آبادی اوسط (Population mean) کا بے تعصب تخمینہ ہے۔

خامیاں

(1) انتہائی قدروں سے یہ غیر واجبی طور پر متاثر ہوتا ہے۔ مواد میں بہت بڑی اور بہت چھوٹی قدریں اس پر غیر واجبی طور پر اثر انداز ہوتی ہیں۔ اس لئے اس تقسیم کے لئے جس میں چھوٹی یا بڑی قدروں پر زیادہ ارتکاز ہو تو حسابی اوسط صحیح نمائندگی کرنے والا پیمانہ نہیں ہوتا۔

(2) کھلے کناروں کی تقسیم میں، حسابی اوسط کو صحت کے ساتھ محسوب نہیں کیا جاسکتا۔ مثال کے طور پر ایسی آمدنی کی تقسیم میں جو '500 سے کم' جماعت سے شروع کی گئی ہے اور '5000 سے زیادہ' کی جماعت پر ختم ہوتی ہے، دونوں انتہاؤں کے متعلق مفروضہ قائم کئے بغیر حسابی اوسط کو محسوب نہیں کیا جاسکتا۔ نتیجتاً خطا کے سرزد ہونے کا بہت زیادہ امکان ہوتا ہے۔

(3) حسابی اوسط کیفیتی مظاہر (qualitative) کے مطالعہ میں کار آمد نہیں ہوتا مثلاً خوبصورتی، ایمانداری، ذہانت وغیرہ۔

(4) ایک طبعی (یعنی گھنٹی نما) تقسیم کے لئے حسابی اوسط مرکزی رجحان کا ایک اچھا پیمانہ ہے لیکن ایک U شکلی تقسیم میں (جس میں ابتداء میں اعلیٰ، درمیان میں ادنیٰ اور آخر میں پھر اعلیٰ تعددات رہتے ہیں) یہ حسابی اوسط بمشکل تمام ایک کامیاب نقطہ وقوع (Point of location) ہوسکتا ہے جس کے اطراف دوسری انفرادی قدریں جمع ہو جاتی ہیں۔

(5) حسابی اوسط کا اپنا کوئی آزاد وجود نہیں رہتا۔ مثلاً یہ کہنا کہ ہندوستانی خاندان میں بچوں کی اوسط تعداد 4.8 ہے اس امر کی دلالت نہیں کرتا کہ کوئی ایک ہندوستانی خاندان ایسا ہے جس کے بچوں کی اوسطاً تعداد 4.8 ہے اور نہ ہی یہ ممکن ہے کہ ایک بچہ اوسطاً دو گولیوں سے (ایک گز سامنے سے ایک گولی سے اور ایک گز پیچھے سے دوسری گولی سے) مر سکتی ہے۔

(6) غیر متجانس مواد (Non-homogeneous data) کے لئے، حسابی اوسط گمراہ کن نتائج فراہم کرسکتا ہے۔ مثال کے طور پر، فروخت (لاکھوں روپے میں) جو گزشتہ پانچ سال کے دوران A اور B کاروباری اکائیوں کے ذریعہ کی گئی ہے حسب ذیل ہے۔

10	15	20	25	30	: A
30	25	20	15	10	: B

یہاں صاف ظاہر ہے کہ دونوں اکائیوں کی فروخت کا اوسط قطعی طور پر یکساں ہونے کے باوجود اکائی B کے کاروبار تیزی سے ترقی کر رہے ہیں جب کہ اکائی A کے کاروبار لڑکھڑا رہے ہیں۔

10.11 چند تمثیلات Some Illustrations

تمثیل 8

ایک فرم کے 30 مزدوروں کی ہفتہ وار اجرتیں (روپیوں میں) مندرجہ ذیل ہیں:

140	139	126	114	100	88	62	77	99	103
108	129	144	148	134	63	69	148	132	118
142	116	123	104	95	80	85	106	123	133

فرم نے تنخواہ کے زمرہ 75-61 روپے، 90-76 روپے، 105-91 روپے، 120-106 روپے 135-121 روپے اور 150-136 روپے میں شامل افراد کے لیے 10, 15, 20, 25, 30 اور 35 روپے بطور بونس تقسیم کیے۔ تمام مزدوروں کو ادا کیے گئے اوسط بونس کی رقم معلوم کیجئے۔

حل:

اوسط بونس کو محسوب کرنا

ہفتہ واری اجرت (روپے)	شماری سلاخیں	تعداد (f)	ادا شدہ بونس (x)	fx
61 - 75	III	3	10	30
76 - 90	IIII	4	15	60
91 - 105	𝍸	5	20	100
106 - 120	𝍸	5	25	125
121 - 135	𝍸 II	7	30	210
136 - 150	𝍸 I	6	35	210
		$n = \Sigma f = 30$		$\Sigma fx = 735$

$$\text{ادا شدہ بونس کا حسابی اوسط} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{735}{30} = \text{Rs. } 24.50$$

تمثیل 9

کسی کمپنی کے تمام مزدوروں کو ادا کی گئی اوسط تنخواہ 500 روپے ہے۔ ہنر مند اور غیر ہنر مند مزدوروں کو ادا کی گئی اوسط تنخواہ بالترتیب 520 اور 420 روپے ہے۔ ہنر مند اور غیر ہنر مند مزدوروں کا فیصد معلوم کیجیے۔

حل:

فرض کیجئے کہ ہنر مند مزدوروں کا فیصد n_1 ہے۔ تب غیر ہنر مند مزدوروں کا فیصد $100 - n_1$ ہوگا۔ فرض کیجئے ہنر مند اور غیر ہنر مند مزدوروں کے حسابی اوسط بالترتیب x_1 اور x_2 سے تعبیر کئے جاتے ہیں۔

$$\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$ مخلوط اوسط

اب اس فارمولے میں x_1 ' x_2 ' n_1 اور n_2 کے لیے دی گئی قدریں درج کیجئے۔

$$500 = \frac{520 \times n_1 + 420(100 - n_1)}{n_1 + (100 - n_1)}$$

$$500 = \frac{520n_1 + 420{,}000 - 420n_1}{100}$$

$$50{,}000 = 100n_1 + 42{,}000$$

$$8{,}000 = 100n_1$$

$$n_1 = \frac{8{,}000}{100}$$

$$= 80$$

$$n_2 = 100 - n_1 \qquad 0 - 420n_1$$

$$= 100 - 80$$

$$= 20$$

ہنر مند مزدوروں کا فیصد 80% اور غیر ہنر مند مزدوروں کا فیصد 20% ہے۔

تمثیل 10

100 مدات کا حسابی اوسط 50.8 تھا۔ بعد میں انکشاف ہوا کہ ایک مد 47 سہواً بطور 67 لیا گیا ہے۔ صحیح حسابی اوسط معلوم کیجئے۔

حل :

$(n\bar{x}) = 100 \times 50.8 = 5080$ تمام مدات کی محسوبہ میزان مساوی ہے۔ اس میزان یعنی 5080 میں غلط عدد کی تفریق کر کے اور صحیح عدد کو جمع کر کے صحیح میزان معلوم کیجیے۔

صحیح میزان $= 5080 - 67 + 47 = 5060$

صحیح حسابی اوسط $\frac{5060}{100} = 50.6$

تمثیل 11

مندرجہ ذیل مواد سے غائب تعدد معلوم کیجئے۔

نشانات :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
طلبہ کی تعداد :	5	15	20	----	20	10

نشانات کا حسابی اوسط = 34

حل

فرض کیجئے کہ غائب تعدد 'F' ہے۔

حسابی اوسط کی تحسیب

نشانات	تعدد(f)	وسطی نقطہ (m)	fm
0 - 10	5	5	25
10 - 20	15	15	225
20 - 30	20	25	500
30 - 40	F	35	35F
40 - 50	20	45	900
50 - 60	10	55	550
	n = 70+F		Σfm = 2,200+35F

اب

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fm}{n}$$

$$34 = \frac{2,200 + 35F}{70 + F}$$

$$34(70 + F) = 2200 + 35F$$

$$2,380 + 34F = 2,200 + 35F$$

$$2,380 - 2,200 = 35F - 34F$$

$$180 = F$$

غائب تعدد = 180

تمثیل 12

مندرجہ ذیل مواد دو یونیورسٹیوں کے مختلف کورسوں سے متعلق امتحانات میں شریک طلبہ کی تعداد اور کامیابی کے فیصد کو ظاہر کرتا ہے۔ کامیابی کے فیصد کو سادہ حسابی اوسط اور وزنی حسابی اوسط کے ذریعہ معلوم کیجیے اور تبصرہ کیجئے کہ کس یونیورسٹی میں کامیابی کا فیصد زیادہ ہے۔

نصاب	یونیورسٹی A		یونیورسٹی B	
	کامیابی کا%	طلبہ	کامیابی کا %	طلبہ
ایم اے	71	400	82	200
ایم کام	83	500	75	300
بی اے	72	300	74	600
بی کام	74	200	73	700

حل

سادہ اور وزنی حسابی اواسط کی تحسیب

نصاب (کورس)	یونیورسٹی A			یونیورسٹی B		
	کامیابی کا % X_A	طلبہ W_A	$X_A W_A$	کامیابی کا% X_B	طلبہ W_B	$W_B X_B$
ایم۔اے	71	400	28,400	82	200	16,400
ایم۔کام	83	500	41,500	75	300	22,500
بی۔اے	72	300	21,600	74	600	44,400
بی۔کام	74	200	14,800	73	700	51,100
جملہ	300	1,400	1,06,300	304	1,800	1,34,400

یونیورسٹی A

سادہ حسابی اوسط = $\frac{\Sigma xA}{M} = \frac{300}{4} = 75\%$

وزنی حسابی اوسط = $\frac{\Sigma X_A W_A}{WA} = \frac{1,06,300}{1,400} = 75.9\%$

یونیورسٹی B

سادہ حسابی اوسط = $= \frac{\Sigma X_B}{n} = \frac{304}{4} = 76\%$

وزنی حسابی اوسط = $\frac{\Sigma x_B W_B}{W_B} = \frac{1,34,400}{1,800} = 74.7\%$

یونیورسٹی B کے کامیاب طلبہ کا سادہ حسابی اوسط اور یونیورسٹی A کے کامیاب طلبہ کا وزنی حسابی اوسط زیادہ ہے لہذا سادہ حسابی اوسط کے نقطۂ نظر سے یونیورسٹی B بہتر ہے جبکہ وزنی حسابی اوسط کے نقطہ نظر سے یونیورسٹی A بہتر ہے۔ درحقیقت اس تمثیل میں مختلف نصابوں میں بیٹھنے والے طلبہ کی تعداد ایک دوسرے سے مختلف ہے۔ اس لئے مختلف کورسوں کے لئے کامیابی فیصد کی بنیاد ایک دوسرے سے مختلف ہے۔ ایسی صورت میں وزنی اوسط صحیح نتیجہ پیش کرتا ہے۔ لہذا یونیورسٹی A کی کامیابی کے فیصد کا اوسط زیادہ ہے۔ بہ الفاظ دیگر، یونیورسٹی A میں طلبہ کی کل تعداد 1400 میں حقیقی طور پر کامیاب ہونے والے طلبہ کی تعداد 1,063 ہے۔ اس لئے کامیابی کا فیصد ہے (1063/1400 × 100) = 75.9% جو وزنی اوسط کے مساوی ہے۔ اسی طرح یونیورسٹی B میں 1,800 طلبہ میں سے 1,344 طلبہ کامیاب ہوئے ہیں یعنی کامیابی کا فیصد ہے (1344/1800×100=74.7%) جو وزنی اوسط کے مساوی ہے۔ لہذا وزنی اواسط کے تقابل ہی سے ظاہر ہوتا ہے کہ کونسی یونیورسٹی بہتر ہے۔

10.12 خلاصہ Let Us Sum Up

مواد کی اہم خصوصیات کا اظہار عدد واحد سے ہوتا ہے اس عدد کو 'اوسط' یا 'حسابی اوسط' کہتے ہیں۔ یہ مقام بندی کا ایسا نقطہ ہے جس کے اطراف انفرادی قدریں جمع ہوتی ہیں۔ کسی اوسط کو مثالی ہونے کیلئے بعض خاصیتوں کا حامل ہونا ضروری ہے۔ جیسے حساب میں آسانی، بے لوچ تعریف، تمام مدات کا احاطہ، انتہائی مدوں سے غیر متاثر ہونا، مزید الجبرائی عمل کے قابل ہونا اور نمونہ بندی استحکام وغیرہ وغیرہ۔

ایک اوسط تمام مدات پر ایک پرند چشم نظارہ (bird's eye view) پیش کرتا ہے' تقابل کے لئے سہولت پیدا کرتا ہے اور شماریاتی تجزیے میں کار آمد ہوتا ہے۔

گروہ بند اور غیر گروہ بند مواد کے سادہ حسابی اوسط معلوم کرنے کے لئے آسان ضابطے (فارمولے) موجود ہیں۔ جب مواد کے سٹ میں قدریں غیر مساوی اہمیت کی حامل ہوتی ہیں، تو وزنی حسابی اوسط حقیقی نمائندہ اوسط ہوتا ہے۔ وزنی اوسط دو چیزوں کا خلاصہ پیش کرتا ہے (i) مدات کا خلاصہ (ii) اس بات کا خلاصہ کہ مدات اوزان سے کس طرح متاثر ہوتے ہیں؟ لہذا وزنی طریقہ پر انحصار کی صورت میں حسابی اوسط' وزنی اوسط کے برابر یا زیادہ یا کم ہو سکتا ہے۔

حسابی اوسط کی کچھ اہم خصوصیات ہیں : (a) حسابی اوسط سے انحرافات کا مجموعہ ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔ (b) حسابی اوسط سے انحرافات کے مربعوں کا مجموعہ اقل ترین ہوتا ہے۔ (c) اگر حسابی اوسط اور مدات کی تعداد معلوم ہو تو مدوں کی جملہ میزان (Σx) کا تخمینہ معلوم کر سکتے ہیں۔ (d) اگر متغیرہ x کی ہر قدر میں کسی مستقل مقدار C کا اضافہ یا کمی ہو تو حسابی اوسط میں بھی اسی مستقل مقدار کے مساوی اضافہ یا کمی ہو گی۔ اسی طرح متغیرہ x کی قدروں کو کسی مقدار مستقل K سے ضرب دیا جائے تو حسابی اوسط بھی اسی مقدار مستقل سے ضرب کھاتا ہے (e) دو یا دو سے زائد گروہوں کے مخلوط حسابی اوسط (Combined mean) کو معلوم کیا جا سکتا ہے، حسابی اوسط نہایت کار آمد پیمانہ ہے، یہ ایک نقطہ توازن ہے جو اعلیٰ تجزیہ کے لئے بنیاد فراہم کرتا ہے۔ اس میں کئی خامیاں بھی موجود ہیں۔ یہ انتہائی مدات سے متاثر ہوتا ہے۔ کھلے کنارے کی تقسیم کے لئے، چند مفروضات کے تحت اس کو معلوم کیا جا سکتا ہے۔ مزید یہ کہ غیر متجانس مواد (Non-homogeneous data) میں اس کے استعمال سے گمراہ کن نتیجے نکلتے ہیں۔

10.13 کلیدی الفاظ اور علامتوں کی فہرست Key Words and List of Symbols

کلیدی الفاظ Key Words

مرکزی رجحان (Central Tendency) :ایک قدر واحد جو مرکز کے آس پاس موجود ہونے کا رجحان رکھتی ہے اور تمام اقدار کے رینج (range) میں رہتی ہے۔

انتہائی قدریں (Exterme Values) : وہ مدات جو مواد کے دیگر مدوں کے مقابل انتہائی بڑے یا انتہائی چھوٹے ہوتے ہیں۔ یہ اوسط کو غیر واجبی طور پر متاثر کرتے ہیں۔

حسابی اوسط (Mean) : وہ قدر جو کسی دیئے گئے مواد کے تمام مشاہدات کے مجموعے کو مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتی ہے۔

مقام بندی کا پیمانہ (Measure of Location) : ایک ایسا پیمانہ جو نقطۂ وقوع ہے جس کے گرد مواد کی انفرادی قدریں جمع ہوتی ہیں۔

نمونہ بندی استحکام (Sampling Stability) : ایک ہی مجموعے کے مختلف نمونوں سے حاصل کردہ اوسط جنہیں تقریباً یکساں ہونا چاہیئے۔

وزنی حسابی اوسط Weighted Arithmetic Mean :ایک ایسا اوسط جس کے ترکیبی اجز کے لیے ان کی اہمیت کے مطابق اوزان منسوب کیے جاتے ہیں۔

فہرست علامات List of Symbols

آپ کے مطالعاتی مواد میں متعدد فارمولوں کو تحریر کرتے وقت ان علامتوں کو لکھا گیا جن کا استعمال بہ کثرت ہوتا ہے۔ ذیل میں دی گئی فہرست میں ان علامتوں کو اولین علامات کے طور پر مختلف الفاظ کی شکل میں دیا گیا ہے۔ اکثر درسی کتابوں میں ان علامتوں سے مختلف علامتیں استعمال کی گئی ہیں۔ عام طور پر مستعملہ علامتوں کو بھی مندرجہ ذیل فہرست میں دیا گیا ہے۔ جب کبھی کسی کتاب کا مطالعہ کریں تو آپ کو چاہیئے کہ پہلے اس میں مستعمل علامتوں کے معنی اچھی طرح سمجھ جائیں۔ مختلف ضابطوں (فارمولوں) کو لکھتے وقت آپ اپنی پسند کی علامتیں استعمال کر سکتے ہیں لیکن ساتھ ہی ساتھ ان کے معنی اور مطالب کی تشریح کر دینی ضروری ہے۔

حسابی اوسط (Arithmetic Mean) : A.M $\bar{X}$ آبادی کے اوسط X کو عموماً μ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

مفروضہ حسابی اوسط (Assumed Mean) : $A, a, x_o, \bar{x}_d$

جماعتی وقفہ (Class Interval) : i , c , h , w ۔

مجموعوں کا مخلوطی اوسط (Combined Mean of Group) : $\bar{X}_c$ ' $\bar{\bar{X}}$ ' $\bar{X}_{12}$ ۔

مشترکہ عامل ضربی (common Factor) : c , i , h ۔

اوسط سے مدوں کا انحراف (Deviation of Items from Assumed Mean) : $(X - \bar{X})$, X , D ۔

وسطی نقاط کا مفروضہ اوسط سے انحراف (Deviation of Mid-points from Assumed Mean): d, x', x, dx ۔

تعدد (Frequency) : f , F

مدات (Items) : X , x

کسی جماعتی وقفے کا وسطی نقطہ : m, m

اختصاری انحراف (Step Deviation) : d', d , x', u, U, dx

مدات کی کل تعداد (Total No. of Items) : Σf ' N ' n جب مواد سادہ ہوتا ہے تو عموماً 'n' اور جب آبادی (population) سے متعلق ہوتا ہے N۔

اوزان (Weights) : w, W, wt.

وزنی اوسط (Weighted Mean) : $\bar{X}_w$, $\bar{X}_w$, wt. Mean

10.14 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات Answers to Check Your Progress

(1) (A) (i) پرند چشم نظارہ (ii) خلاصہ (iii) انتہائی (iv) سہولت بخش (v) استنباط

(2) (i) غلط (ii) غلط (iii) غلط (iv) صحیح (v) غلط

(3) (i) 11: (ii) $\bar{x} = \frac{\Sigma fm}{\Sigma f}$, $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n}$, $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c$

(iii) تخمیب کو کم کرتا ہے

(iv) A.= 35

(v) جماعت کی ہر قدر، اس جماعت کے وسطی نقطہ کے مساوی ہوتی ہے۔

(4) Rs. 164.33

(5) (i) 68 (ii) 0

(6) دونوں طریقوں سے 128.33 روپے

(7) 40.2

(B) (2) سادہ اوسط = 42.92؛ وزنی اوسط = 44.23

(3) دونوں 73.7% کے مساوی ہیں۔

(4) 34.47

(5) (i) غلط (ii) صحیح (iii) صحیح (iv) صحیح (v) غلط

(6) (i) وزنی (ii) اختیاری (iii) 20 (iv) 30 (v) کم

(vi) 38 (vii) 14

10.15 امتحانی سوالات / مشقیں Terminal Questions/Exercises

سوالات

(1) ایک اچھے مرکزی رجحان کے پیمانے کی خاصیتوں کی تشریح کیجیے۔

(2) حسابی اوسط کی خوبیوں اور خامیوں کو پیش کیجیے۔

(3) وزنی اوسط کیا ہے؟ کن حالات میں وزنی اوسط کو سادہ اوسط پر سبقت حاصل ہے؟

مشقیں

(1) دو شہروں میں ہنر مند اور غیر ہنر مند مزدوروں کی تعداد اور اوسط فی گھنٹہ اجرتیں مندرجہ ذیل ہیں۔ ہر شہر کے لئے اوسط فی گھنٹہ اجرت معلوم کیجیے۔

مزدور	بمبئی		کلکتہ	
	تعداد	فی گھنٹہ اجرت (روپے میں)	تعداد	فی گھنٹہ اجرت (روپے میں)
ہنر مند	150	1.80	350	1.75
غیر ہنر مند	850	1.30	650	1.25

(جواب : 1.38 روپے اور 1.43 روپے)

(2) ایک سرمایہ کار ہر ماہ کسی کمپنی کے 120 روپے قیمت کے حصص خریدتا ہے۔ پہلے 5 مہینوں کے دوران، فی حصہ 20, 15, 12, 10 اور 24 روپے کے حساب سے اس نے اسٹاک خریدا۔ 5 مہینوں کے بعد اس کے قلمدان میں حصص کے لئے ادا کی گئی قیمت کیا ہے؟

(جواب : 14.63 روپے)

(3) ایک فیکٹری میں جو دو شفٹوں میں کام کرتی ہے، مزدوروں کی تعداد 100 ہے۔ مزدوروں کو ادا کی گئی اوسط مزدوری 38 روپے فی یوم ہے۔ پہلی شفٹ میں 60 افراد کام کرتے ہیں اور ان کی اوسط اجرت 40 روپے فی یوم ہے۔ باقی 40 مزدوروں کی جو دوسری شفٹ میں کام کرتے ہیں ادا شدہ اجرت کتنی ہے؟

(جواب : 35 روپے)

(4) 50 مدات کا حسابی اوسط 28.5 ہے۔ بعد میں معلوم ہوا کہ مد 39 زائد لیا گیا ہے۔ 49 مدات کی صحیح قدر معلوم کیجیے۔

(جواب : 28.3)

(5) مندرجہ ذیل جدول، مختلف تجارتی زمروں میں ان مزدوروں کی تعداد کو ظاہر کرتی ہے، جو ایک ہفتے میں پیر سے جمعہ تک مختلف گھنٹوں میں ہر روز کام کرتے ہیں۔ زمروں I, II, III, IV اور V کی فی گھنٹہ تنخواہ بالترتیب 0.97, 0.77, 1.01, 0.67 اور 0.75 روپے ہے۔ تمام زمروں کے لئے باہم، پورے ہفتے کی فی گھنٹہ فی مزدور اوسط اجرت معلوم کیجیے۔

زمرے	مزدوروں کی تعداد				
	پیر (7 گھنٹے)	منگل (6 گھنٹے)	چہار شنبہ (5 گھنٹے)	جمعرات (4 گھنٹے)	جمعہ (5 گھنٹے)
I	30	20	25	15	30
II	25	25	30	20	20
III	30	25	30	25	20
IV	20	20	20	20	25
V	25	20	25	15	25

(اشارہ : ہر زمرے کے لئے کل گھنٹے معلوم کیجئے اور اس کو وزن کے بطور لیجئے) (جواب : 0.84 فی گھنٹہ)

(6) کسی ریاستی مقتدرہ (اسٹیٹ اتھارٹی) نے دو اضلاع میں اہلِ خانہ (گھر میں رہنے والوں) کی عمر کا تخمینہ حسب ذیل لگایا ہے۔ مندرجہ ذیل کے لئے اوسط عمر محسوب کیجیے۔

(i) علاقہ 'A'

(ii) علاقہ 'B'

(iii) دونوں علاقوں کو یکجا کر کے

تخمینی شدہ عمر (برسوں میں)	گھروں کا فیصد	
	علاقہ A	علاقہ B
0 - 20	16	13
20 - 40	37	35
40 - 80	35	46
80 - 100	12	6

(جواب : علاقہ A = 58.45 ، علاقہ B = 58.48 ، مجموعی علاقہ = 58.47)

(7) تحریر کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟ نیز اسباب بیان کیجئے۔

(i) ایک شخص کا دعویٰ ہے کہ سال کے دوران اس کا اوسط بینک بیلنس 370 روپے تھا۔ بنک کا دعویٰ ہے کہ اُس سال کے دوران اس شخص نے اپنے کھاتے (اکاؤنٹ) سے 10 مرتبہ بیش براری کی یعنی اوور ڈرا (Over draw) کیا ہے۔ دونوں صحیح ہیں۔

(ii) 28 سے پیمائش شدہ 10 مشاہدات کے سٹ کے انحرافات کا مجموعہ صفر ہے۔ اس لئے مشاہدات کا حسابی اوسط صفر ہے۔

(iii) عدد 42 سے 20 مشاہدات کے سٹ کے انحرافات کے مربعوں کا مجموعہ 750 ہے اور حسابی اوسط 34 سے ان مشاہدات کے انحرافات کے مربعوں کا مجموعہ 800 ہے۔

(iv) کچھ مدوں کی تعداد کا حسابی اوسط 42 ہے۔ اگر ایک اور مد '64' کا مواد میں اضافہ کیا جائے تو حسابی اوسط '44' ہو جاتا ہے۔ لہذا اصل مواد میں 10 مدوں کا ہونا ضروری ہے۔

(v) اگر کسی سلسلے میں ہر مد کو اسی سلسلے کی اوسط قدر سے تبدیل کر لیا جائے تو ان تبدیل شدہ قدروں کا مجموعہ، انفرادی مدوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

(جواب : (i) صحیح

(ii) غلط

(iii) غلط

(iv) صحیح

(v) صحیح

نوٹ : یہ سوالات اس اکائی کے سمجھنے میں مددگار ثابت ہوں گے۔ ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجیے لیکن آپ کے جواب یونیورسٹی کو نہ بھیجئے۔ یہ آپ کی مشق کے لئے ہیں۔

اکائی 11 وسطانیہ

UNIT : 11 - MEDIAN

Structure ساخت

Objectives	مقاصد	11.0
Introduction	تمہید	11.1
What is Median?	وسطانیہ کیا ہے؟	11.2
Computation of Median	وسطانیہ کی تحسیب	11.3
Ungrouped Data	11.3.1 غیر گروہ بند مواد	
Grouped Data	11.3.2 گروہ بند مواد	
Properties of Median	وسطانیہ کی خاصیتیں	11.4
Merits and Limitation of Median	وسطانیہ کی خوبیاں اور خامیاں	11.5
Partition Values	تقسیمی قدریں	11.6
Quartiles	11.6.1 چوتھائیے	
Deciles	11.6.2 عشریے	
Percentiles	11.6.3 صدیوے	
Graphic Determination of Median and Other Partition Values	وسطانیہ اور دیگر تقسیمی قدروں کا ترسیمی تعین	11.7
Let Us Sum Up	خلاصہ	11.8
Key Words and Symbols	کلیدی الفاظ اور علامات	11.9
Answers to Check Your Progress	اپنی معلومات کی جانچ: جوابات	11.10
Terminal Questions/Exercises	امتحانی سوالات / مشقیں	11.11

11.0 مقاصد Objectives

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:۔

- وسطانیہ کی تعریف کر سکیں۔
- مختلف قسم کے مواد کے لئے وسطانیہ معلوم کر سکیں۔
- وسطانیہ کی خاصیتوں کو شمار کر سکیں۔
- مختلف قسم کی تقسیمی قدروں کی تعریف اور تحسیب کر سکیں۔
- وسطانیہ اور دیگر تقسیمی قدروں کا ترسیمی طور پر تعین کر سکیں۔
- مرکزی رجحان کے پیمانے کے طور پر وسطانیہ کی خوبیوں اور خامیوں کو بیان کر سکیں۔

11.1 تمہید Introduction

اکائی 10 میں آپ نے پڑھا کہ مرکزی رجحان کے مختلف پیمانے ہیں۔ آپ نے حسابی اوسط کا بھی تفصیل سے مطالعہ کیا، جو مرکزی رجحان کے پیمانوں میں سے ایک ہے۔ جیسا کہ آپ جانتے ہیں انتہائی قدریں حسابی اوسط پر بہت اثرانداز ہوتی ہیں۔ اکثر و بیشتر ہماری یہ خواہش ہوتی ہے کہ اوسط کا ایک ایسا پیمانہ معلوم کریں جو انتہائی قدروں سے متاثر نہ ہوتا ہو۔ وسطانیہ ایک ایسا ہی پیمانہ ہے۔ اس کے علاوہ مزید چند پیمانے ہیں جو تقسیمی قدریں کہلاتے ہیں جو حقیقت میں اوسط نہیں ہوتے لیکن وسطانیہ سے زیادہ تصوراتی مماثلت رکھتے ہیں۔ اس اکائی میں ہم وسطانیہ اور دوسری تقسیمی قدروں کے معنی، تحسیب، خاصیتوں، خامیوں اور استعمال پر روشنی ڈالیں گے۔

11.2 وسطانیہ کیا ہے؟ What is Median?

وسطانیہ بھی مرکزی رجحان کا ایک پیمانہ ہے۔ حسابی اوسط کے برعکس وسطانیہ بڑھتی یا گھٹتی ترتیب میں کسی سلسلے میں دیئے گئے مشاہدہ کے مقام پر مبنی ہوتا ہے۔ اس لئے اس کو مقام بندی اوسط کہتے ہیں۔ حسابی اوسط کے برعکس، وسطانیہ کو تمام مشاہدوں سے کوئی تعلق نہیں ہوتا۔ مقداروں کو ترتیب وار پیش کرنے پر وسطانیہ کسی متغیرہ کی انتہائی وسطی قدر کو ظاہر کرتا ہے۔ کسی سلسلے میں وسطانیہ اس مقام پر واقع ہوتا ہے جس کے دونوں جانب اعداد کی مساوی تعداد ہوتی ہے۔ کسی سلسلہ میں وسطانیہ، متغیرہ کی وہ قدر ہوتی ہے جو اس سلسلہ کو دو (2) مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ وسطانیہ ایک انتہائی وسطی قدر ہے جس کے اوپر اعداد کی، نصف تعداد اور جس کے نیچے اعداد کی باقی نصف تعداد واقع ہوتی ہے۔ وسطانیہ کو عموماً "Md" سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

11.3 وسطانیہ کی تحسیب Computation of Median

وسطانیہ کو گروہ بند اور غیر گروہ بند مواد دونوں کے لئے محسوب کیا جاسکتا ہے لیکن اس کے طریقے مختلف ہیں۔ اب ہم گروہ بند اور غیر گروہ بند موادوں کے لئے وسطانیہ محسوب کرنے کے لیے علحدہ علحدہ طریقوں پر غور کریں گے۔

11.3.1 غیر گروہ بند مواد Ungrouped Data

اگر مواد میں مدات کی جملہ تعداد N ہے، تو مواد کو بڑھتی یا گھٹتی ترتیب میں مرتب کرنے کے بعد مواد کو بطور $\frac{n+1}{2}$ واں رکن لیا جاتا ہے۔

(1) جبکہ N طاق عدد ہے : اگر مواد میں مشاہدات کی تعداد طاق عدد میں ہو تو، وسطانیہ (Md) کو محسوب کرنے کا فارمولہ n ہے واں، جہاں پر 'N' مشاہدات کی تعداد ہے۔

مثال کے طور پر سلسلہ 6, 7, 8, 11, 5, 3, 9, 10 کو لیجیے۔ اس صورت میں مشاہدوں کی تعداد 9 ہے جو طاق عدد ہے۔ اب وسطانیہ ہے $\frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$ واں مد ہے۔ اس کا مطلب ہے دیئے گیے سلسلے کو اگر بڑھتے ہوئے سلسلے میں مرتب کیا جائے تو 5 واں مد وسطانیہ ہے۔ اب مد کو بڑھتے ہوئے سلسلہ میں مرتب کریں گے اور 5 ویں مد کی شناخت کریں گے۔ اس طور پر مرتب شدہ سلسلہ ہے 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 اور 5 واں مد ہے 7۔ اس لیے وسطانیہ (M_d) ہے 7۔

(2) اگر N جفت عدد ہے : اگر مدات کی تعداد N جفت عدد ہو $\frac{n+1}{2}$ ایک کسر پر مشتمل ہوتا ہے۔ اس صورت میں دو وسطی قدروں کے حسابی اوسط کو بطور وسطانیہ لیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر ہم سلسلہ 8, 11, 3, 16, 20, 32, 41, 36 کو لیتے ہیں۔ اس صورت میں مشاہدات کی تعداد 8 ہے جو ایک

جفت عدد ہے۔اس لیے وسطانیہ ہے $\frac{8+1}{2}$ = 4.5 واں مد۔اس میں ایک کسر 0.5 شامل ہے۔غور کیجئے کہ 4.5 سلسلہ نشان کا کوئی مد سلسلے میں موجود نہیں ہے۔اس لیے چوتھے اور پانچویں مدوں کے حسابی اوسط کو بطور وسطانیہ لیا جائے گا۔اب ہم دیئے گئے سلسلے کو بڑھتے ہوئے سلسلے میں ترتیب دیں گے جیسا کہ ذیل میں ظاہر کیا گیا ہے 3, 8, 11, 16, 20, 32, 36, 41 وسطانیہ اس طور پر مرتب شدہ سلسلہ میں چوتھے اور پانچویں مدوں کا حسابی اوسط ہے ترتیب وار مرتب شدہ مواد میں چوتھا مد ہے 16 اور پانچواں مد ہے 20۔اس لیے وسطانیہ (M_d) ہے $\left(18 = \frac{16+20}{2}\right)$ ۔اگر N جفت عدد بھی ہو، تو وسطانیہ کو $\frac{n+1}{2}$ واں مد لیا جاسکتا ہے لیکن اس مقصد کے لیے $\frac{n+1}{2}$ کی قدر میں 0.5 کی تاویل کے لیے اس کو خاص معنی عطا کرنے ہوں گے۔اس سلسلہ میں پہلے ہم کو چوتھا عدد کیا ہے، جاننا چاہیئے۔اس کے بعد چوتھے عدد میں چوتھے اور پانچویں عدد کے فرق کے نصف کو جمع کرنے سے وسطانیہ حاصل ہوتا ہے۔زیر مطالعہ مثال میں چوتھا عدد ہے 16 چوتھے اور پانچویں عدد (16 اور 20) کا فرق ہے 4۔ اس کا نصف 4/2 = 2 ہوتا ہے جس کو چوتھے عدد 16 میں جمع کرنے سے وسطانیہ 18 حاصل ہوتا ہے۔ (M_d) ہے 18 یعنی $\frac{16+1}{2}$ (20 - 16) ۔ یہ وہی قدر ہے جس کو ہم نے قبل ازیں معلوم کیا تھا لہذا اس سے قطع نظر کہ آیا N طاق ہے یا جفت، غیر گروہ بند مواد کے لیے ہم وسطانیہ کی تعریف بطور $\frac{n+1}{2}$ واں مد کر سکتے ہیں۔

آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ جب N جفت عدد ہے تو یہ نہایت آسان ہے کہ ہم اس کو دو وسطی مدوں کے حسابی اوسط کے بطور معلوم کریں۔ لیکن مد کے کسری سائز کے طور پر دیا گیا مفہوم جیسا کہ اوپر ظاہر کیا گیا ہے دوسرے بٹوارے کی قدروں کے محسوب کرنے میں نہایت کار آمد ہوگا جن کو آپ اس اکائی میں آگے چل کر سیکھیں گے۔مزید برآں، یہ فارمولہ غیر گروہ بند مواد کے لیے وسطانیہ کی عام تعریف میں مددگار ہے۔

11.3.2 گروہ بند مواد Grouped Data

جیسا کہ آپ جانتے ہیں، مواد اگر تعددی تقسیم کی شکل میں ہو تو یہ غیر مسلسل یا مسلسل سلسلہ (discrete or continuous series) کی شکل میں ہوگا۔ان دونوں طریقوں میں وسطانیہ کی تحسیب کا طریقہ مختلف ہوگا۔ اب ہم ان کا مطالعہ کریں گے۔

غیر مسلسل سلسلہ (Discrete Series)

اس صورت میں سب سے پہلے مواد کو بڑھتی یا گھٹتی ترتیب میں منظم کریں اس کے بعد مجموعی تعدد معلوم کیجئے۔چونکہ وسطانیہ $\frac{n+1}{2}$ واں مد ہے، مجموعی تعدد کے کالم میں $\frac{n+1}{2}$ یا اس سے زیادہ تر متعلقہ قدر (corresponding value) کا تعین کریں۔اس طور پر وسطانی جماعت کا تعین ہوگا۔ اس وسطانی جماعت میں متغیرہ کی قدر، وسطانیہ کی قدر ہوگی۔اب ہم ایک تمثیل سے اس کو سمجھیں گے۔

تمثیل 1

مندرجہ ذیل مواد کے لیے نشانات کا وسطانیہ محسوب کیجئے۔

نشانات :	20	45	50	10	35	30	5	25	15	40
طلبہ کی تعداد :	76	8	6	43	39	45	20	72	75	9

حل :

سب سے پہلے مواد کو نشانات کی بڑھتی ہوئی ترتیب میں مرتب کریں گے اور بعد ازاں مجموعی تعدد معلوم کریں گے، جیسا کہ نیچے بتلایا گیا ہے۔

نشانات :	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5
طلبہ کی تعداد :	6	8	9	39	45	72	76	75	43	20

مجموعی تعدد کی تحسیب

نشانات	طلبہ کی تعداد	مجموعی تعدد
5	20	20
10	43	63
15	75	138
20	76	214
25	72	286
30	45	331
35	39	370
40	9	379
45	8	387
50	6	393

یہاں پر $N = 393$

وسطانیہ $= \frac{n+1}{2}$ واں مد $\frac{393+1}{2}$ واں مد $= 197$ واں مد

197 ویں مد کے مقام کی شناخت مجموعی تعدد میں کرنا چاہیئے۔ 197واں مد مجموعی تعدد 214 میں واقع ہے جس کا جماعتی وقفہ 20 ہے۔ لہذا متغیرہ کا وسطانیہ 20 نشانات ہیں۔

مسلسل سلسلہ Continuous Series

مسلسل سلسلے کی تعددی تقسیم میں، مختلف مدات کی صحیح قدروں کا علم نہیں ہوتا۔ اس لیے کسی مخصوص مد کی سائز معلوم نہیں کی جاسکتی۔ اس خصوص میں یہ کرنا ہوگا کہ پہلے وہ قدر معلوم کی جائے جس کے اوپر مدوں کی نصف تعداد ہو یا نیچے بھی نصف تعداد ہو۔ چنانچہ وسطانی جماعت کی نشاندہی کے لیے فارمولے میں $\frac{n+1}{2}$ کی بجائے $\frac{n}{2}$ لیا جاتا ہے اور باقی طریقہ کار، غیر مسلسل سلسلہ میں اختیار کردہ طریقہ کار جیسا ہے۔ وسطانی جماعت کی شناخت کے بعد متغیرہ کی قطعی قدر اس شناخت کردہ جماعت سے اوراج (interpolation) کے ذریعہ مندرجہ ذیل کسی ایک طریقہ سے معلوم کی جاسکتی ہے۔

طریقہ 1 : $M_d = L + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$

جہاں پر L = وسطانیہ جماعت کی نچلی انتہا

c = وسطانیہ جماعت سے ماقبل جماعت کا مجموعی تعدد

f = وسطانیہ جماعت کا سادہ تعدد

i = وسطانیہ جماعت کا جماعتی وقفہ

طریقہ 2 :

پہلے طریقے میں استعمال شدہ فارمولے کا مفروضہ یہ تھا کہ مجموعی تعدد کی تحسیب نچلی قدروں کی سمت جائے۔ اس کے برعکس مجموعی تعدد کی تحسیب اوپری قدروں سے ہو تو مندرجہ بالا فارمولے میں قدرے تبدیلی لائی جائے گی :

$$M_d = U - \frac{N/2 - C}{f} \times i$$

جہاں پر U = وسطانیہ جماعت کی بالائی انتہا

C = وسطانیہ جماعت کے مابعد جماعت کا مجموعی تعدد

f = وسطانیہ جماعت کا سادہ تعدد

i = وسطانیہ جماعت کا جماعتی وقفہ

طریقہ 3 :

وسطانیہ کو مندرجہ ذیل طریقے سے بھی محسوب کیا جاسکتا ہے :

$$M_d = L + \frac{U - L}{f} \times (m - c)$$

جہاں L = وسطانیہ جماعت کی نچلی انتہا

U = وسطانیہ جماعت کی اوپری انتہا

f = وسطانیہ جماعت کا سادہ تعدد ہے

C = وسطانیہ جماعت سے ماقبل جماعت کا مجموعی تعدد

$N/2 = m$

یہ تمام تینوں طریقے قطعی طور پر یکساں نتائج برآمد کرتے ہیں۔ ان تمام تینوں طریقوں سے وسطانیہ کے اوراج (interpolation) کے پیچھے کارفرما منطق اور مفروضات یکساں ہیں۔ اب ہم طریقہ 1 کے تحت ضابطے (فارمولے) کے مفروضات کی توضیح کریں گے۔

اگر مدوں کا شمار نچلی قدروں سے شروع کیا جائے تو وسطانیہ جماعت کی نچلی انتہا تک C مدات مکمل ہو جاتے ہیں لیکن نقطہ وسطانیہ پہنچنے کے لیے $\frac{N}{2}$ مدات کا احاطہ کرنا ضروری ہے لہذا وسطانیہ جماعت میں $\frac{N}{2} - C$ مدات کا احاطہ کرنا ضروری ہے۔ اس وسطانیہ جماعت کا جماعتی وقفہ (i) (f) مدات کی تعداد پر پھیلا ہوا ہے۔ اب یہ فرض کیا جاتا ہے کہ رینج (range) i پر 'f' مدات یکساں طور پر منقسم ہیں۔ چنانچہ وسطانیہ جماعت میں $\frac{N}{2} - C$ مدات کا احاطہ کرنے کے لیے نچلی انتہا L سے فاصلہ $\frac{i}{f} \times \left(\frac{N}{2} - C\right)$ آگے کی طرف طے کرنا ہوگا۔

لہذا $$M_d = L + \frac{i}{f} \times \left(\frac{N}{2} - C\right)$$

آپ کو وسطانیہ اور حسابی اوسط کے پیچھے کارفرما مفروضات کے فرق پر غور کرنا چاہیے۔ وسطانیہ کی صورت میں مفروضہ یہ ہے کہ جماعتی وقفے میں مدات یکساں طور پر پھیلے ہوئے ہیں جبکہ حسابی اوسط کی صورت میں مفروضہ یہ ہے کہ ایک جماعتی وقفے کے عام مدات کی قدریں اس جماعتی وقفہ کے وسطی نقطہ کے مساوی ہوتی ہیں۔

تمثیل 2 :

ایک ڈپارٹمنٹل اسٹور کے مینیجر نے 200 واجب الوصول کھاتوں کے متعلق معلومات اکٹھا کیں جو کہ نادہند (delinquent) تھے۔ ہر کھاتے کے لیے ادائی کی تاریخ وجوب کے گزرنے کے بعد کے دنوں کو بھی اس نے نوٹ کیا تھا۔ اس کے بعد اس نے مواد کی گروہ بندی کی جس کو مندرجہ ذیل تعددی تقسیم میں ظاہر کیا گیا ہے:۔

مقررہ تاریخ وجوب کے بعد کے ایام	کھاتوں کی تعداد
30 - 44	40
45 - 59	45
60 - 74	40
75 - 89	25
90 - 104	25
105 - 119	20
120 - 134	5

حل

وسطانیہ کی تحسیب

مقررہ تاریخ وجوب کے گزرنے بعد دنوں کی تعداد	کھاتوں کی تعداد (f)	مجموعی تعدد "سے کم"	مجموعی تعدد "سے زیادہ"
30 - 44	40	40	200
45 - 59	45	85	160
60 - 74	**40**	**125**	**115**
75 - 89	25	150	75
90 - 104	25	175	50
105 - 119	20	195	25
120 - 134	5	200	5

یہاں پر $N/2 = 200/2 = 100$ ۔ اس کا مطلب ہے کہ وسطانیہ کے نیچے 100 مدات ہیں۔لہذا 74-60 وہ جماعت ہے جس میں وسطانیہ موجود ہے۔اس جماعت کی حقیقی انتہائیں ہیں : 59.5 to 74.5 ۔اب پہلے طریقے سے وسطانیہ کی تحسیب کیجئے۔

$$M_d = L + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$$

جہاں پر

$L = 59.5$
$c = 85$
$f = 40$
$i = 15$
$N = 200$

$$M_d = 59.5 + \frac{100 - 85}{40} \times 15$$
$$= 59.5 + (15/40) \times 15$$
$$= 59.5 + 225/40$$
$$= 59.5 + 5.625$$
$$= 65.125$$
$$\text{Median} = 65.1 \text{ days}$$

وسطانیہ = 65.1 دن

اب دوسرے طریقے سے وسطانیہ کی تحسیب کریں گے۔

$$M_d = U - \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$$

جہاں پر

$U = 74.5$
$f = 40$
$c = 75$
$i = 15$
$N = 200$

$$\therefore M_d = 74.5 - \frac{\frac{200}{2} - 75}{40} \times 15$$
$$= 74.5 - (25/40) \times 15$$
$$= 74.5 - 375/40$$
$$= 74.5 - 9.375$$
$$= 65.125$$

وسطانیہ ہے 65.1 دن۔

آپ تیسرا طریقہ استعمال کر کے وسطانیہ حاصل کر سکتے ہیں۔

$$M_d = 1 + \frac{U-1}{f}(m - C)$$

جہاں پر

$L = 59.5$
$u = 74.5$
$f = 40$
$m = N/2 = 200/2 = 100$
$c = 85$

$$M_d = 59.5 + \frac{74.5 - 59.5}{40}(100 - 85)$$
$$= 59.5 + (15/40) \times 15$$
$$= 65.125$$

لہذا وسطانیہ 65.1 دن ہے۔ آپ غور کر سکتے ہیں کہ تینوں طریقوں سے حاصل کی گئی وسطانیہ کی قدر یکساں ہے۔

تمثیل 3 :

مندرجہ ذیل آمدنی کی تقسیم سے وسطانیہ آمدنی معلوم کیجئے۔

ماہانہ آمدنی (روپے)	خاندانوں کی تعداد
100 سے کم	50
100 - 200	500
200 - 300	555
300 - 500	100
500 - 800	3
800 اور اس سے زیادہ	2

حل

ماہانہ آمدنی (روپیوں میں)	خاندانوں کی تعداد	مجموعی تعدد
100 سے کم	50	50
100 - 200	500	550
200 - 300	**555**	**1105**
300 - 500	100	1205
500 - 800	3	1208
800 اور زیادہ	2	1210

وسطانیہ کے نیچے $N/2$ مدات ہیں جس کا مطلب ہے $\frac{1,210}{2} = 605$ مدات اس کے نیچے ہیں' لہذا وسطانیہ 300 - 200 جماعت میں واقع ہے۔اب ادراج (Interpolation) کا ضابطہ استعمال کیجئے :۔

$$M_d = L + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$$

جہاں پر

$L = 200$
$c = 550$
$f = 555$
$i = 100$
$N = 1,210$

$$M_d = 200 + \frac{605 - 550}{555} \times 100$$
$$= 200 + (55/555) \times 100$$
$$= 200 + 9.91$$
$$= 209.91$$

لہذا ماہانہ وسطانیہ آمدنی ہے 209.91 روپے۔

آپ غور کر سکتے ہیں کہ اس تمثیل میں جماعتی وقفے غیر مساوی ہیں اور مواد کھلے کنارے کا ہے۔وسطانیہ کی تحسیب اس سے اثر پذیر نہیں ہوتی۔ فارمولے میں وقفے کا طول 'i' صرف وسطانیہ جماعت سے متعلق ہے۔

تمثیل 4

مندرجہ ذیل مواد سے وسطانیہ اجرت کا تعین کیجئے۔

"سے زیادہ" اجرتیں (روپے)	مزدوروں کی تعداد
20	58
40	54
60	48
80	38
100	22
120	10
140	3
160	0

حل

"سے زیادہ" اجرتیں (روپے)	مزدوروں کی تعداد (مجموعی تعدد)	سادہ تعدد
20	58	58 - 54 = 4
40	54	54 - 48 = 6
60	48	48 - 38 = 10
80	**38**	**38 - 22 = 16**
100	22	22 - 10 = 12
120	10	10 - 3 = 7
140	3	3 - 0 = 3
160	0	0

اس تمثیل میں مجموعی تعدد دیا گیا ہے۔ اس لیے ہم نے سادہ تعدد معلوم کیا ہے۔ اب N/2 ویں یعنی $\frac{58}{2} = 29$ مدیں وسطانیہ کے اوپر ہیں۔ اس لیے وسطانیہ '80 سے زیادہ' جماعت یعنی 100 - 80 میں واقع ہے۔ مندرجہ ذیل فارمولے کے استعمال سے ہم وسطانیہ کا ادراج (Interpolation) کر سکتے ہیں۔

$$M_d = U - \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$$

جہاں پر $U = 100$

$C = 22$

$f = 16$

$i = 20$

$$M_d = 100 - \frac{29 - 22}{16} \times 20$$
$$= 100 - (7/16) \times 20$$
$$= 100 - 8.75$$
$$= 91.25$$

لہذا وسطانیہ اجرت ہے 91.25 روپے

تمثیل 5

آپ کو مندرجہ ذیل نامکمل تعددی تقسیم دی گئی ہے۔ یہ معلوم ہے کہ کل تعداد 1,000 ہے اور وسطانیہ ہے 413.11 ۔ غائب تعددوں کو معلوم کیجئے :۔

قدریں	تعدد
300 - 325	5
325 - 350	17
350 - 375	80
375 - 400	-
400 - 425	326
425 - 450	-
450 - 475	88
475 - 500	9

حل

ہم فرض کرلیں گے کہ جماعت 400 - 375 کا تعدد F ہے۔اب جماعت 450 - 425 کا تعدد ہوگا: 1000-(525 - F) = 475 - F
(جہاں پر 525 دیئے گئے تعددوں کا حاصل جمع ہے)

قدریں	تعدد f	= cf مجموعی تعدد
300 - 325	5	5
325 - 350	17	22
350 - 375	80	102
375 - 400	F	102 + F
400 - 425	**326**	**428 + F**
425 - 450	475 - F	903
450 - 475	88	991
475 - 500	9	1000

چونکہ وسطانیہ کی قدر 413.11 دی گئی ہے، وسطانیہ جماعت 425 - 400 میں واقع ہونا چاہیئے۔

اب

$$M_d = 1 + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$$

جہاں پر

$L = 400$

$f = 326$

$C = 102 + F$

$i = 25$

$M_d = 413.11$

$$413.11 = 400 + \frac{500 - (102 + F)}{326} \times 25$$

$$413.11 - 400 = \frac{500 - 102 - F}{326} \times 25$$

$$13.11 = \frac{398 - F}{326} \times 25$$

$$13.11 \times 326 = (398 - F) \times 25$$

$$4{,}273.86 = 9{,}950 - 25F$$

$$25F = 5{,}676.14$$

$$F = 227.04$$

چونکہ تعدد کو صحیح عددی قیمت میں ہونا چاہیئے $F = 227$ اس لیے جماعت 400 - 375 کے لیے تعدد 227 ہے اور جماعت 450 تا 425 کے لیے تعدد $248 = 227 - 475$ ہے۔

11.4 وسطانیہ کی خاصیتیں Properties of Median

آپ نے وسطانیہ معلوم کرنے کے طریقے سیکھے۔اب ہم وسطانیہ کی خاصیتوں پر بحث کریں گے۔

(1) وسطانیہ کی ایک اہم خاصیت یہ ہے کہ وسطانیہ سے مطلق انحرافات (یعنی علامات کو نظر انداز کر کے) کا مجموعہ اقل ترین ہوتا ہے یعنی $\Sigma|x - Md|$ اقل ترین ہے۔یہ خاصیت مختلف عملی صورتوں میں وسطانیہ کے استعمال کو ضروری بنادیتی ہے۔مثال کے طور پر، مدات 21, 9, 8, 7, 5 پر توجہ دیجئے۔اس صورت میں وسطانیہ $\frac{(N+1)}{2}$ یعنی 8 ہے۔اب ہم (i) وسطانیہ سے (ii) کسی اور قدر جیسے 7 سے (iii) حسابی اوسط یعنی مطلق انحرافات معلوم کریں گے

$$\frac{(5+7+8+9+21)}{5}$$

مد x	$\lvert x - Md \rvert$ $\lvert x - 8 \rvert$	$\lvert x - 7 \rvert$	$\lvert x - \bar{x} \rvert$ $\lvert x - 10 \rvert$
5	3	2	5
7	1	0	3
8	0	1	2
9	1	2	1
21	13	14	11
جملہ	18	19	22

اگر آپ مندرجہ بالا جدول کا بغور مطالعہ کریں گے تو آپ کو معلوم ہوگا کہ اقل ترین حاصل جمع 18 ہے ، جو وسطانیہ سے مطلق انحرافات کا مجموعہ ہے۔

(2) یہ انتہائی قدروں سے متاثر نہیں ہوتا لیکن مدوں کی تعداد سے متاثر ہوتا ہے۔

(3) کھلے کناروں کی تقسیم کے لیے، وسطانیہ نہایت موزوں اوسط ہے۔مثال کے طور پر، چونکہ آمدنی کی تقسیم، کھلے کناروں کی تقسیم ہے، وسطانیہ آمدنی، زیادہ نمائندہ عدد ہے۔

(4) کیفیتی معلومات کے لیے، صرف وسطانیہ ہی شاید بہت موزوں مرکزی رجحان کا پیمانہ ہے۔

(5) وسطانیہ کا ترسیم کے ذریعہ سے تعین کیا جاسکتا ہے (اس کے متعلق آپ اس اکائی میں آگے چل کر مطالعہ کریں گے)

(6) یہ بآسانی محسوب کیا جاسکتا ہے اور آسانی سے سمجھا جاسکتا ہے۔بعض صورتوں میں بذریعہ معائنہ بھی اس کا تعین کیا جاسکتا ہے۔

11.5 وسطانیہ کی خوبیاں اور خامیاں Merits and Limitations of Median

آپ نے وسطانیہ کے معنی، تحسیب کے طریقے اور اس کی خاصیتوں کا مطالعہ کیا۔ اب ہم اس کی خوبیوں اور خامیوں پر نظر ڈالیں گے۔

■ خوبیاں (Merits)

(1) کھلے کنارے کی تقسیم مثلاً، آمدنی کی تقسیم کے لیے وسطانیہ، بہتر و نیز نمائندہ قدر کا حامل ہوتا ہے۔

(2) چونکہ وسطانیہ انتہائی مدات سے متاثر نہیں ہوتا، اس لیے بعض صورتوں میں اس کو حسابی اوسط پر ترجیح دی جاتی ہے کیونکہ حسابی اوسط انتہائی مدوں سے متاثر ہوتا ہے۔

(3) کیفیتی مظاہر (qualitative phenomena) کے اظہار کے لیے، وسطانیہ نہایت موزوں اوسط ہے۔

(4) چونکہ وسطانیہ کل مطلق انحرافات کو اقل ترین کرتا ہے اس لیے وسطانیہ اُن صورتوں میں قابل ترجیح ہے جبکہ کل جغرافیائی فاصلہ اقل ترین کرنا مطلوب ہو۔ مثال کے طور پر فرض کیجئے کہ ہندوستان میں تقریباً ایک خط مستقیم پر واقع پانچ مختلف شہروں کے، پانچ چوٹی کے منتظمین کی کانفرنس منعقد کرنی ہے۔ وہ شہر جو وسطانیہ فاصلے پر واقع ہے، کانفرنس کے لیے موزوں ترین مقام ہوگا۔

(5) ایک مخصوص برانڈ کے ٹائر کو خریدنے کا فیصلہ کرتے وقت، جبکہ ایک یا دو ٹائر ہی خریدنا مقصود ہو، وہ ٹائر جو زیادہ تر وسطانیہ کا مظہر ہے، قابل ترجیح ہے۔ اسی طرح سے جب کوئی واشنگ مشین خریدنا مطلوب ہو، اسی واشنگ مشین کو جس کی وسطانیہ حیات زیادہ ہے، اس مشین پر فوقیت دی جائے گی جس کی اوسط زندگی زیادہ ہے۔

■ خامیاں (Limitations)

(1) وسطانیہ مزید الجبرائی عمل کے لیے ناموزوں ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ ہم دو یا دو سے زیادہ گروہوں کا مجموعی وسطانیہ معلوم نہیں کر سکتے تاوقتیکہ ان گروہوں کے تمام مدات معلوم نہ ہوں۔

(2) کبھی کبھی اس کو غیر حساس پیمانہ بھی کہتے ہیں، کیونکہ یہ سلسلے کے تمام مدات پر مبنی نہیں ہوتا۔

(3) حسابی اوسط کی بہ نسبت، وسطانیہ نمونہ بندی تغیرات سے بہت زیادہ متاثر ہوتا ہے۔

(4) وسطانیہ کا تخمینی ضابطہ (فارمولہ)، ایک طرح سے اس مفروضہ کے تحت ایک ادراج ہے کہ وسطانیہ کی جماعت میں مدات یکساں منقسم ہیں جو کہ زیادہ صحیح نہیں ہے۔

(5) چند صورتوں میں وسطانیہ سے موہوم اور پر فریب تاثر پیدا ہو سکتا ہے کیونکہ اس کی قدر کا تعین سختی کے ساتھ وسطی مشاہدہ یا مشاہدوں کی قدر سے کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر لاٹریوں میں ایک ٹکٹ کے ذریعہ جیتے ہوئے انعام کی قدر صفر ہوتی ہے جب کہ تمام ٹکٹوں کو ملحوظ رکھا گیا ہو (50% سے زیادہ ٹکٹ پر انعام ملنے کا امکان نہیں رہتا)۔ انعام کی یہ وسطانی قدر لاٹریوں کے ذریعہ پیش کردہ انعامات کا تجزیہ کرنے میں معاون نہیں ہوتی کیونکہ مجوزہ انعامات کی کثیر تعداد میں صرف پہلا انعام ہی دلچسپی کا مرکز ہوتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ A

(1) مندرجہ ذیل مواد کے سٹ کے لیے وسطانیہ معلوم کیجئے۔

(a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256

.....

(b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$

.....

(2) مجموعی تعدد کی تخمیب اونچی اقدار کے لحاظ سے کی جاتی ہے تو مسلسل سلسلہ کے لیے وسطانیہ کے محسوب کرنے کا فارمولہ کیا ہے؟

.....

(3) دی گئی تعددی تقسیم میں، اگر جماعتی وقفوں کی چوڑائی (width) غیر مساوی ہو تو وسطانیہ کی تخمیب میں کون سے جماعتی وقفے کو آپ استعمال کریں گے؟

.....

(4) طلبہ کے ایک گروہ کا قد (انچوں میں) ذیل میں دیا گیا ہے۔ وسطانیہ محسوب کیجیے۔

61, 62, 62, 63, 61, 63, 64. 64, 60, 65, 63, 64, 65, 66, 64

.....

.....

اب یہ فرض کیا جائے کہ دوسرا گروہ جس کا قد 60, 66, 59, 68, 67 and 70 ہے سابقہ گروہ میں شامل کیا جائے تو مخلوط گروہ کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

(5) معاشیات میں مندرجہ ذیل نشانات کے تعددی تقسیم کا وسطانیہ حاصل کیجیے۔

نشانات :	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
طلبہ کی تعداد :	20	43	75	76	72	45	39	9	8	6

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(6) مندرجہ ذیل معلومات 100 نئے قسم کے برقی بلبوں کی زندگی (گھنٹوں میں) سے متعلق ہیں۔ ان کی وسطانیہ زندگی معلوم کیجیے۔

زندگی (گھنٹوں میں)	ناکام برقی بلب کی تعداد
1 - 50	2
51 - 100	8
101 - 150	15
151 - 200	20
201 - 250	25
251 - 300	20
301 - 350	10

(7) تحریر کیجیے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) وسطانیہ کا تعین کرنے سے پہلے مواد کو ترتیب دینا ضروری ہے۔

(ii) وسطانیہ کو کھلے کنارے کی تقسیم میں محسوب نہیں کیا جاسکتا۔

(iii) وسطانیہ کے محسوب کرنے میں تقسیم کے جماعتی وقفے یکساں ہو سکتے ہیں یا نہیں ہو سکتے۔

(iv) وسطانیہ سے انحرافات کا مجموعہ اقل ترین ہوتا ہے۔

(v) 16 مدات کے سٹ کے لیے وسطانیہ 8 ہے۔

11.6 تقسیمی قدریں Partition Values

جیسا کہ آپ جانتے ہیں وسطانیہ متغیرہ کی وسطی قدر ہے جب کہ مدات کو ان کی ضخامت (magnitude) کے لحاظ سے ترتیب وار لکھا جاتا ہے۔ اس طرح، وسطانیہ کسی سلسلہ کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس لیے اس کو مقام بندی اوسط کہا جاتا ہے۔ در حقیقت اس نوع کے دیگر پیمانے بھی موجود ہیں جو سلسلہ کو مزید مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ جیسے چار مساوی حصے، 10 مساوی حصے یا 100 مساوی حصے۔ ایسے پیمانوں کو عموماً تقسیمی قدریں کہتے ہیں جن کی تین قسمیں ہیں۔ (1) چوتھائیہ (2) عشریہ (3) صدویہ جو کہ بہ کثرت استعمال ہوتے ہیں لیکن یہ غیر مرکزی وقوع کے پیمانے ہیں۔ اب یکے بعد دیگر ہم ان پر بحث کریں گے۔

11.6.1 چوتھائیے Quartiles

کسی متغیرہ کی وہ قدریں جو کسی سلسلہ یا تقسیم کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہیں چوتھائیہ کہلاتی ہیں۔ چونکہ کسی متغیرہ کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرنے کے لیے تین نقاط کی ضرورت ہوتی ہے اس لیے تین چوتھائیے Q_1 ' Q_2 اور Q_3 محسوب کیے جاتے ہیں۔

پہلا چوتھائیہ (Q_1) اس کو زیریں چوتھائیہ بھی کہتے ہیں جو کسی متغیرہ کی وہ قدر ہے جس کے نیچے 25% اور اوپر 75% مشاہدات موجود رہتے ہیں۔

دوسرا چوتھائیہ **(Q_2)** کسی متغیرہ کی وہ قدر ہے، جو سلسلہ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ اس کا مطلب ہے، اس کے نیچے 50% اور اوپر 50% مشاہدات موجود رہتے ہیں۔ اس لیے Q_2 وسطانیہ کے مساوی ہے۔

تیسرا چوتھائیہ (Q_3) کسی متغیرہ کی وہ قدر ہے جس کے نیچے 75% اور اوپر 25% مشاہدات موجود رہتے ہیں۔

یہ واضح ہے کہ $Q_1 < Q_2 < Q_3$ ۔

چوتھائیوں کی تحسیب Computation of Quartiles

(i) غیر مسلسل سلسلہ (Discrete series) معلوم انفرادی قدروں والا سلسلہ ہے جس میں مواد کو بڑھتی ہوی ترتیب میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$Q_1 = \text{Size of } \frac{N+1}{4} \text{ th item}$$

$$Q_2 = \text{Size of } \frac{2(N+1)}{4} \text{ th item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } \frac{3(N+1)}{4} \text{ th item}$$

(ii) مسلسل سلسلہ یعنی جماعتی وقفوں کے ساتھ مواد (Continuous series)

$$Q_J = L + \frac{\frac{JN}{4} - C}{f} \times i$$

$$J = 1, 2, 3$$

جہاں پر L = چوتھائیہ جماعت کی زیریں انتہا

c = چوتھائیہ جماعت سے قبل والی جماعت کا اضافہ پذیر تعدد

f = چوتھائیہ جماعت میں سادہ تعدد

i = چوتھائیہ جماعت کا جماعتی وقفہ

11.6.2 عشریے Deciles

متغیرہ کی وہ قدریں جو سلسلے یا تقسیم کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہیں "عشریہ" کہلاتی ہیں۔ ہر حصہ، کل مشاہدات کے 10% حصے پر مشتمل ہوتا ہے۔ ظاہری طور پر ایسی دس اقدار ہوتی ہیں جن کو D_1 ' D_2 ' ..... D_9 سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ ان کو پہلا عشریہ، دوسرا عشریہ وغیرہ کہتے ہیں۔ پانچواں عشریہ (D_5) وسطانیہ کے مماثل ہوتا ہے۔

عشریہ کی تحسیب Computation of Deciles

(i) Discrete Series (i.e. Individual Values Known).	غیر مسلسل سلسلے (یعنی معلوم انفرادی قدروں والے)
$D_j = \text{Size of } j\frac{(N+1)}{10} \text{ th item.} \quad J = 1 \text{ to } 9$	$D_J = J\frac{(N+1)}{10}$ واں مد جہاں J = 1, 2, ...9
(ii) Continuous Series (i.e.. Data with Class Intervals)	مسلسل سلسلہ (یعنی مواد جماعتی وقفوں کے ساتھ)
$D_j = 1 + \frac{\frac{JN}{10} - C}{f} \times i.$ th item $\quad J = 1 \text{ to } 9$	$D_J = 1 + \frac{\frac{JN}{10} - C}{f} \times i$ واں مد جہاں J = 1 تا 9

Where C is the cumulated frequency preceding the jth decile class, the other have usual meaning.

جہاں پر 'J'th ویں عشری جماعت سے قبل والی جماعت کا تعدد ہے اور دیگر علامتوں کے معنی حسب معمول ہیں۔

11.6.3 صدویے Percentiles

متغیرہ کی وہ قدر جو کسی دیے گئے سلسلے یا تقسیم کو 100 برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہے، صدویہ کہلاتی ہے۔ ہر صدویہ مشاہدات کی کل تعداد کے 1% پر مشتمل ہوتا ہے۔ صدویہ Pj متغیرہ کی وہ قدر ہے جو مشاہدات کی کل تعداد کے j% پر واقع ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر

P_{10} = متغیرہ کی وہ قدر جہاں تک مشاہدات کی ٹھیک 10% تعداد واقع ہوتی ہے۔ یہ D_1 کے برابر ہے۔

P_{20} = متغیرہ کی وہ قدر جہاں تک مشاہدات کی ٹھیک 20% تعداد واقع ہوتی ہے۔

P_{25} = متغیر کی وہ قدر جہاں تک مشاہدات کی ٹھیک 25% تعداد واقع ہوتی ہے۔ یہ Q_1 کے مساوی ہے۔

P_{50} = متغیرہ کی وہ قدر جہاں تک مشاہدات کی ٹھیک 50% تعداد واقع ہوتی ہے۔ یہ Q_2 ' D_5 یا وسطانیہ کے برابر ہوتی ہے۔

اسی طرح $P_{75} = Q_3$

صدویہ کی تحسیب Computation of Percentiles

(i) Discrete Series (i.e., Individual Values Known).

$$P_j = \text{Size of } \frac{j(N+1)}{100} \text{ th item}$$

e.g. $P_{45} = \text{Size of } \frac{45(N+1)}{100} \text{ th item}$

(ii) Continuous Series (i.e., Data with Class Intervals)

$$P_j = 1 + \frac{\frac{JN}{100} - C}{f} \times i \qquad J = 1 \text{ to } 99$$

صدویہ کی تحسیب

غیر مسلسل سلسلہ (یعنی معلوم انفرادی قدروں والا سلسلہ)

$$\text{واں مد} \quad \frac{J(N+1)}{100} = P_j$$

مثلاً $\frac{45(N+1)}{100} = P_{45}$ واں مد

مسلسل سلسلہ (یعنی مواد جماعتی وقفوں کے ساتھ)

$$99 \text{ تا } 1 = J \qquad i \times \frac{\frac{JN}{100} - C}{f} + 1 = P_j$$

جہاں پر C ' j ویں صدویہ جماعت سے قبل والی جماعت کا مجموعی تعدد ہے۔ باقی علامات کے مفہوم حسب معمول ہیں۔

آیئے اب ہم تقسیمی قدروں (Partition values) کی تحسیب کو تمثیل کے ذریعہ سمجھنے کی کوشش کریں گے۔

تمثیل 6

کسی کلاس ٹسٹ میں 16 طلبا کے نشانات (اعظم ترین نشانات 20) حسب ذیل ہیں۔ Q_1 ' P_{35} اور D_9 معلوم کیجئے۔

2, 3, 6, 7, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 14, 15, 16, 18, 19

حل

نشانات پہلے ہی سے بڑھتی ہوئی ترتیب میں دیئے گئے ہیں۔

$$Q_1 = \text{Size of } \frac{N+1}{4} \text{th item}$$

$$= \frac{16+1}{4} \text{th item}$$

$$= 4\frac{1}{4} \text{th item}$$

$$\therefore Q_1 = 4\text{th item} + \frac{1}{4}(5\text{th item} - 4\text{th item})$$

$$= 7 + \frac{1}{4}(10-7)$$

$$= 7 + \frac{3}{4}$$

$$= 7.75$$

$$P_{35} = \text{Size of } \frac{35(N+1)}{100} \text{th item}$$

$$= \frac{35(16+1)}{100} \text{th or } 5 \times \frac{95}{100} \text{th item}$$

$$\therefore P_{35} = 5\text{th item} + \frac{95}{100}(6\text{th item} - 5\text{th item})$$

$$= 10 + \frac{95}{100}(10-10)$$

$$= 10 + 0$$

$$= 10$$

$$D_9 = \text{Size of } \frac{9(N+1)}{10} \text{th item} = \frac{9(16+1)}{10} \text{th item on } 15\frac{3}{10}$$

$$D_9 = 15\text{th item} + \frac{3}{10}(16\text{th item} - 15\text{th item})$$

$$= 18 + \frac{3}{10}(19-18)$$

$$= 18 + 0.3$$

$$= 18.3$$

غور طلب بات ہے کہ کوئی ایسا طالب علم نہیں ہے جس نے 7.75 یا 18.3 نشانات حاصل کیے ہیں۔ جب کسی مد کے سائز میں کسر شامل ہوتی ہے تو اس قسم کی مفروضہ قدریں ظاہر ہوتی ہیں۔ ایسی قدروں کی ترجمانی اس صورت میں حق بجانب ہوتی ہے جبکہ دیا گیا مواد مسلسل ہو نہ کہ غیر مسلسل۔

تمثیل 7

مندرجہ ذیل جدول احمد آباد شہر میں 600 خاندانوں کی ماہانہ آمدنی کی تقسیم سے متعلق ہے۔

ماہانہ آمدنی (روپے)	خاندان
75 سے کم	69
75 - 150	167
150 - 225	207
225 - 300	65
300 - 375	58
375 - 450	24
450 سے زیادہ	10

(a) Q_3 ' P_{75} ' P_{25} ' D_5 ' D_2 اور وسطانیہ معلوم کیجئے۔

(b) زیر مشاہدہ خاندانوں کے مرکزی 50% کی آمدنی کی انتہاؤں کو معلوم کیجئے۔

(c) نتائج کی تعبیر دیجئے۔

حل:

ماہانہ آمدنی (روپے)	خاندان	اضافہ پذیر تعدد
75 سے کم	69	69
75 - 150	167	236
150 - 225	207	443
225 - 300	65	508
300 - 375	58	566
375 - 450	24	590
450 سے زیادہ	10	600

(a) D_2 کے نیچے $2N/10$ مدات ہیں۔اس کا مطلب ہے $2 \times 600/10 = 120$ مدات نیچے ہیں۔اس لیے D_2 ' 75 - 150 کی جماعت میں واقع ہوتا ہے۔

$$D_2 = L + \frac{\frac{2N}{10} - C}{f} \times i$$

$$= 75 + \frac{120 - 69}{167} \times 75$$

$$= 75 + \frac{51}{167} \times 75$$

$$= 75 + 22.9 = 97.9$$

$\therefore$ D_2 97.90 روپے ہے۔

D_5 کے نیچے $5N/10$ مدات ہیں جس کا مطلب ہے $5 \times 600/10 = 300$ یعنی 300 مدات نیچے۔اس لیے D_5 ، 150 - 225 جماعت میں واقع ہے۔

اب $$D_5 = L + \frac{\frac{5N}{10} - C}{f} \times i$$

$$= 150 + \frac{300 - 236}{207} \times 75$$

$$= 150 + \frac{64}{207} \times 75$$

$$= 150 + 23.19$$

$$= 173.19$$

$\therefore$ D_5 173.19 ہے

P_{25} کے نیچے $25N/100$ یعنی $25 \times 600/100 = 150$ مدات ہیں۔اس لیے P_{25} جماعت 75-150 میں واقع ہے۔

Now $$P_{25} = L + \frac{\frac{25N}{100} - C}{f} \times i$$

$$= 75 + \frac{150 - 69}{167} \times i$$

$$= 75 + \frac{81}{167} \times 75$$

$$= 75 + 36.38$$

$$= 111.38$$

P_{25} کی قدر 111.38 روپے ہے

P_{75} کے نیچے $75N/100$ یعنی $75 \times 600/100 = 450$ مدات ہیں۔اس لیے وہ 225-300 کی جماعت میں واقع ہوتی ہیں۔

Now $$P_{75} = L + \frac{\frac{75N}{100} - C}{f} \times i$$

$$= 225 + \frac{450 - 443}{65} \times 75$$

$$= 225 + 8.077$$

$$= 233.077$$

P_{75} کی قدر 233.08 روپے ہے۔

Q_3 کے نیچے $3N/4$ مدات ہیں یعنی $3 \times 600/4 = 450$ مدات ہیں۔ P_{75} کے نیچے بھی 450 مدات ہیں اس لیے Q_3 اور P_{75} یکساں ہونا چاہیے۔

$$Q_3 = \text{Rs. } 233.08$$

وسطانیہ کے نیچے $N/2$ مدات ہیں یعنی $600/2 = 300$ مدات ہیں۔اس لیے یہ جماعت 150-225 میں واقع ہے

Now Md $$= L + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$$

$$= 150 + \frac{300 - 236}{207} \times 75$$

$$= 150 + \frac{64 \times 75}{207}$$

$$= 150 + 23.19$$

$$= 173.19$$

= 173.19 جو D_5 کے مساوی ہے۔

لہذا وسطانیہ 173.19 روپے ہے۔

(b) مرکزی 50% مشاہدات، Q_1 سے Q_3 کے درمیانی وقفوں میں دیے گیے ہیں کیونکہ Q_1 کے نیچے 25% مدات ہیں اور Q_3 کے اوپر 25% مدات ہیں۔

یہاں پر Q_1 = مساوی ہے P_{25} جو مساوی ہے 111.38 روپے اور Q3 مساوی ہے 233 روپے۔ زیر مشاہدہ خاندانوں کی مرکزی 50% آمدنی کی مطلوبہ انتہائیں 111.38 روپے سے 233.08 تک ہیں۔

(c) تعبیر (Interpretation)

D_2 = 20% خاندانوں کی ماہانہ آمدنی 97.90 روپے یا اس سے کم ہے اور 80% خاندانوں کی ماہانہ آمدنی 97.90 روپے یا اس سے زیادہ ہے۔

D_5 = 50% خاندانوں کی ماہانہ آمدنی 173.19 روپے یا اس سے کم اور 50% کی ماہانہ آمدنی 173.19 روپے یا اس سے زیادہ ہے۔

P_{25} = 25% خاندانوں کی ماہانہ آمدنی 111.38 روپے ہے یا کم اور 75% خاندانوں کی آمدنی 111.38 روپے یا زیادہ ہے۔

P_{75} = 75% خاندانوں کی ماہانہ آمدنی 233.08 روپے یا کم اور 25% خاندانوں کی آمدنی 233.08 روپے ہے یا زیادہ۔

11.7 وسطانیہ اور دیگر تقسیمی قدروں کا ترسیمی تعین

Graphic Determination of Median and Other Partition Values

آپ نے وسطانیہ اور دیگر تقسیمی قدروں کے تعین کرنے کے طریقے سیکھے۔ درحقیقت ان کو ترسیمی طریقے سے بھی معلوم کیا جاسکتا ہے۔ وسطانیہ کو ترسیمی طور پر مندرجہ ذیل دو طریقوں سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(1) "سے کم" اوجائیو منحنی اور "سے زیادہ" اوجائیو منحنی کی ترسیم کی جاتی ہے۔ ان دونوں منحنیوں کے نقطہ تقاطع سے، محور x پر عمود کھینچا جاتا ہے۔

(2) صرف ایک اوجائیو منحنی یعنی "سے کم" اوجائیو کھینچی جاتی ہے۔ محور X پر متغیرہ کو اور مجموعی تعدد کو محور y پر لیا جاتا ہے۔ بعد ازاں عدد N/2 کا تعین کیا جاتا ہے۔ اوجائیو منحنی پر اس سے ایک افقی خط کھینچا جاتا ہے۔ اس نقطے سے جس پر یہ منحنی سے ملتا ہے، محور X پر عمود کھینچا جاتا ہے۔ وہ نقطہ جس پر یہ محور X سے ملتا ہے، وسطانیہ ہے۔

اسی طرح ترسیم کے ذریعہ دوسری تقسیمی قدروں کو بھی معلوم کیا جاسکتا ہے۔ چوتھائیہ Q_j کے لیے محور Y پر عدد JN/4 کا تعین کیا جاتا ہے۔ عشریہ (decile D_j) کے لیے JN/10 اور صدویہ (Percentile P_j) کے لیے JN/100 نقطے، محور پر تعین کیے جاتے ہیں۔ بعد ازاں وسطانیہ کے تعین کے مقررہ طریقہ کار کو استعمال کیا جاتا ہے۔

تمثیل 8

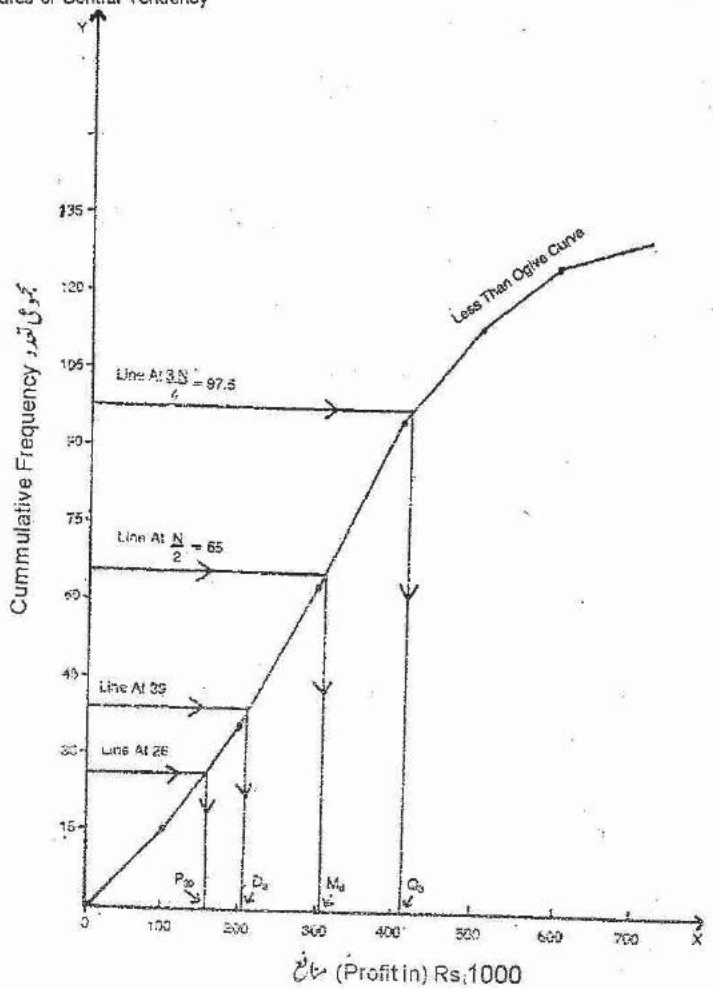
مندرجہ ذیل معلومات سے ترسیم کے ذریعہ وسطانیہ Q_3 , P_{20} , D_3 معلوم کیجئے۔

فی دُکان منافع ('000 روپیوں سے کم)	دُکانوں کی تعداد
100	15
200	35
300	63
400	95
500	113
600	125
700	130

حل

فی دوکان منافع ('000 روپوں سے کم)	دکانوں کی تعداد
100	15
200	35
300	63
400	95
500	113
600	125
700	130

اب متغیرہ X کی قدروں کو محور X پر لیجئے اور متعلقہ مجموعی تعدد (c.f.) کو محور y پر لیجئے۔ بعدازاں "سے کم" اوجائیو منحنی کی ترسیم کیجیے۔ شکل 11.1 پر کا بغور مطالعہ کیجیے اور معلوم کیجیے کہ کس طرح "سے کم" اوجائیو منحنی ترسیم کی جاتی ہے۔



شکل 11.1

فی دُوکان منافع کے لیے 'سے کم' نفع 1000 روپوں میں اوجائیو منحنی اور D_3، P_{20}، Q_3 کا تعین

وسطانیہ کے لیے پہلے N/2 (یعنی 65 = 130/2) کے محور کا y پر تعین کیا جاتا ہے اور بعد میں N/2 (یعنی 65) سے ایک افقی خط کھینچا جاتا ہے۔ اس نقطے سے جس پر افقی خط، منحنی سے ملتا ہے، محور x پر عمود کھینچا جاتا ہے۔ یہ نقطہ '307' پر ملتا ہے جو وسطانیہ ہے۔ اس لیے وسطانیہ منافع 307 ہزار روپے ہے۔

D_3 کے لیے : پہلے 3 x 130/10 = 39 یعنی 39 کے محور کا Y پر تعین کیا جاتا ہے اور محور X پر D_3 کی متناظر/جوابی قدر (Corresponding value) 213 کو پڑھا جاتا ہے۔ اس لیے منافع کا D_3 ' 213 ہزار روپے ہے۔

P_{20} کے لیے : پہلے 20 x 130/100 = 26 کے محور کا y پر تعین کیا جاتا ہے۔ وسطانیہ کی طرح آگے بڑھتے ہوئے، ترسیم کے محور X پر آپ P_{20} کی قدر کو پڑھیں گے جو 155 ہے۔ اس لیے P_{20} ، 155 ہزار روپے ہے۔ اسی طرح ' Q_3 = 414 ہزار روپے۔ ترسیم کرنے اور پیمائش کو پڑھنے کی چھوٹی خطاؤں سے قطع نظر، ترسیمی قدریں، فارمولوں کے ذریعہ حاصل شدہ قدروں سے متعلق ہوتی ہیں۔

اپنی معلومات کی جانچ B

(1) تقسیمی قدروں کی تعریف کیجئے۔ شماریات میں مستعمل تقسیمی قدروں کے نام لکھیے۔

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(2) مختلف تقسیمی قدروں کو معلوم کرنے کے لیے ضابطے (فارمولے) لکھیے۔

.....

.....

.....

.....

(3) تحریر کیجئے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) تقسیمی قدر کے لیے ترسیمی اور تحسیبی طریقوں سے یکساں نتائج نہیں برآمد ہوتے۔

(ii) P_{70} کا مطلب ہے 70% مدات، اس نقطے سے کم قدروں کے حامل ہوتے ہیں۔

(iii) تمام عشریے (deciles) صدویات (Percentiles) میں شامل ہیں۔

(iv) تمام چوتھائیے (quartiles) ، عشریات میں شامل ہیں۔

(v) وہ نقطہ جس کے اوپر 30% مدات موجود ہوں D_3 کہلاتا ہے۔

(vi) وسطانیہ تیسرے چوتھائیہ کے مساوی ہے۔

(vii) دیئے گئے سلسلے میں $Q_1 = 30.5$ اور $Q_3 = 25.5$ ہے۔

(viii) کسی متغیرہ کی 70% قدریں ، 70 سے کم ہیں،لہذا $D3 = 70$

(ix) تیسرا عشریہ 30 واں صدویہ ہوتا ہے۔

(4) خالی جگہوں کو پُر کیجئے۔

(i) وسطانیہ سے مطلق انحراف کا مجموعہ ..... ہے۔

(ii) وسطانیہ ..... (کون سا) چوتھائیہ..... (کون سا) عشریہ ..... (کون سا) صدویہ ہے۔

(iii) کسی ماہانہ آمدنی کی تقسیم کے لیے $P_{30} = 125$ ہے۔اس کا مطلب ہے .....% خاندانوں کی آمدنی 125 روپے ہے یا .....۔

(iv) متغیرہ کی 60% قدریں (values) 70 سے کم ہیں لہذا 70 = ...

(v) دی گئی آمدنی کی تقسیم میں مرکزی 50% تقسیمی آمدنی کی انتہاؤں کے رینج (range) ..... سے ..... تک کے درمیان ہوتی ہے۔

11.8 Let Us Sum Up خلاصہ

وسطانیہ مقام بندی اوسط ہے، جو متغیرہ کی نصف ترین قدر ہوتی ہے جس کے نیچے نصف اور اوپر نصف مدات واقع ہوتے ہیں۔ غیر گروہ بند اور گروہ بند دونوں قسم کے مواد سے وسطانیہ محسوب کرنے کے لیے مختلف ضابطے (فارمولے) ہیں۔ اسی طرح گروہ بند مواد کے لیے غیر مسلسل اور مسلسل سلسلوں کے لیے الگ الگ طریقے ہیں۔ وسطانیہ کی چند اہم خاصیتیں ہیں۔(1) وسطانیہ سے مطلق انحرافات کا مجموعہ اقل ترین ہوتا ہے۔ (2) یہ انتہائی مدات (Items) سے متاثر نہیں ہوتا۔ (3) یہ کھلے کناروں کی تقسیم کے لیے موزوں تر اوسط ہے۔ (4) وسطانیہ کی مدد سے کیفیتی مظاہر (qualitative phenomena) کو بہتر طریقے سے سمجھا جاسکتا ہے اور (5) اس کا ترسیمی طریقہ سے بھی تعین کیا جاسکتا ہے۔

وسطانیہ مندرجہ ذیل حالات میں نہایت کار آمد ہوتا ہے : (1) جبکہ حسابی اوسط انتہائی مدات سے ممکنہ طور پر مسخ ہو جاتا ہو۔ (2) جبکہ مطالعہ کیفیتی مظاہر سے متعلق ہو۔ (3) جبکہ جغرافیائی فاصلے کو کم سے کم کرنا مقصود ہو۔ (4) جبکہ گھریلو استعمال کی اشیا جیسے واشنگ مشین وغیرہ سے متعلق خریداری کا فیصلہ کرنا ہو۔ وسطانیہ کی کچھ خامیاں بھی ہوتی ہیں جیسے (1) مزید الجبرائی عمل کے لیے ناموزوں ہے۔ (2) غیر حساس (3) نمونہ بندی میں عدم استحکام وغیرہ۔ بعض اوقات یہ پُر فریب اور غیر حقیقی پیمانہ بھی ثابت ہو سکتا ہے۔

وسطانیہ کی طرح، مقام بندی کے دیگر پیمانے بھی موجود ہیں، جن کو تقسیمی قدریں کہتے ہیں اور جو سلسلے کو کئی اعداد تک مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ وہ ہیں: (1) چوتھائیے (2) عشریے (3) صدویے۔ چوتھائیے متغیرہ کی وہ تین قدریں ہیں جو کسی سلسلہ کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہیں جن میں سے ہر ایک حصہ 25% کل مشاہدوں کا احاطہ کرتا ہے۔ عشریے متغیرہ کی وہ نو (9) قدریں ہیں جو سلسلہ کو مساوی دس حصوں میں تقسیم کرتی ہیں جن میں سے ہر ایک حصہ کل مشاہدوں کے 10% کا احاطہ کرتا ہے۔ صدویے متغیرہ کی وہ قدریں ہیں جو متغیر کو 100 برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہیں جن میں سے ہر ایک حصہ، کل مشاہدوں کا 1% حصہ ہوتا ہے۔ وسطانیہ کو محسوب کرنے کے لیے اختیار کردہ طریقوں کو ہی تقسیمی قدروں کے محسوب کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے۔ وسطانیہ اور تقسیمی قدروں کا اوجائیو منحنی کے ذریعہ بھی تعین کیا جاسکتا ہے۔ "سے کم" اوجائیو منحنی بھی وسیع طور پر اس مقصد کے لیے استعمال کی جاتی ہے۔

11.9 کلیدی الفاظ اور علامات Key Words and Symbols

عشریے (Deciles) : متغیرہ کی وہ قدریں جو سلسلہ یا تقسیم کو دس مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہیں۔

"سے کم" اوجائیو (Less than Ogive) : مجموعی تعدد منحنی جو کہ افقی عمود پر سب سے چھوٹی جماعتی سرحد سے شروع ہو کر بتدریج اوپر کی طرف بڑھتے ہوئے سب سے بڑی جماعتی حد پر ختم ہو جاتی ہے جو تقسیم کی جملہ تعدد کے مساوی ہوتی ہے۔

وسطانیہ (Median) : متغیرہ کی وہ قدر جو سلسلہ کو دو (2) برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔

تقسیمی قدریں (Partition Values) : متغیرہ کی وہ قدریں جو تقسیم کو ایک مقررہ تعداد کے مساوی حصوں میں منقسم کرتی ہیں۔

صدویے (Percentiles) : متغیرہ کی وہ قدریں جو سلسلہ یا تقسیم کو 100 برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہیں۔

مقام بندی اوسط : ضخامت (magnitude) کے لحاظ سے ترتیب شدہ کسی سلسلہ میں دیے گئے مشاہدے کے محل وقوع پر مبنی اوسط۔

چوتھائیے (Quartilles) : متغیرہ کی وہ قدریں جو سلسلہ یا تقسیم کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہیں۔

علامات کی فہرست (List of Symbols)

تقسیمی قدروں کو اکائی 10 میں دیئے گئے علامات کی فہرست کے علاوہ، وسطانیہ اور دیگر تقسیمی قدروں کو ظاہر کرنے کے لیے مندرجہ ذیل علامات استعمال کی جاتی ہیں۔ یہ فہرست انہیں خطوط پر مبنی ہے جو اکائی 10 میں دیے گیے ہیں۔

مجموعی تعدد	C, c, f, F, Σf_i
j واں عشریہ	Dj
وسطانیہ سے مدوں کا انحراف	$X - M_d$, d, D.
وسطانیہ کے گروہ کا تعدد	f, f_1, f_m, f_{md},
وسطانیہ کے گروہ یا اس گروہ کی نچلی انتہا جس میں تقسیم کی قدر واقع ہوتی ہے کی وسطانیہ	l, l_1, L, L_m : M_d; M, $\overline{m}$
صدویہ	P_i
زیریں چوتھائیہ	Q_1
بالائی چوتھائیہ	Q_3
وسطانیہ گروہ کی اوپری انتہا یا وہ گروہ جس میں کوئی تقسیمی قدر واقع ہوی ہے	u, l_1, U, Um :

11.10 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات Answers to Check Your Progress

(1 A) 16 (a) 0.18 (b)

(2) $M = U - \frac{\frac{N}{2} - C'}{f}$

(3) وسطانیہ جماعت کے جماعتی وقفہ پر غور کیا جاتا ہے

4) پہلی صورت 63 ۔ دوسری صورت 64

5) 30

6) 210.5

7) (i) صحیح (ii) غلط (iii) صحیح (iv) غلط (v) غلط

3 B) (i) غلط (ii) صحیح (iii) صحیح (iv) غلط (v) غلط

(vi) غلط (vii) غلط (viii) غلط (ix) صحیح

4) (i) قلیل ترین (ii) دوسرا ، پانچواں ، 50واں(پچاسواں)

(iii) 30% کم (iv) D_6 یا P_{60} (v) Q_1 اور Q_3

11.11 امتحانی سوالات / مشقیں Terminal Questions/Exercises

سوالات

(1) وسطانیہ کیا ہے؟اس کی خوبیاں اور خامیاں واضح کیجیے۔

(2) وسطانیہ محسوب کرنے کے طریقوں کی وضاحت کیجیے۔

(3) اوسط کے پیمانوں کے لحاظ سے حسابی اوسط اور وسطانیہ کا تقابل کیجیے۔

(4) چوتھائیے، عشریے اور صدویے: ان کا تقابل کیجیے۔

مشقیں

(1) کسی یونیورسٹی لائبریری کے کاؤنٹر سے 10 مختلف دنوں میں جاری کی گئی کتابوں کی تعداد ہے:
400, 75, 94, 100, 102, 80, 70, 75, 95, 180۔اس مواد کا ایک بہتر نمائندہ اوسط محسوب کیجیے۔

(جواب : وسطانیہ 97.5)

(2) موٹر کار حادثوں کے بیمہ مطالبوں سے متعلق معلومات نیچے دی گئی ہیں۔وسطانیہ معلوم کیجیے۔

مطالبہ کی رقم (روپے)	تعداد
150 سے کم	52
150 - 199.99	108
200 - 249.99	230
250 - 299.99	528
300 - 349.99	663
350 - 399.99	816
400 - 449.99	993
450 - 499.99	825
500 اور اس سے زیادہ	650

(جواب : 402 روپے تقریباً)

(3) حسابی اوسط کی قدر 45.5 لے کر، مندرجہ ذیل مواد سے وسطانیہ محسوب کیجیے۔

نشانات	تعداد طلبا
70 - 80	10
60 - 70	10
50 - 60	20
40 - 50	---
30 - 40	12
20 - 30	7
10 - 20	8
0 - 10	5

(جواب : 50)

(4) مندرجہ ذیل مواد سے ترسیم کے ذریعہ وسطانیہ محسوب کیجیے۔ درمیانی 80% طلبہ کے حاصل کردہ نشانات کے رینج (range) حاصل کیجیے۔

نشانات 60 میں	طلبا کی تعداد
10 سے کم	4
20 سے کم	10
30 سے کم	30
40 سے کم	40
50 سے کم	47
60 سے کم	50

(جواب : 27.5 ، 11.7 سے 47.1 تک)

(5) 500 طلبہ کے گروہ کے لیے، 100 میں سے حاصل کردہ نشانات کے متعلق مندرجہ ذیل معلومات دستیاب ہیں

Median = 45, Q_1 = 23, Q_3 = 73, D_4 = 38, P_{63} = 60, P_{90} = 83 اور 8% طلبہ نے 12 سے کم نشانات حاصل کیے۔ 3% طلبہ نے 95 سے زاید نشانات حاصل کیے۔ جماعتی وقفوں میں مواد کی جدول بندی کیجیے۔

جواب :

نشانات :	0-12	12-23	23-38	38-45	45-60	60-73	73-83	83-95	95-100
تعداد طلبا :	40	85	75	50	65	60	75	35	15

(6) غائب تعدادات معلوم کیجیے جب کہ وسطانیہ 25 ہے۔

روزانہ خرچ (روپے)	خاندان
0 - 10	14
10 - 20	--
20 - 30	27
30 - 40	--
40 - 50	15

(جواب : 23 ' 21)

(7) ایک لانڈری دو مختلف قسم کی واشنگ مشینیں استعمال کرتی ہے۔ گزشتہ تجربے کی بنیاد پر مندرجہ ذیل نتائج درج کیے گئے ہیں۔

برانڈ	وسطانیہ زندگی	اوسط زندگی
A	6,500 گھنٹے	6,000 گھنٹے
B	6,000 گھنٹے	6,500 گھنٹے

اگر دونوں برانڈوں کی قیمت یکساں ہے تو لانڈری کو کون سی مشین خریدنا چاہیے؟

(8) مندرجہ ذیل مواد سے Q_1 ' P_{30} اور D_8 محسوب کیجیے۔

پہنے ہوئے کالر کا سائز :	14"	14.5"	15"	15.5"	16"
طلبہ کی تعداد :	20	37	43	26	14

(جواب : $Q_1 = 14.5"$; $P_{30} = 14.5"$; $D_8 = 15.5"$)

(9) مندرجہ ذیل مواد سے ترسیم کے ذریعہ D_6 ،وسطانیہ ، P_{20} ، Q_1 اور Q_2 کی قدروں کا تعین کیجیے۔ متعلقہ فارمولوں کے استعمال کے ذریعہ ان کی جانچ اور تصدیق کیجیے۔

یومیہ اجرت (روپے)	کام کرنے والوں کی تعداد
10 سے کم	5
10 - 20	25
20 - 30	40
30 - 40	70
40 - 50	90
50 - 60	40
60 - 70	20
70 سے زیادہ	

(جواب : $Q_3 = 49.4$ $Q_1 = 30.7$ $P_{20} = 27.5$ Median 41.1 $D_6 = 44.4$)

نوٹ : یہ سوالات اس اکائی کے سمجھنے میں مددگار ثابت ہوں گے۔ ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجیے لیکن آپ کے جواب یونیورسٹی کو نہ بھیجیے۔ یہ آپ کی مشق کے لئے ہیں۔

اکائی 12 کثیریہ

UNIT : 12 - MODE

Structure	ساخت	
Objectives	مقاصد	12.0
Introduction	تمہید	12.1
What is Mode?	کثیریہ کیا ہے؟	12.2
Computation of Mode	کثیریہ کی تحسیب	12.3
Ungrouped Data	12.3.1 غیر گروہ بند مواد	
Grouped Data	12.3.2 گروہ بند مواد	
Smooth Data	12.3.3 ہموار مواد	
Empirical Method	12.3.4 تجرباتی طریقہ	
Graphical Determination of Mode	کثیریہ کا ترسیمی تعین	12.4
Merits and Limitations of Mode	کثیریہ کی خوبیاں اور خامیاں	12.5
Some Illustrations	چند تمثیلات	12.6
Let Us Sum Up	خلاصہ	12.7
Key Words and Symbols	کلیدی الفاظ اور علامات	12.8
Answers to Check Your Progress	اپنی معلومات کی جانچ: جوابات	12.9
Terminal Questions/Exercises	امتحانی سوالات / مشقیں	12.10

12.0 مقاصد Objectives

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:۔

- کثیریہ (mode) کی تعریف کر سکیں۔
- مختلف قسم کے مواد کے لیے کثیریہ کی تحسیب کر سکیں۔
- کثیریہ کا ترسیم کے ذریعہ تعین کر سکیں۔
- کثیریہ کی خامیوں اور استعمال کا صحیح ادراک کر سکیں۔

12.1 تمہید Introduction

جیسا کہ آپ جانتے ہیں، مرکزی رجحان کے پیمانوں میں، کچھ پیمانے ایسے ہیں جن کا دارومدار مواد کے تمام مدات پر ہوتا ہے اور اور کچھ ایسے ہیں جو مقام بندی کے اواسط ہیں۔ اکائی 10 میں آپ نے حسابی اوسط کے متعلق سیکھا جو مواد کے تمام مدوں پر مبنی ہوتا ہے۔ اکائی 11 میں وسطانیہ کو زیر بحث لایا گیا جو مقام بندی کا اوسط ہے۔ اس اکائی میں آپ کثیریہ پر بحث کریں گے جو کہ مقام بندی کا ایک دوسرا اوسط ہے۔ آپ کثیریہ کے مفہوم، طریقہ تحسیب، ترسیمی تعین، خامیوں اور استعمال کا مطالعہ کریں گے۔

12.2 کثیریہ کیا ہے؟ What is Mode?

کثیریہ بھی مرکزی رجحان کا پیمانہ ہے۔ کثیریہ متغیرہ کی وہ قدر ہے جو مواد کے سٹ میں کثرت کے ساتھ واقع ہوتی ہے۔ انگریزی اصطلاح موڈ (Mode) کا ماخذ ہے فرانسیسی لفظ 'le mode' جس کا مطلب ہے فیشن۔ اس لیے کثیریہ نہایت عام یا نہایت فیشن ایبل قدر سمجھی جاتی ہے۔

کثیریہ سے ہمیشہ متغیرہ کی وہ قدر مراد لی جاتی ہے جو بہ کثرت واقع ہوتی ہے لیکن یہ ہر تعددی تقسیم کے لیے قطعاً صحیح نہیں ہے۔ یہ متغیرہ کی وہ قدر ہوتی ہے، جس کے اطراف دیگر مدات بہت کثیر تعداد میں مرکوز ہونے کا رجحان رکھتے ہیں۔ یہ کسی قدر کے اطراف تعدد کے ارتکاز کے مرکز کو ظاہر کرتا ہے لیکن حسابی اوسط کی طرح یہ مرکز جاذبہ نہیں بلکہ وسطانیہ کی مانند مقام بندی کا ایک پیمانہ ہے۔ اس کو عام طور پر Mo کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر ایک دوکاندار کو لیجئے جو جوتے فروخت کرتا ہے۔ وہ ایسے جوتوں کی سائزوں میں دلچسپی رکھے گا جن کی عام طور پر زیادہ مانگ ہو۔ یہاں پر اس صورت حال میں، حسابی اوسط ایک ایسے سائز کی نشاندہی کر سکتا ہے جو کسی بھی شخص کے لیے موزوں نہ ہو۔ تقسیم کی ناہمواری کی وجہ سے وسطانیہ بھی کوئی نمائندہ سائز پیش کرنے سے قاصر رہتا ہے۔ البتہ اس صورت میں صرف کثیریہ ہی ایک ایسا اوسط ہے جو کسی قریب ترین سائز کے انتخاب میں مدد کر سکتا ہے جن کے لیے حکم دیا جا سکتا ہے۔

12.3 کثیریہ کی تحسیب Computation of Mode

گروہ بند مواد اور غیر گروہ بند مواد کے لیے کثیریہ کی تحسیب کے طریقے مختلف ہوں گے۔ اب ہم ان طریقوں پر علاحدہ غور کریں گے۔

12.3.1 غیر گروہ بند مواد Ungrouped Data

غیر گروہ بند مواد کے لیے صرف سادہ معائنہ کے ذریعہ کثیریہ بآسانی معلوم کیا جا سکتا ہے۔ وہ قدر جو مواد میں کثرت سے واقع ہوتی ہے، کثیریہ ہوگی۔ مثال کے طور پر 10 لڑکوں کی عمریں (برسوں) میں حسب ذیل ہیں۔ 5, 6, 4, 10, 7, 6, 9, 2, 8, 6۔ یہاں پر عدد 6 تین مرتبہ دہرایا گیا ہے۔ اس لیے کثیریہ عمر ہے 6 سال۔

کچھ صورتوں میں کثیریہ کا سرے سے وجود نہیں رہتا مثلاً مواد کے سٹ 5, 10, 15, 20, 25, 30 پر غور کیجیے۔ اس صورت میں کثیریہ موجود نہیں ہے کیونکہ کوئی بھی عدد مکرر واقع نہیں ہو رہا ہے۔

کچھ صورتوں میں کثیریہ کی قدر ایک سے زیادہ ہو سکتی ہے۔ مثال کے طور پر ایک ٹائپسٹ نے 10 صفحات ٹائپ کیے جس میں فی صفحہ غلطیوں کی تعداد حسب ذیل ہے۔ 4, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 5 اس صورت میں اعداد 1, 2 دونوں مساوی تعداد میں دہرائے گئے ہیں۔ لہٰذا اس صورت میں کثیریہ دو ہیں یعنی 1 اور 2۔ اسی طرح تقسیم کے تین یا تین سے زاید کثیریہ بھی ہو سکتے ہیں۔ مرکزی رجحان کے پیمانہ کے طور پر کثیریہ کی اہمیت کم رہتی ہے۔ غیر گروہ بند مواد کے لیے کثیریہ کا استعمال نہایت محدود ہے۔

12.3.2 گروہ بند مواد Grouped Data

غیر مسلسل تقسیم اور مسلسل تقسیم کے لیے کثیریہ معلوم کرنے کے طریقے مختلف ہیں۔ اب ان طریقوں پر تفصیل کے ساتھ غور کریں گے۔

غیر مسلسل سلسلہ Discrete Series

غیر مسلسل سلسلے کی صورت میں یعنی جب انفرادی مدوں کی اقدار معلوم ہوں تو کثیریہ بذریعہ معائنہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ معائنہ کے ذریعہ آپ معلوم کر سکتے ہیں کہ کسی متغیرہ کے اطراف مدات بھاری تعداد میں مرکوز ہیں۔ مثال کے طور پر مندرجہ ذیل تعددی تقسیم پر توجہ دیجیے۔

مدوں کا سائز	:	20	21	22	23	24	25	
تعدد	:	15	20	25	45	30	12	

اس تقسیم میں 23 کا تعدد سب سے زیادہ ہے جس سے معلوم ہوتا ہے کہ مدات کا ارتکاز 23 کے اطراف زیادہ ہے لہذا کثیریہ 23 ہے۔

اس قسم کے سلسلے میں کثیریہ کو محسوب کرنا نہایت آسان ہے۔ مشکل اس وقت پیدا ہوتی ہے جب کہ دو یا دو سے زائد ہمسایہ وقفوں میں تقریباً مساوی ارتکاز پایا جاتا ہے یعنی کسی تعدد اور اس سے اوپر یا نیچے کے تعددوں کے درمیان ہلکا سا فرق ہوتا ہے۔ کثیریہ جماعت کے مقام کے تعین میں، ایسی صورتوں میں، گروہ بندی اور تجزیہ کی ضرورت پڑتی ہے۔

گروہی جدول : گروہی جدول میں چھ کالم ہوتے ہیں جیسا کہ نیچے بتلایا گیا ہے:۔

کالم 1 : یہ جماعتی تعددوں سے متعلق ہے، جسے ہر جماعت کے مقابل لکھا جاتا ہے۔

کالم 2 : اس کالم میں تعددوں کو دو دو کی تعداد میں گروہ بند کیا جاتا ہے اور حاصل جمع معلوم کر کے اعظم ترین حاصل جمع پر نشان لگاتے ہیں یا اس کی دائرہ بندی کرتے ہیں۔

کالم 3 : اوپر سے پہلے تعدد کو چھوڑ کر، باقی تعددوں کو پھر سے دو دو کی تعداد میں گروہ بند کر کے اعظم ترین حاصل جمع پر نشان لگاتے ہیں۔

کالم 4 : اوپر سے شروع کر کے تعددوں کی تین تین کی تعداد میں گروہ بندی کی جاتی ہے اور حاصل جمع معلوم کیا جاتا ہے۔ اعظم ترین حاصل جمع پر نشان لگایا جاتا ہے۔

کالم 5 : پہلے تعدد کو چھوڑ کر، باقی تعددوں کو تین تین کی تعداد میں گروہ بند کیا جاتا ہے اور اعظم ترین حاصل جمع پر نشان لگایا جاتا ہے۔

کالم 6 : اوپر سے پہلے دو تعددوں کو نظر انداز کر کے بقیہ تعددوں کے تین تین کی گروہ بنائے جاتے ہیں۔ ان گروہوں کے میزانات کو جمع کر کے اعظم ترین حاصل جمع کو نشان زد کیا جاتا ہے۔

تجزیاتی جدول **Analysis Table** : گروہ بندی جدول تیار کرنے کے بعد، تجزیاتی جدول تیار کی جاتی ہے۔ یہ دُہری ہوتی ہے : (1) عمودی (یعنی تنے stubs)، جہاں پر گروہ بندی جدول میں حاصل کالمی اعداد لیے جاتے ہیں، (2) افقی (یعنی سرخیاں captions) جہاں پر متغیرہ کی قدریں (یا جماعتوں کی اقدار) لی جاتی ہیں۔ اب گروہی جدول کو لیجیے جہاں پر ہر کالم میں اعظم ترین تعددوں کو نشان زد کر کے ان کو دائرہ بند کیا گیا ہے۔ ان دائرہ بند تعددوں کو باری باری سے متغیرہ کی متعلقہ قدروں کے ساتھ لیجیے۔ تجزیاتی جدول میں ان قدروں کے تحت مناسب کالم نمبر سے متعلقہ صف میں شماری سلاخیں لگائی جاتی ہیں۔ تجزیاتی جدول کے ہر کالم میں لگائی گئی شماری سلاخوں کی میزان معلوم کی جاتی ہے۔ ان میزانوں کی اعظم ترین قدر کو نشان زد کیا جاتا ہے۔ اس سے متعلقہ متغیرہ کی قدر، کثیریہ ہوگی یا کثیریہ جماعت ہوگی۔ گروہی اور تجزیاتی جدولوں کی تیاری کو ہم ایک مثال کے ذریعہ سمجھیں گے۔

تمثیل 1

طلبہ کے حاصل کردہ نشانات پر مندرجہ ذیل معلومات کے لیے کثیریہ (Mo) معلوم کیجیے:۔

نشانات	:	55	60	61	62	63	64	65	66	68	70
طلبہ کی تعداد	:	4	6	5	10	20	22	24	6	2	1

حل :

آپ غور کریں گے کہ اعظم ترین تعدد (یعنی 24) اور اس سے پہلے کے دو تعددوں (یعنی 22 اور 20) کے درمیان فرق بہت کم ہے۔ اعظم ترین تعدد کے بعد کا تعدد (یعنی 6) بھی بہت چھوٹا ہے۔ اس لیے کثیریہ جماعت معلوم کرنے کے لیے گروہ بندی لازمی ہے۔

گروہ بندی جدول (Grouping Table)

Marks	Col.I	Col.2	Col.3	Col.4	Col.5	Col.6
55	4		x		x	x
60	6	10		15		
61	5		11		21	
62	10	15				35
63	20		30	(52)		
64	22	(42)			(66)	
65	(24)		(46)			(52)
66	6	30		32		
68	2		8		9	
70	1	3		x		x

تجزیاتی جدول (Analysis Table)

Col.No	Marks									
	55	60	61	62	63	64	65	66	68	70
1							1			
2					1	1				
3						1	1			
4				1	1	1				
5					1	1	1			
6						1	1	1		
Total				1	3	5	4	1		

تجزیاتی جدول میں اعظم ترین حاصل جمع 5 ہے جس کا متعلقہ مد 64 ہے۔اس لیے کثیریہ (M_o) 64 ہے۔غور کیا جائے کہ اعظم ترین تعدد (جیسا کہ مواد میں بتلایا گیا ہے) 65 کے لیے ہے، جبکہ گروہ بندی اور تجزیہ جدول میں تعددوں کا ارتکاز 64 کے اطراف ہے۔لہذا کثیریہ کی صحیح قدر ہے 64۔

مسلسل سلسلہ (یعنی جماعتی وقفوں کے ساتھ مواد)

مسلسل سلسلے کی صورت میں جس میں شروع سے آخر تک مساوی وقفے ہوتے ہیں، کثیریہ کو محسوب کرنے کے لیے دو اہم مراحل سے گذرنا پڑتا ہے:

مرحلہ **1** : کثیریہ جماعت کا تعین کرنے کے لیے گروہ بندی جدول اور تجزیاتی جدول تیار کیجئے۔بالکل اسی طرح جیسے غیر مسلسل سلسلہ میں کیا جاتا ہے۔طریقہ کار میں تھوڑا سا اختلاف یہ ہے کہ دی گئی تعددی تقسیمات کی مختلف جماعتوں کو عمودی طور پر لیا جائے گا۔

مرحلہ **2** : کثیریہ جماعت کا تعین کرنے کے بعد، مندرجہ ذیل فارمولوں کو استعمال کر کے اوراج (Interpolation) کے ذریعہ کثیریہ (M_o) معلوم کیا جائے گا۔

(a) $$M_o = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

جہاں پر L = کثیریہ جماعت کی نچلی انتہا

i = جماعتی وقفہ

$f_1 - f_o = \Delta_1$

$f_1 - f_2 = \Delta_2$

f_1 = کثیریہ جماعت کا تعدد

f_o = کثیریہ جماعت سے ماقبل جماعت کا تعدد

f_2 = کثیریہ جماعت کے مابعد جماعت کا تعدد

مندرجہ بالا فارمولہ میں Δ_1 اور Δ_2 کی قدروں کو درج کرنے سے :۔

$$M_o = L + \frac{f_1 - f_o}{(f_1 - f_o) + (f_1 - f_2)} \times i$$

$$= L + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times i$$

نوٹ : اگر $(2f_1 - f_o - f_2)$ صفر ہو تو ضابطہ بے معنی ہو جائے گا۔ اگر شمار کنندہ یا نسب نما میں سے کوئی ایک منفی ہو جائے تو فارمولے سے صحیح نتیجہ برآمد نہ ہوگا۔ اس صورت میں ہمیں مندرجہ ذیل فارمولہ اختیار کرنا ہوگا۔

$$M_o = L + \frac{|f_1 - f_o|}{|f_1 - f_o| + |f_1 - f_2|} \times i$$

جہاں پر $|f_1 - f_2|$ اور $|f_1 - f_o|$ کا مطلب، فرق کی مطلق قدریں ہوگا یعنی علامات کو نظر انداز کر کے لیا گیا فرق۔

(b) کثیریہ جماعت کی اوپری انتہا کو لے کر بھی کثیریہ محسوب کیا جاسکتا ہے:

$$M_o = u - \frac{f_1 - f_2}{(f_1 - f_o) + (f_1 - f_2)} \times i$$

(c) جہاں پر کثیریہ جماعت ، اعظم ترین تعدد والی جماعت سے مختلف ہو تو مندرجہ ذیل فارمولہ نہایت موزوں ہو سکتا ہے :

$$M_o = L + \frac{f_2}{f_o + f_2} \times i$$

نوٹ :

(1) اگر تعددی تقسیم کی پہلی جماعت ہی کثیریہ جماعت ہو تو f_o کو صفر لیا جاتا ہے۔ اگر کثیریہ جماعت، آخری جماعت ہو تو f_2 کو صفر لیا جاتا ہے۔

(2) یہ فارمولے اسی صورت میں قابل عمل ہوں گے جب کہ تقسیم میں جماعتی وقفے مساوی ہوں۔ ایسا کیوں ہے؟ اس کی تشریح نہایت آسان ہے۔ اگر سائز 10 اور 20 رکھنے والے دو جماعتی وقفوں کی تعددات بالترتیب 15 اور 18 ہوں تو بظاہر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ تعدد 18 ، تعدد 15 سے زیادہ ہے۔ لیکن کثیریہ کا تعلق مدوں کے ارتکاز سے ہے۔ پہلے گروہ کے لیے ارتکاز 15/10 یعنی 1.5 مدات فی اکائی جماعتی وقفہ کا طول۔ جبکہ دوسری صورت میں یہ صرف 18/20 یعنی 0.9 مدات فی اکائی جماعتی وقفہ کا طول۔ اس لیے کثیریہ کو معلوم کرنے کے نقطہ نظر سے، سائز 20 کے جماعتی وقفہ کا تعدد 18، سائز 10 کے جماعتی وقفہ کے تعدد 15 سے کم ہے۔ اس لیے تعددوں کا راست تقابل اسی وقت ممکن ہے جبکہ جماعتی وقفے مساوی ہوں۔

(3) ان تقسیمات کے لیے جن کے جماعتی وقفے غیر مساوی ہوں، پہلے ان کے جماعتی وقفے مساوی کیے جاتے ہیں۔ اس مفروضہ کے ساتھ کہ تعددات یکساں تقسیم شدہ ہیں یا گروہوں کو باہم مجتمع کر کے حسب معمول فارمولہ کا استعمال کیا جاتا ہے۔

تمثیل 2

مندرجہ ذیل تعددی جدول کے لیے، کثیریہ معلوم کیجیے۔

اداشدہ ماہانہ کرایہ (روپوں میں)	کرایہ ادا کرنے والے خاندانوں کی تعداد
20 - 40	6
40 - 60	9
60 - 80	11
80 - 100	14
100 - 120	20
120 - 140	15
140 - 160	10
160 - 180	8
180 - 200	7
	100

حل :

معائنہ سے کثیریہ جماعت بطور 120 - 100 ظاہر ہوتی ہے، لیکن گروہ بندی سے اس کی تصدیق کر لی جائے گی۔

گروہ بند جدول (Grouping Table)

Mothly Rent Rs.	Col.1	Col.2	Col.3	Col.4	Col.5	Col.6
20 - 40	6	15	x	26	x	x
40 - 60	9		20			x
60 - 80	11	25			34	
80 - 100	14		(34)	(49)		(45)
100 - 120	(20)	(35)			(45)	
120 - 140	15		25			33
140 - 160	10	18				
160 - 180	8		15	25	x	
180 - 200	7	x			x	x

Analysis Table (تجزیاتی جدول)

	Monthly Rent (Rs.)								
Col.	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
1					I				
2					I	I			
3				I	I				
4				I	I	I			
5					I	I	I		
6			I	I	I				
Total			1	3	6	3	I		

چونکہ اعظم ترین حاصل جمع 6 ہے، کثیریہ جماعت ہوگی 120 - 100

فارمولے کے اطلاق سے :۔

$$M_o = L + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times i$$

$$= 100 + \frac{20 - 14}{2(20) - 14 - 15} \times 20$$

$$= 100 + \frac{6}{11} \times 20$$

$$= 100 + 10.91$$

$$= 110.91$$

$$= 110.91$$

اس لیے ماہانہ کرایہ کا کثیریہ ہوگا 110.91 روپے

تمثیل 3

مندرجہ ذیل مواد سے کثیریہ معلوم کیجیے۔

سائز	تعداد
0 - 9	3
10 - 19	4
20 - 29	8
30 - 39	7
40 - 49	6
50 - 59	3

حل

معائنہ سے، کثیریہ کی جماعت کا تعین مشکل ہے۔ اس لیے گروہ بندی کا سہارا لینا پڑے گا۔

گروہ بندی جدول (Grouping Table)

Size	Col.I	Col.2	Col.3	Col.4	Col.5	Col.6
0 - 9	3		x		x	x
10 - 19	4	7		15		x
20 - 29	(8)		12		(19)	
30 - 39	7	(15)				(21)
40 - 49	6		(13)	(16)	x	
50 - 59	3	9	x		x	x

تجزیاتی جدول (Analysis Table)

Col.No.	0 - 9	10 - 19	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59
1			I			
2			I	I		
3				I	I	
4				I	I	
5			I	I		
6			I	I	I	
Total			4	5	3	

تجزیاتی جدول سے ظاہر ہے کہ کثیریہ کی جماعت 30 - 39 ہے لیکن اعظم ترین تعدد، جماعت 29 - 20 میں واقع ہے۔اس لیے کثیریہ کی تحسیب کے لیے نہایت موزوں فارمولہ حسب ذیل ہے:

$$M_o = L + \frac{f_2}{f_o + f_2} \times i$$

$$= 29.5 + \frac{6}{8+6} \times 10 \quad (29.5 \text{ حقیقی انتہا})$$

$$= 29.5 + \frac{60}{14}$$

$$= 29.5 + 4.29 = 33.79$$

اس لیے کثیریہ ہے 33.8۔ آپ نوٹ کریں گے کہ اگر مندرجہ ذیل ضابطے سے کثیریہ حاصل کیا جائے تو مختلف نتیجہ بر آمد ہوگا۔

$$M_o = L + \frac{|f_1 - f_o|}{|f_1 - f_o| + |f_1 - f_2|} \times i$$

$$= 29.5 + \frac{|7-8|}{|7-8| + |7-6|} \times 10$$

$$= 29.5 + \frac{1}{1+1} \times 10$$

$$= 29.5 + \frac{10}{2}$$

$$= 34.5$$

آپ نوٹ کریں کہ اس طریقے کے تحت کثیریہ 34.5 ہے جب کہ پچھلے طریقے کے تحت یہ 33.8 ہے۔ اگر آپ فارمولہ $M_o = l + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times i$ استعمال کریں گے تو نسب نما صفر ہو جائے گا اور شمار کنندہ منفی ہو گا اسی لیے ، یہ ضابطہ نا قابل استعمال ہے۔ یہ بات قابل غور ہے کہ حسابی اوسط اور وسطانیہ کے برعکس، کثیریہ معلوم کرنے کے مختلف طریقے مختلف نتائج بر آمد کرتے ہیں۔

12.3.3 ہموار مواد Smooth Data

جب مواد تقریباً ہموار حرکت کا مظاہرہ کر رہا ہو تو اس کو ہموار مواد کہتے ہیں۔اس قسم کے مواد کا کثیریہ کسی ضابطے کا استعمال کیے بغیر آسانی کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔اس کو ایک آسان حسابی طریقہ کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ہموار مواد کے لیے کثیریہ محسوب کرنے میں مندرجہ ذیل قواعد استعمال کیے جاتے ہیں۔اگر $f_o = f_2$ یعنی کثیریہ جماعت کا تعدد اور اس کی ہمسایہ جماعتوں کے تعدادات مساوی ہوں، تو کثیریہ جماعت کے دو انتہائی حدود کا وسطی نقطہ کثیریہ ہو گا۔ مندرجہ ذیل تمثیل کا بغور مطالعہ کیجیے :۔

سائز x :	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40-50	50-60	60-70
تعدد f :	1	6	15	20	15	6	1

چونکہ اعظم ترین تعدد 20 ہے، کثیریہ جماعت ہے 40 - 30 چونکہ اعظم ترین تعدد کے ہمسایہ پر دو تعدادات مساوی ہیں (یعنی 15) ، کثیریہ 30 اور 40 کا سادہ حسابی اوسط ہو گا۔

لہذا $M_o = \frac{30 + 40}{2} = 35$

آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ آیا اس فارمولے سے حاصل شدہ کثیریہ کی قیمت وہی ہے جو اس سے پہلے گروہ بند مواد کے لیے مجوزہ طریقے سے حاصل کی گئی ہے۔جب کبھی $f_o = f_2$ اور f_o اور f_2 ،دونوں، f_1 سے کم تر ہوں تو ہمیشہ یہی واقع ہو گا۔ جب $f_o \neq f_2$ (یعنی کثیریہ جماعت کے تعدد سے متصل دونوں تعدادات مساوی نہ ہوں) اور ہمسایہ تعدد اور کثیریہ تعدد میں فرق بہت زیادہ بڑا نہ ہو تو کثیریہ جماعت کی اوپری انتہا (U) اور نچلی انتہا (L) کے وزنی اوسط کے برابر کثیریہ کی قدر ہوتی ہے۔یہاں پر کثیریہ جماعت کے اوپر اور نیچے کی طرف واقع ہونے والے تعدادات وزن کا کام کرتے ہیں۔

اس لیے $M_o = \frac{Lf_o + Uf_2}{f_o + f_2}$

اس کو سمجھنے کے لیے مندرجہ ذیل مثال پر غور کیجیے۔

سائز :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
تعدد :	500	610	740	748	745	690	500

یہاں پر کثیریہ جماعت ہے 40 - 30 ، جس کا تعدد (f_1) 748 ہے جو اعظم ترین ہے۔اس کے دو ہمسایہ تعدادات ہیں 740(f_o) اور 745 (f_2) جو مساوی نہیں ہیں اور f_1 سے ان کا فرق بھی زیادہ نہیں ہے۔کثیریہ جماعت ہے 40 - 30 ' L = 30 اور U = 40۔

$$\therefore M_o = \frac{30 \times 740 + 40 \times 745}{740 + 745}$$
$$= \frac{52,000}{1,485}$$
$$= 35.02$$

اس فارمولے سے اخذ کردہ نتیجہ وہی ہو گا جو ضابطہ یعنی فارمولہ $M_o = L + \frac{f_2}{f_o + f_2} \times i$ سے حاصل ہوتا ہے۔

تمثیل 4

عمر (برسوں میں) :	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
تعداد اشخاص :	50	70	80	180	150	120	70	50

حل

اعظم ترین تعدد، جماعت 35-40 میں ہے لیکن تعدد کا ارتکاز جماعت 40-45 کے اطراف نظر آتا ہے۔ اس لیے تعدد کی جماعت کا تعین کرنے کے لیے ہم گروہ بندی کریں گے۔

(گروہ بندی جدول)

Ages	Col.I	Col.2	Col.3	Col.4	Col.5	Col.6
20 - 25	50		x		x	x
		120				x
25 - 30	70		150	200		
30 - 35	80	260			330	
35 - 40	(180)		(330)			(410)
40 - 45	150	(270)		(450)		
45 - 50	120		190		(340)	
50 - 55	70	120		x		240
55 - 60	50		x	x	x	

غور کیا جائے کہ یہاں کالم 5, 4, 3, 2 اور 6 (یعنی چھ کالموں میں 5 مرتبہ) جماعت 45 - 40 کا اعظم ترین تعدد (5) مرتبہ آیا ہے اور جماعت 40 - 35 کا صرف 4 مرتبہ۔ اس کی آپ تجزیاتی جدول سے تصدیق کر سکتے ہیں

فارمولے کے استعمال سے :۔

$$M_o = L + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times i$$

$$M_o = 40 + \frac{150 - 180}{2 \times 150 - 180 - 120} \times 5 = 40 + \frac{-30}{0} \times 5$$

چونکہ $2f_1 - f_o - f_2 = 2 \times 150 - 180 - 120 = 0$ ۔ اس لیے ہم کثیریہ معلوم نہیں کر سکتے۔ چنانچہ مندرجہ ذیل فارمولہ استعمال کیا جاسکتا ہے۔

$$M_o = 1 + \frac{|f_1 - f_o|}{|f_1 - f_o| + |f_1 - f_2|} \times i$$

$$= 40 + \frac{|150 - 180|}{|150 - 180| + |180 - 120|} \times 5$$

$$= 40 + \frac{30}{30 + 60} \times 5 = 40 + \frac{5}{3}$$

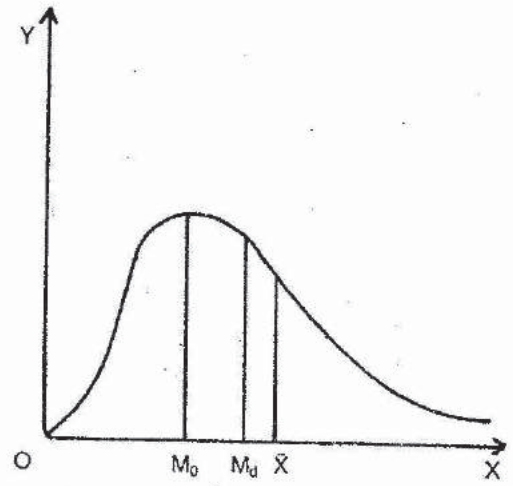
$$= 40 + 1.67 = 41.67$$

لہذا کثیریہ عمر (model Age) = 41.67

12.3.4 تجربی طریقہ Empirical Method

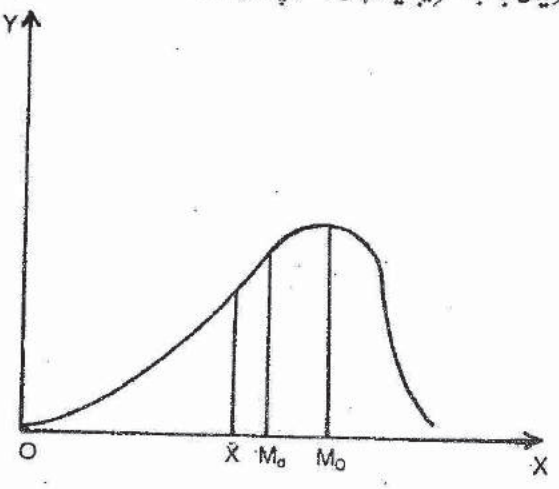
متشاکل تقسیم (Symmetrical distribution) میں (جو کہ سکشن 12.33 میں لی جاچکی ہے) حسابی اوسط، وسطانیہ اور کثیریہ کی قدریں باہم مطابق ہوتی ہیں۔ آپ اس کی تصدیق کرسکتے ہیں۔ لیکن غیر متشاکل تقسیم کی صورت میں (یعنی جب مرکزی جماعت سے مساوی فاصلہ کے تعدوات مساوی نہ ہوں) تو دو امکانات ہوتے ہیں۔

(1) جب نچلی قدروں میں زیادہ ارتکاز ہو تو اس قسم کی تقسیم کو مثبت خمیدہ تقسیم کہتے ہیں جیسا کہ شکل 12.1 میں بتایا گیا ہے۔ اس قسم کی تقسیم دائیں ہاتھ کی جانب طویل دُم دار ہوتی ہے۔ اس قسم کی تقسیم میں، حسابی اوسط کی قدر اعلیٰ ترین اور کثیریہ کی قدر اقل ترین ہوتی ہے اور وسطانیہ، حسابی اوسط اور کثیریہ کے درمیان واقع ہوتا ہے حسابی اوسط اور وسطانیہ کے درمیان فرق، حسابی اوسط اور کثیریہ کے درمیان فرق کا تقریباً ایک تہائی ہوتا ہے۔



شکل 12.1 مثبت خمیدہ تقسیم (Positively Skewed Distribution)

(2) اعلیٰ قدروں میں مدوں کا ارتکاز زیادہ ہو سکتا ہے۔ ایسی تقسیم کو منفی خمیدہ تقسیم کہا جاتا ہے۔ شکل 12.2 کا بغور مطالعہ کیجیے۔ آپ نوٹ کریں گے کہ اس قسم کی تقسیم میں بائیں ہاتھ کی جانب طویل دُم ہوتی ہے۔ یہاں پر حسابی اوسط اقل ترین ہوگا، کثیریہ اعظم ترین ہوگا اور وسطانیہ، حسابی اوسط سے کثیریہ کی جانب تقریباً ایک تہائی فاصلہ پر واقع ہوگا۔



شکل 12.2 منفی خمیدہ تقسیم (Negatively Skewed Distribution)

مندرجہ بالا دونوں صورتوں میں صراحت کردہ اوسط، کثیریہ اور وسطانیہ کے مابین موجود ربط کو کارل پیرسن (Karl Pearson) نے مندرجہ ذیل فارمولے کے استعمال سے ثابت کیا تھا۔

Mean - Mode = 3 (Mean - Median)

This gives : Mode = Mean - 3(Mean - Median)

= 3 Median - 2 Mean

or $M_o = 3M_d - 2\bar{X}$

حسابی اوسط۔ کثیریہ = 3 (حسابی اوسط۔ وسطانیہ)

کثیریہ = حسابی اوسط۔ 3 (حسابی اوسط۔ وسطانیہ)

= 3 (وسطانیہ۔ 2 حسابی اوسط)

یا $M_o = 3M_d - 2\bar{x}$

یہ ایک تجربی تعلق ہے کیونکہ یہ ضابطہ معتدل خمیدہ مواد کے لیے اکثر صحیح ثابت ہوتا ہے۔ یہ انتہائی صورتوں میں صحیح نہیں ہو سکتا۔ اس کا ریاضیاتی ثبوت ممکن نہیں۔ اس صورت میں جب کہ کثیریہ کی جامع تعریف موجود نہ ہو تو اس کی قدر اس فارمولے سے تجربی طور پر معلوم کی جا سکتی ہے۔

تمثیل 5

مندرجہ ذیل جدول سے کثیریہ معلوم کیجیے :۔

مدات کا سائز	تعداد
40 - 49	7
50 - 59	9
60 - 69	10
70 - 79	6
80 - 89	13
90 - 99	10
100 - 109	12
110 - 119	7

حل

بذریعہ معائنہ، کثیریہ کی جماعت واضح نہیں ہے۔ اس لیے گروہ بندی اور تجزیہ کیا جانا چاہیے۔

(گروہ بندی جدول)

Size	Col.1	Col.2	Col.3	Col.4	Col.5	Col.6
40 - 49	7		x		x	x
		16				
50 - 59	9		19	26		x
					25	
60 - 69	10					
		16				(29)
70 - 79	6		19			
80 - 89	(13)			(29)		
		(23)			(35)	
90 - 99	10		(22)			
100 - 109	12			x		(29)
		19				
110 - 119	7		x	x	x	

تجزیاتی جدول

Col.No.	60 - 69	70 - 79	80 - 89	90 - 99	100-109	110-119
1			I			
2			I			
3				I		
4		I		I	I	
5			I	I		
6	I	I	I	I	I	I
Total	1	2	5	5	3	1

تجزیاتی جدول میں اعظم ترین حاصل جمع 5 دو مرتبہ واقع ہوا ہے۔اس صورت میں کثیریہ کی تعریف واضح نہیں ہے۔اس لیے فارمولہ $M_o = 3M_d - 2\bar{X}$ کے استعمال سے تجربی طور پر کثیریہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔یہاں پر آپ جانچ و تصدیق کر سکتے ہیں کہ

وسطانیہ = 83.84 اور $\bar{X}$ = 80.14

$M_o = 3(83.84) - 2(80.14)$

$= 251.52 - 168.28$

$= 91.24$

Mode = 91.24

اپنی معلومات کی جانچ A

(1) کثیریہ کی تعریف کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

(2) کثیریہ کو محسوب کرنے کے مختلف فارمولے بیان کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

.....

(3) حسابی اوسط، وسطانیہ اور کثیریہ کے درمیان تجربی ربط سے کیا مراد ہے؟

.....

.....

.....

.....

(4) کسی تعددی تقسیم کے لیے، حسابی (Mean) اوسط سے 26.8 اور وسطانیہ (Median) 27.9 ہے۔ کثیریہ معلوم کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

.....

(5) تحریر کیجیے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) کسی تقسیم میں کثیریہ ' قدر یکتا (unique value) ہوتی ہے۔

(ii) کثیریہ (Mode) کو محسوب کرنے میں انتہائی اقدار کو نظر انداز کیا جاتا ہے۔

(iii) مواد کا کثیریہ ' حسابی اوسط (arithmetic mean) سے بڑا نہیں ہو سکتا۔

(iv) کثیریہ ' کو ہمیشہ اعظم ترین تعدد والی جماعت میں واقع ہوتا ہے۔

(v) اگرچہ کثیریہ کو مواد سے محسوب کیا جاتا ہے لیکن یہ ریاضیاتی اوسط (Mathematical average) نہیں ہے۔

(6) خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

(i) جب ..... نقطہ ارتکاز معلوم کرنا مقصود ہو تو کثیریہ کو ترجیح دی جاتی ہے۔

(ii) کثیریہ اور وسطانیہ ..... کے پیمانے ہیں۔

(iii) مندرجہ ذیل سلسلہ میں دو کثیریے موجود ہیں: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 0, وہ..... اور ..... ہیں۔

(iv) کسی سلسلہ میں دو یا زیادہ ہمسایہ جماعتوں (neighbouring classes) میں مساوی ارتکاز موجود ہے تو ہم کثیریہ معلوم کرنے کے لیے .....اور ..... جدول تیار کرتے ہیں۔

(v) اگر $(2f_1 - f_0 - f_2 = 0)$ تو کثیریہ کو ..... فارمولے کی رُو سے محسوب کرتے ہیں۔

(vi) مندرجہ ذیل مواد کو پڑھیے۔

X :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
F :	2	8	12	18	12	5	3

اس صورت میں کثیریہ ' ..... کا حسابی اوسط اور ..... ہے۔

(vii) مندرجہ ذیل مواد کو پڑھیے۔

X :	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
F :	100	125	220	228	222	150

اس صورت میں کثیریہ، کثیریہ جماعتوں 40 اور 50 کی دو انتہا کا وزنی حسابی اوسط ہے جہاں پر اوزان ہیں ..... اور ..... ۔

(viii) اگر کسی مواد میں دو قدریں، دیگر قدروں کی بہ نسبت زیادہ دہرائی گئی ہوں تو ایسی تقسیم کو .....کہتے ہیں۔

12.4 کثیریہ کا ترسیمی تعین Graphical Determination of Mode

آپ نے کثیریہ کو محسوب کرنے کے طریقے سیکھے۔ درحقیقت وسطانیہ کی طرح کثیریہ کو بھی ترسیم کے ذریعے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ترسیم کی مدد سے کثیریہ کی تحسیب میں مندرجہ ذیل طریقہ کار کو اختیار کیا جاتا ہے۔

(1) دی گئی تعددی تقسیم کے لیے ہسٹوگرام تیار کیجیے۔ کثیریہ سے قبل، کثیریہ اور کثیریہ سے نیچے کی تین جماعتوں کو استعمال کر کے ایک جزوی ہسٹوگرام (Partial histogram) بھی تیار کیا جاسکتا ہے۔ آپ نے اکائی 9 میں ہسٹوگرام کا مطالعہ کیا ہے۔

(2) بلندترین مستطیل (کثیریہ جماعت کا مستطیل) اور اس کے قبل کے متصل مستطیل کے دائیں کونوں کو ایک خط مستقیم کے ذریعہ جوڑ دیا جاتا ہے۔ اسی طرح بلندترین مستطیل اور اس کی دائیں جانب متصل مستطیل کے بائیں کونوں کو ایک خط مستقیم کے ذریعہ ایک دوسرے سے ملا دیا جاتا ہے۔

(3) ان دو خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع سے محور x پر عمود کھینچا جائے۔

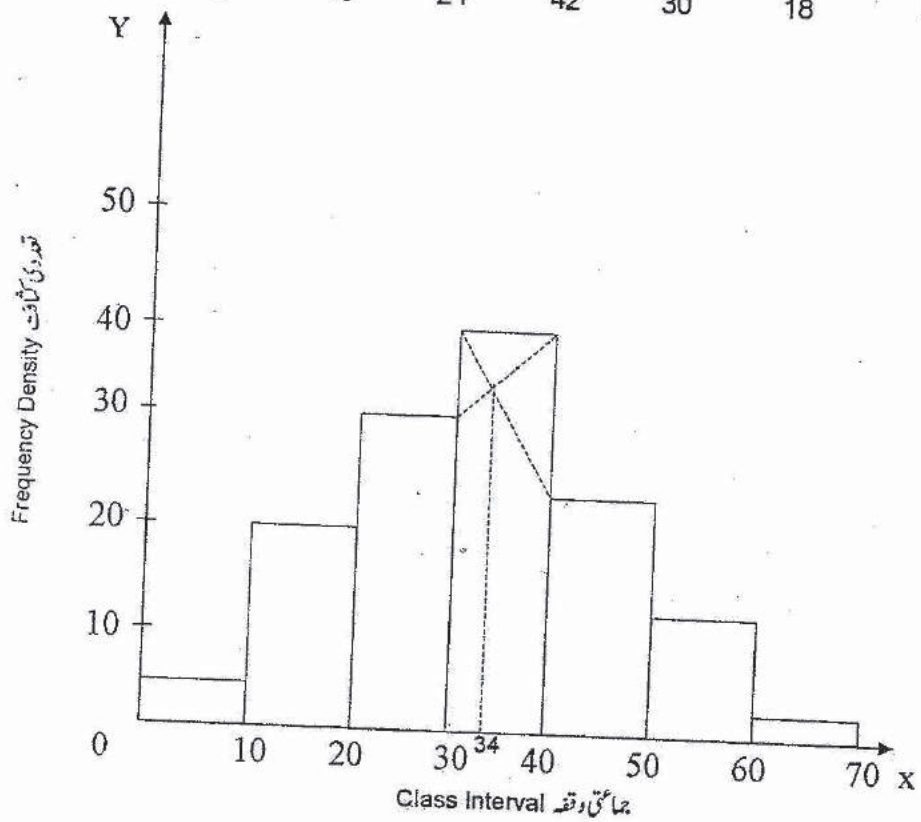
(4) وہ نقطہ جس پر یہ محور x سے ملتا ہے۔ کثیریہ کی قدر کا اظہار کرتا ہے۔

اب ہم اس طریقہ کار کو ایک تمثیل کے ذریعہ واضح کریں گے۔

تمثیل 6

مندرجہ ذیل مواد کا کثیریہ بذریعہ ترسیم معلوم کیجیے اور تحسیب کے ذریعہ اس کی تصدیق کر لیجیے۔

جماعتی وقفہ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
تعدد	4	18	30	42	24	10	3



شکل 12.3 : ہسٹوگرام اور جماعتی وقفہ کے ذریعہ کثیریہ کا تعین (Histogram and Class Interval Determination of Mode)

فارمولہ $M_o = L + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times i$ کو استعمال کرکے

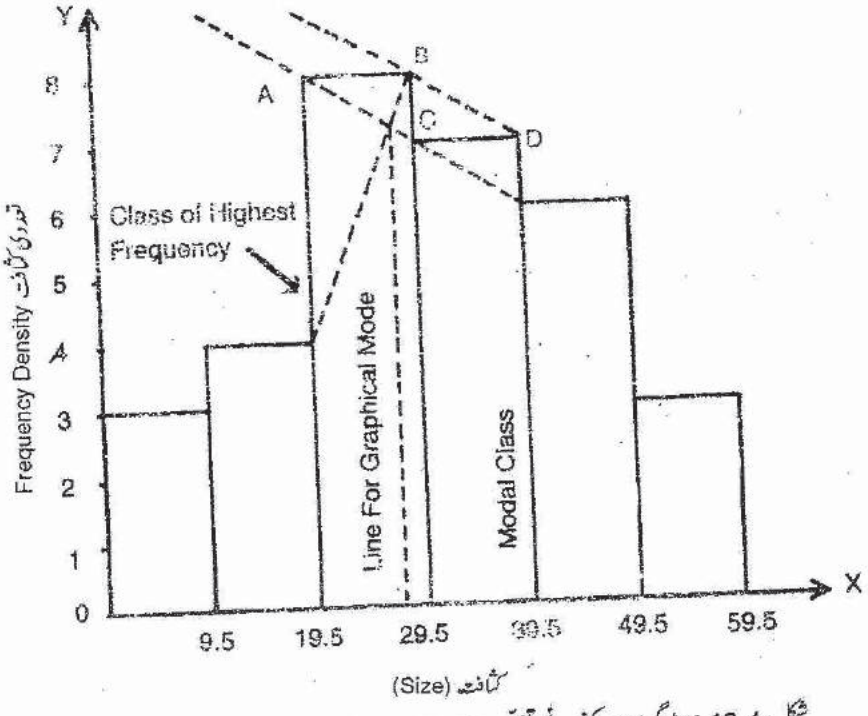
$$M_o = 30 + \frac{42-30}{84-30-24} \times 10$$
$$= 30 + \frac{12}{30} \times 10$$
$$= 30 + 4$$
$$= 34$$

غور کریں کہ یہاں پر حاصل کی گئی کثیریہ کی قیمت وہی ہے جو ترسیم کے ذریعہ سے حاصل کی گئی ہے لیکن اگر آپ فارمولہ $M_o = L + \frac{f_2}{f_o - f_2} \times i$ کے ذریعہ سے کثیریہ کی قدر کو محسوب کریں گے تو نتیجہ وہی نہیں ہوگا جو ترسیم کے ذریعہ حاصل کیا گیا ہے۔ ترسیمی طریقے اور فارمولے (f_o, f_1, f_2) پر مبنی طریقے کے پیچھے ایک ہی منطق کارفرما ہے۔ اس منطق کی تفصیلات اس نصاب کی حدوں سے پرے ہے۔

کثیریہ معلوم کرنے کے ترسیمی طریقہ میں ایک خامی یہ ہے کہ جب کثیریہ جماعت اعلیٰ ترین تعدد والی جماعت سے متصل ہو تو ترسیم کے ذریعہ کثیریہ کا تعین نہیں کیا جاسکتا۔ صرف اعظم ترین تعدد کی جماعت سے ہی اس کا تعین کیا جاسکتا ہے۔ اس صورت میں ترسیم کے ذریعہ تعین کردہ کثیریہ، مناسب کثیریہ نہیں ہوتا، اس کو سمجھنے کے لیے سابق میں بحث کردہ تمثیل 3 کے مواد کے ترسیمی ذریعہ سے کثیریہ معلوم کریں گے۔

حل

یہاں پر جماعتی وقفے داخلی قسم کے ہیں۔ اس لیے ہسٹوگرام کی ترسیم سے پہلے، ان کو حقیقی انتہاؤں میں تبدیل کرنا چاہیے۔ اب شکل 12.4 کا بغور مطالعہ کیجیے۔



شکل 12.4 ہسٹوگرام اور کثیریہ کا تعین (Histogram and Calculation of Mode)

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ کثیریہ کی ترسیمی قدر کو جماعت 29.5 - 19.5 سے معلوم کیا جاسکتا ہے اور یہ قدر 27.5 ہے جو سابق میں حاصل کردہ قدر 33.8 سے مختلف ہے۔ اگر آپ کثیریہ جماعت میں کثیریہ کو معلوم کرنے کی کوشش کریں گے تو آپ کو نقاط A کو C سے اور B کو D سے جوڑنا ہوگا۔ خطوط AC اور BD کثیریہ کی جماعت میں منقطع نہیں ہوتے۔ اس لیے ترسیمی ذریعہ سے کثیریہ جماعت میں کثیریہ کو معلوم نہیں کیا جاسکتا۔

اگر کثیریہ گروہ اور اعظم ترین تعدد والا گروہ ایک دوسرے سے متصل نہ ہوں بلکہ درمیانی دو یا تین گروہ کے فاصلے سے ایک دوسرے سے علحدہ ہوں تو کثیریہ کو دونوں گروہوں میں ترسیم کے ذریعہ محسوب کیا جاسکتا ہے۔ ان دو کثیریوں میں پہلے ترجیحی کثیریے کا تعین X محور کے نقطہ تقاطع سے کھینچے ہوئے عمود کی اونچائی سے کیا جاسکتا ہے۔ ایسی تقسیموں کو دو کثیریہ (Bi modal) کہہ سکتے ہیں۔ اب ایک تمثیل کے ذریعہ سے اس کی وضاحت کی جائے گی۔

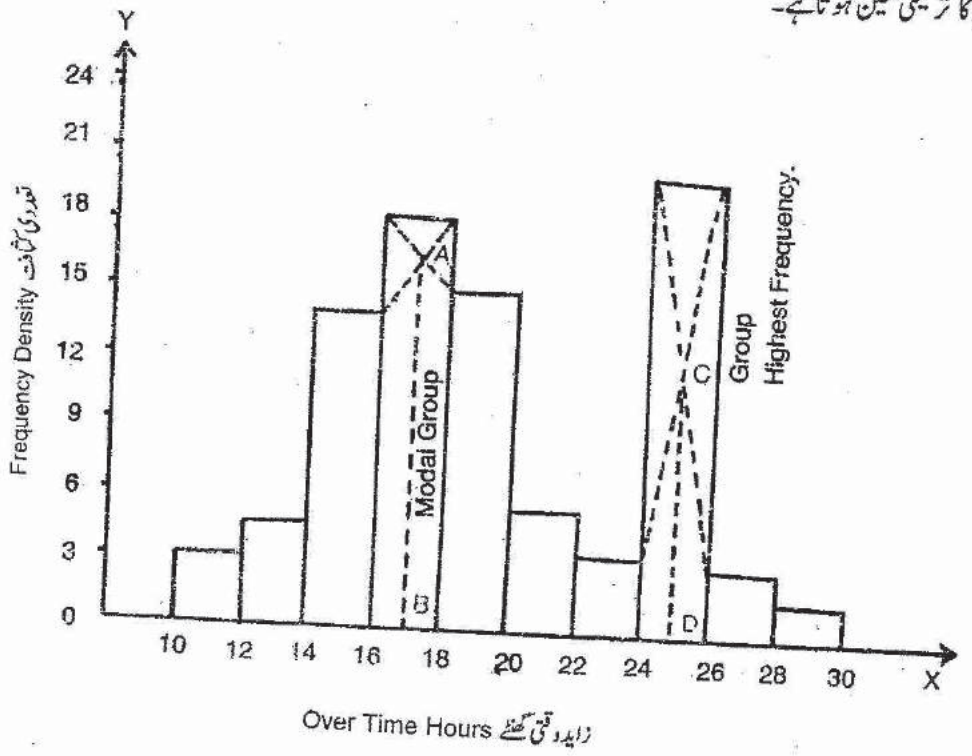
تمثیل 7

مندرجہ ذیل تقسیم، ایک ماہ کے دوران کسی کمپنی کے 100 ملازمین کے زائد وقتی کام، کو پیش کرتی ہے۔ ترسیم کے ذریعہ کثیریہ کو معلوم کیجیے۔

زائد وقتی گھنٹے :	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30
تعداد ملازمین :	3	5	16	21	17	6	4	23	3	2

حل

گروہ بندی جدول اور تجزیاتی جدول تیار کرکے، آپ بہ آسانی معلوم کرسکتے ہیں کہ کثیریہ کی جماعت 18 - 16 ہے لیکن اعظم ترین تعدد 24 کے گروہ 26 - میں ہے جو تعدد کی جماعت سے 3 گروہوں کے فاصلے پر ہے۔ اب ہسٹوگرام کے لیے شکل 12.5 پر نظر ڈالیے جس کے ذریعہ کثیریہ کا ترسیمی تعین ہوتا ہے۔



شکل 12.5 : ہسٹوگرام اور کثیریہ کا تعین (Histogram and Calculation of Mode)

کثیریہ کی جماعت میں نقطہ B ایک کثیریہ دیتا ہے۔ یہ تقریباً 16.9 ہے۔ اعظم ترین تعدد والی جماعت میں نقطہ D دوسرا کثیریہ پیش کرتا ہے۔ یہ تقریباً 25.1 ہے۔ خطوط مستقیم AB اور CD کے طول، نقاط B اور D پر مدات کے ارتکاز کی وسعت کی عکاسی کرتے ہیں۔ چونکہ AB کا طول CD کے طول سے زیادہ ہے، کثیریہ B پر، کثیریہ D کی بہ نسبت، تعددوں کے ارتکاز کی مقدار زیادہ ہے لہذا B کی قدر (یعنی 16.9) پہلی ترجیحی قدر ہے اور D کی قدر (یعنی 25.1) دوسری ترجیحی قدر ہے۔ تحسیب کے طریقے سے بھی دونوں گروہوں میں کثیریہ کا تعین کیا جاسکتا ہے۔ یہ قدریں تقریباً وہی ہوتی ہیں جو ترسیمی طریقے سے متعین کی جاتی ہیں۔ جیسا کہ پہلے نشاندہی کی گئی تھی، ایسے مواد کو ذو کثیریہ کہا جاتا ہے۔ بہر حال ایک مکمل ذو کثیریہ مواد وہ ہے جس میں دونوں کثیریوں پر تعددوں کا ارتکاز بالکل ہی مساوی ہوتا ہے۔

12.5 کثیریہ کی خوبیاں اور خامیاں Merits and Limitations of Mode

■ خوبیاں :

(1) بعض صورتوں میں کثیریہ ہی واحد موزوں ترین اوسط ہوتا ہے مثلاً ملبوسات کا کثیریہ سائز، جوتوں کے سائز کا کثیریہ، کثیریہ اجرتیں، کسی بینک میں کھاتہ داروں کے کثیریہ بیلنس (بقایہ جات) وغیرہ۔

(2) اسے کیفیتی مظاہر (qualitative phenomena) کو بیان کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے۔ مثلاً اگر کوئی پرنٹنگ پریس، پانچ قسم کے چھاپوں کو پیش کرتا ہے جن کو ہم بہت گہرا، گہرا کے لفظوں سے ظاہر کرتے ہیں تب "کثیریہ قدر" گہرا ہے۔

(3) اشیائے صارفین کی ترجیح کے لیے، کثیریہ ترجیح (modal preference) کو ملحوظ رکھا جاتا ہے۔ ایک ریسٹوراں کا مالک جو کسی خاص پکوان کو پیش کرتا ہے اپنے امکانی گاہکوں کی کثیریہ ترجیح کو جاننے کی خواہش کرے گا۔

(4) خمیدہ تقسیم (Skewed distribution) کی صورت میں، کثیریہ، بھاری نقطہ ارتکاز کی جانب اشارہ کرتا ہے۔

(5) مارکٹ ریسرچ میں اس کو نفع بخش طریقہ سے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

(6) اگر ایک یا اس سے زیادہ جماعتیں بھی کھلے کناروں کی ہوں، تو کثیریہ کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔

■ خامیاں :

(1) اکثر اوقات کثیریہ قدر (modal value) موجود نہیں رہتی اور جب ایک سے زیادہ کثیریے موجود ہوں تو یہ فضول پیمانہ ہے۔

(2) یہ مزید الجبرائی عمل کے قابل نہیں ہے۔

(3) یہ ایک ایسا پیمانہ ہے جس کی جامع تعریف موجود نہیں ہے۔ اس لیے مختلف فارمولوں سے اس کی مختلف قدریں حاصل ہوتی ہیں۔

(4) یہ مواد کے تمام مدوں پر مبنی نہیں ہوتا۔

(5) کثیریہ کی قدر جماعتی وقفوں کے سائز سے نمایاں طور پر متاثر ہوتی ہے۔

(6) اگرچہ کثیریہ متغیرہ کی وہ قدر ہے جو کثرت کے ساتھ واقع ہوتی ہے لیکن اس کا تعدد، کل تعددوں کی اکثریت کا ترجمان / نمائندہ نہیں ہوتا۔

اپنی معلومات کی جانچ B

(1) غیر گروہ بند مواد کی نسبت گروہ بند مواد سے کثیریہ محسوب کرنا عموماً کیوں بہتر ہے؟

(a) غیر گروہ بند مواد ذو کثیریہ ہو سکتا ہے۔

(b) تقسیم کی خمیدگی سے قطع نظر، گروہ بند مواد کا کثیریہ یکساں ہوتا ہے۔

(c) گروہ بند مواد کو انتہائی قدریں بہت کم متاثر کرتی ہیں۔

(d) کسی غیر نمائندہ قدر کا بطور کثیریہ منتخب ہونے کا امکان بہت کم ہوتا ہے۔

(2) مندرجہ ذیل کن صورتوں میں کثیریہ مرکزی رجحان کی علامت کے طور پر مفید طریقے پر استعمال ہوگا۔

(a) مواد کے سٹ میں ہر قدر صرف ایک مرتبہ واقع ہوتی ہے۔

(b) مواد کے سٹ میں تین قدروں کے سوا باقی قدریں صرف ایک مرتبہ واقع ہوتی ہیں، تین قدریں فی قدر 100 مرتبہ واقع ہوتی ہیں۔

(c) مواد کے سٹ کی تمام قدروں میں سے ہر قدر 100 مرتبہ واقع ہوتی ہے۔

(d) مواد کے سٹ میں ہر مشاہدہ یکساں قدر رکھتا ہے۔

(3) اگر گھنٹی نما تقسیم متشاکل (Symmetrical) ہو اور جس کا ایک کثیریہ بھی ہو تو منحنی کا بلند ترین نقطہ کہلاتا ہے :

(a) رینج (range) (b) کثیریہ (c) وسطانیہ (d) حسابی اوسط (e) یہ سب (f) c, b, اور d لیکن a نہیں۔

(4) تحریر کیجیے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) ترسیمی اور تحسیبی دونوں طریقوں سے کثیریہ کی قدر یکساں حاصل ہوتی ہے۔

(ii) چونکہ کثیریہ کو مواد سے محسوب کیا جاتا ہے لہذا یہ الجبرائی عمل کے قابل رہتا ہے۔

(iii) کثیریہ کبھی کبھی کیفیتی مظاہر کے اظہار کے لیے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔

(iv) کثیریہ مواد کے تشاکل (Symmetry) کو جانچنے میں ایک اہم کردار ادا کرتا ہے۔

(v) اگر کثیریہ کو محسوب کرنا ممکن نہیں ہے تو ترسیمی طریقے سے بھی اس کو معلوم نہیں کیا جاسکتا۔

(5) خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

(i) اگر کسی معتدل غیر متشاکل (asymmetrical) سلسلے کا حسابی اوسط اور وسطانیہ بالترتیب 26.8 اور 27.9 ہے، تو ممکن ترین کثیریہ ہوگا .....۔

(ii) کثیریہ کی قریبی قدر 52 اور اوسط 58 ہو تو وسطانیہ ..... ہوگا۔

(iii) اگر کسی مواد کے سٹ کا صرف ایک ہی کثیریہ ہے اور یہ اوسط سے کم ہے، تو یہ نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ مواد کی ترسیم ..... کی طرف خمیدہ ہے۔

(iv) معتدل طور پر خمیدہ تقسیم کے لیے تجربی رشتے کو بطور ..... $= M_o$ ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

(v) ایک ..... تشکیل دے کر اور ..... مستطیل اور دو ..... مستطیلوں کو استعمال کر کے کثیریہ ترسیمی طور پر متعین کیا جاسکتا ہے۔

(vi) اشیائے صارفین کی ترجیح کے لیے ..... ترجیح کو ملحوظ رکھا جاتا ہے۔

(vii) کثیریہ نمونہ بندی ..... سے متاثر ہوتا ہے۔

12.6 چند تمثیلات Some Illustrations

تمثیل 8

اگر کثیریہ 15.3 اور وسطانیہ 14.2 ہو تو حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

حل

حسابی اوسط، وسطانیہ اور کثیریہ میں تجربی رشتہ ہے۔

$$M_o = 3\,M_d - 2\bar{X}$$

M_o اور M_d کی قدروں کو فارمولے میں درج کرنے سے

$$15.3 = 3 \times 14.2 - 2\bar{X}$$
$$2\bar{X} = 42.6 - 15.3$$
$$2\bar{X} = 27.3$$
$$\bar{X} = 13.65$$

تمثیل 9

M_o، M_d اور $\bar{X}$ کے درمیان تجربی رابطے کی مدد سے بتلایئے :۔

i) $M_d = M_o + \frac{2}{3}(\bar{x} - M_o)$

ii) $\bar{x} = M_d + \frac{1}{2}(M_d - M_o)$

حل

حسابی اوسط، وسطانیہ اور کثیریہ کے درمیان تجربی رابطہ کے لیے مندرجہ ذیل فارمولے پر غور کیا جائے۔

$$M_o = 3M_d - 2\bar{x} \quad :$$

i) $M_o = 3M_d - 2\bar{x}$:

$M_o = 2\bar{x} = 3M_d$:

$\frac{1}{3}(M_o - 2\bar{x}) = M_d$:

$$M_d = \frac{1}{3}M_o + \frac{2}{3}\bar{x}$$
$$= M_o - \frac{2}{3}M_o + \frac{2}{3}\bar{x}$$
$$= M_o + \frac{2}{3}(\bar{x} - M_o)$$
$$\therefore M_d = M_o + \frac{2}{3}(\bar{x} - M_o)$$

$$\text{Median} = \text{Mode} + \frac{2}{3}(\text{Mean} - \text{Mode})$$

(ii) $M_o = 3M_d - 2\bar{x}$

$$2\bar{x} = 3M_d - M_o$$

$$\bar{x} = \frac{3}{2}M_d - \frac{1}{2}M_o$$

$$= M_d + \frac{1}{2}(M_d - M_o)$$

$$\text{Mean} = \text{Median} + \frac{1}{2}(\text{Median} - \text{Mode})$$

تمثیل 10

مندرجہ ذیل جدول کسی فرم کے ملازمین کی عمر (برسوں میں) پیش کرتی ہے۔ کثیریہ عمر 32 سال ہے۔ غائب تعدد معلوم کیجیے۔

عمر برسوں میں	:	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45
تعداد ملازمین	:	5	-	18	9	6

حل

فرض کیجیے کہ غائب تعدد 'F' ہے چونکہ کثیریہ 32 ہے، کثیریہ جماعت ہے 30 - 35

اب $M_o = L + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times i$

جہاں پر $L = 30, f_o = F, f_1 = 18, f_2 = 9, i = 5$ and $M_o = 32$

فارمولے میں x قدروں کے درج کرنے پر

$$32 = 30 + \frac{18 - F}{2 \times 18 - F - 9} \times 5$$

$$2 = \frac{18 - F}{27 - F} \times 5$$

$$54 - 2F = 90 - 5F$$

$$3F = 36$$

$$F = 12$$

∴ غائب تعدد ہے 12

تمثیل 11

مندرجہ ذیل مواد سے کثیریہ معلوم کیجیے۔

منافع (لاکھ روپے میں)	:	0 - 5	5 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40
کمپنیوں کی تعداد	:	4	6	15	18	20

حل

یہاں پر جماعتی وقفے مساوی نہیں ہیں۔ ایسی صورتوں میں دو طریقے استعمال کیے جاتے ہیں:۔

(i) مساوی جماعت وقفوں کے ساتھ مواد کو دوبارہ لکھنا۔ (ii) تجربی رابطہ استعمال کرنا۔

(i) پہلے دو گروہوں کو جمع کرنے پر، جماعتی وقفہ ہوگا 10 - 0 ۔مابعد دو جماعتی وقفوں کا سائز ہے10۔ آخری جماعتی وقفے کا سائز ہے20 ۔ اس کو دو جماعتی وقفوں میں تقسیم کیا جاتا ہے یعنی40 - 30 اور50 - 40 تعددوں کو یکساں تقسیم شدہ فرض کر کے، ایسے دونوں گروہوں میں سے ہر ایک کا تعدد 10 ہوگا۔اس طرح دیا گیا مواد مندرجہ ذیل طریقے سے لکھا جائے گا:۔

نفع (لاکھ روپوں میں) :	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
کمپنیوں کی تعداد :	10	15	18	10	10

یہ واضح ہے کہ کثیریہ جماعت 30 - 20 ہے۔

$$\text{Mode} = L + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times i$$

اب

L ' f_o ' f_1 ' f_2 اور i کی قدروں کو درج کرنے سے حاصل ہوگا :۔

$$M_o = 20 + \frac{18 - 15}{2 \times 18 - 15 - 10} \times 10$$

$$= 20 + \frac{3}{11} \times 10$$

$$= 20 + 2.7$$

$$= 22.7$$

اس لیے نفع کا کثیریہ ہے 22.7 لاکھ روپے

(ii) آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ حسابی اوسط = 24.3 لاکھ روپے اور وسطانیہ 23.6 لاکھ روپے ہے۔

اب کثیریہ = 3 وسطانیہ - 2 حسابی اوسط [Mode = 3 Median - 2 Arithmetic Mean]

اس لیے

$$\therefore \text{Mode} = 3 \times 23.6 \times - 2 \times 24.3$$

$$= 70.8 - 48.6$$

$$= 22.2$$

لہذا نفع کا کثیریہ ہے 22.2 لاکھ روپے

آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ دونوں طریقوں سے معلوم کی گئی کثیریہ کی قدریں مختلف ہیں۔ایسا اس لیے ہے کہ کثیریہ کی بندھی ٹکی یعنی بے لوچ تعریف نہیں کی جا سکتی۔

تمثیل 12

ٹرانسپورٹ کمپنی کے منیجر کی حیثیت سے آپ 100 ٹائر، پروڈیوسر A یا پروڈیوسر B سے خریدنا چاہیں گے۔دونوں قسم کے ٹائروں کی قیمتیں یکساں ہیں۔ان دو قسم کے ٹائیروں سے طے شدہ اوسط فاصلوں کے متعلق مندرجہ ذیل مواد دستیاب ہے :۔

فرم	طے شدہ اوسط فاصلہ	
	حسابی اوسط (کیلو میٹر)	کثیریہ (کیلو میٹر)
قسم A	35,000	32,000
قسم B	32,000	35,000

(i) آپ کون سے ٹائر خریدیں گے؟

(ii) اگر آپ اپنی ذاتی کار کے لیے ایک ٹائر خریدنا چاہیں گے تو کیا آپ کا یہی فیصلہ برقرار رہے گا؟

حل

(i) حسابی اوسط × مدات کی تعداد = مدات کی کل قدر۔ اس لیے اگر آپ پروڈیوسر A سے ٹائریں خریدیں گے تو 100 ٹائروں سے طے شدہ جملہ فاصلہ ہوگا۔ 100 x 35,000 = 35,00,000 kms۔ اگر پروڈیوسر B سے ٹائرس خریدیں گے تو طے شدہ کل فاصلہ ہوگا 100 x 32,000 = 32,00,000 kms۔ چونکہ پہلی صورت میں طے شدہ کل فاصلہ زیادہ ہوگا، آپ پہلے پروڈیوسر A سے ٹائر خریدنا پسند کریں گے۔

(ii) اگر آپ ایک ٹائر خریدنا چاہیں گے تو ضروری نہیں، کہ خریدا ہوا ٹائر وہی مسافت دے جو حسابی اوسط پیش کر رہا ہے کیونکہ یہ وہ قدر ہے جس کے گرد مدوں کا ارتکاز اعظم ترین ہے۔ چونکہ پروڈیوسر B کا کثیریہ زیادہ ہے، آپ پروڈیوسر B کو ترجیح دیں گے۔

غور کیا جائے کہ جب بہت سارے ٹائر خریدنا مقصود ہو تو کچھ ٹائر حسابی اوسط کے برابر اور کچھ حسابی اوسط سے زیادہ مسافت دے سکتے ہیں۔ اگر انتخاب اٹکل طریقہ پر کیا جائے تو یہ ممکن ہے کہ منتخب ٹائروں کے طے شدہ فاصلوں کا حسابی اوسط، پروڈیوسر کے مظلوبہ حسابی اوسط کی قدر کے تقریباً مماثل ہو۔ اس لیے، صورت (i) میں یہ محسوب کرنے کے لیے کہ کس قسم کی خرید زیادہ خدمت پیش کرتی ہے، حسابی اوسط استعمال کیا گیا ہے۔

12.7 خلاصہ Let Us Sum Up

کثیریہ متغیرہ کی وہ قدر ہے جس کے اطراف دوسرے مدات کا بھاری تعداد میں ارتکاز ہوتا ہے۔ اسے گروہ بند اور غیر گروہ بند دونوں موادوں کے لیے محسوب کیا جاسکتا ہے۔ اگرچہ غیر گروہ بند مواد کے لیے اس کا محدود استعمال ہے۔ غیر مسلسل تقسیم کے لیے کثیریہ متغیرہ کی وہ قدر ہے جس کے اطراف مدوں کا بھاری تعداد میں ارتکاز ہوتا ہے۔ اگر اعظم ترین تعدد کی جماعت کی دو یا زیادہ ہمسایہ جماعتوں میں، تقریباً مساوی ارتکاز ہوں تو کثیریہ کا معلوم کرنا مشکل ہے۔ ایسی صورتوں میں گروہ بندی اور تجزیاتی جدولیں، تیار کر کے کثیریہ جماعت معلوم کی جاتی ہے۔ مسلسل تقسیم کے لیے، کثیریہ جماعت کا تعین کرنے کے بعد، مختلف ادراجی فارمولوں (interpolation formulas) کو استعمال کر کے کثیریہ محسوب کیا جاتا ہے۔ اگر مواد یکساں طور پر حرکت پذیر ہو تو کثیریہ کو آسان قاعدوں کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے، اس صورت میں یہ کثیریہ جماعتوں کی انتہاؤں کا سادہ حسابی اوسط ہوگا یا ان کا وزنی حسابی اوسط ہوگا۔ ایک معتدل خمیدہ تقسیم کے لیے، تجربی رابطہ $Mo = 3\,Md - 2\bar{x}$ سے کثیریہ معلوم کیا جاتا ہے۔ کثیریہ کو ہسٹوگرام تشکیل دے کر اور بلند ترین مستطیل اور اس کے دو ہمسایہ مستطیلوں کو استعمال کر کے ترسیم کے ذریعہ بھی معلوم کیا جاسکتا ہے۔

جوتوں کی کثیریہ سائز، ملبوسات کی کثیریہ سائز، کثیریہ اجرتوں کو معلوم کرنے کے لیے کثیریہ بہت کار آمد ہے۔ کیفیتی مظاہر کی وضاحت کے لیے بھی اس کا استعمال کیا جاتا ہے۔ اشیائے صارفین کے لیے صارفوں کی کثیریہ ترجیح کے اظہار کے لیے بھی اس کا استعمال کیا جاتا ہے۔ کثیریہ کی چند خامیاں بھی ہیں جیسے اس کا مزید الجبرائی عمل کے ناقابل ہونا، اس کی بندھی ٹکی و بے لوچ تعریف کا نہ ہونا یا مواد میں کثیریہ کا موجود نہ ہونا یا ایک سے زیادہ تعداد میں موجود ہونا وغیرہ۔

12.8 کلیدی الفاظ اور علامات Key Words and Symbols

تجزیاتی جدول **Analysis Table** : وہ جدول جو مختلف کالموں میں واقع ہونے والے اعظم ترین تعدد کو ظاہر کرنے والی کثیریہ جماعت کو معلوم کرنے میں مددگار ہوتی ہے۔

ذو کثیریہ تقسیم **Bi-model Distribution** : مواد کی وہ تقسیم جن میں بہ نسبت دوسری قدروں کے دو قدریں بکثرت واقع ہوتی ہیں۔

اوسط کا تجربی رابطہ **Empirical Relationship of Averages** : وہ رابطہ جو ایک معتدل خمیدہ تقسیم میں اوسط کے درمیان موجود ہوتا ہے یعنی $M_o = 3M_d - 2\bar{x}$۔

گروہ بندی جدول **Grouping Table** : کثیریہ جماعت کو معلوم کرنے کے لیے زیر استعمال جدول جس میں چھ کالم ہوتے ہیں۔

کثیریہ **(Mode)** : متغیرہ کی وہ قدر جس کے اطراف دوسرے مدات بھاری تعداد میں مرکوز ہوتے ہیں۔

منفی طور پر خمیدہ تقسیم **Negatively Skewed Distribution** : وہ تقسیم جس میں اونچی اقدار میں زیادہ ارتکاز ہوتا ہے اور جس کے بائیں ہاتھ کی جانب طویل دم ہوتی ہے۔

مثبت طور پر خمیدہ تقسیم **(Positively Skewed Distribution)** : وہ تقسیم جس میں نچلی قدروں میں زیادہ ارتکاز ہوتا ہے اور جس کے دائیں ہاتھ کی جانب طویل دم ہوتی ہے۔

علامات کی فہرست (List of Symbols)

اکائی 10 اور 11 میں دی گئی علامات کی فہرست کے علاوہ، کثیریہ سے متعلق مندرجہ ذیل علامات استعمال کی جاتی ہیں۔

کثیریہ اور اس کے بعد کے اونچی تعدد میں فرق (اونچی قدروں کی طرف)		$\rightarrow f_1 - f_2 , \Delta_2 , d_2$
	جہاں پر	Δ_2 اور d2 کو ہمیشہ مثبت لیا جاتا ہے۔
کثیریہ اور اس سے قبل کے تعدد میں فرق (نچلی قدروں کی طرف)		$f_1 - f_o , \Delta_1 , d1$
	جہاں پر	Δ_1 اور d_1 کو ہمیشہ مثبت لیا جاتا ہے۔
کثیریہ گروپ کے بعد کے گروپ کا تعدد (اونچی قدروں کی طرف)		f_2
کثیریہ گروپ سے قبل کے گروپ کا تعدد (نچلی قدروں کی طرف)		(جب کہ کثیریہ تعدد کو f_1 سے ظاہر نہ کیا جائے) f_o, f_1
کثیریہ گروپ کا تعدد		$f_1 , f_m , f_{mo} f$
کثیریہ گروپ کی نچلی انتہا		$L l, L, L_{MO}$
کثیریہ		M_o, Z
کثیریہ گروپ کی اوپری انتہا		$u, L_2 U, U_m, U_{Mo}$

12.9 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات Answers to Check Your Progress

(4 A) 30.1

(5) (i) غلط (ii) صحیح (iii) غلط (iv) غلط (v) صحیح

(6) (i) بلند ترین (ii) مقام بند (iii) 2 ' 1 (iv) گروہ بند تجزیہ

$$M_o = L + \frac{|f_1 - f_o|}{|f_1 - f_o| + |f_1 = f_2|} \times i \quad \text{or یا} \quad M_o = L + \frac{f_2}{f_o + f_2} \times i \quad \text{(v)}$$

(vi) 30, 40 (vii) 220, 222 (viii) ذوکثیریہ

B (1) d (2) b (3) f

4) (i) غلط (ii) غلط (iii) صحیح (iv) صحیح (v) صحیح

5) (i) 30.1 (ii) 56 (iii) دایاں (iv) $3M_e - 2\bar{x}$

(v) ہسٹوگرام، بلندترین، ہمسایہ (vi) کثیریہ (vii) عدم استحکام

12.10 امتحانی سوالات/مشقیں Terminal Questions/Exercises

سوالات

(1) "حسابی اوسط، وسطانیہ اور کثیریہ، سب اپنے اپنے انداز میں مواد کی ایک خاصیت کو پیش کرنے کی کوشش کرتے ہیں"، بحث کیجیے۔

(2) کثیریہ کیا ہے؟ اوسط کے ایک پیمانہ کے طور پر اس کی خامیوں کی تشریح کیجیے۔

مشقیں

(1) شادی شدہ خواتین کی کثیریہ عمر، ان کے پہلے بچے کی پیدائش کے وقت، معلوم کیجیے:۔

عمر (برسوں میں) :	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
خواتین کی تعداد :	37	162	343	390	256	433	161	355	65	85	49	49	40

(جواب : 18 سال)

(2) ایک فیکٹری میں اجرت کی تقسیم سے متعلق مندرجہ ذیل معلومات سے کثیریہ اجرت معلوم کیجیے۔

ہفتہ واری اجرت (روپیوں میں)	ملازمین کی تعداد
20 - 40	8
40 - 60	12
60 - 80	20
80 - 100	30
100 - 120	40
120 - 140	35
140 - 160	18
160 - 180	7
180 - 200	5

(جواب : 113.33 روپے)

(3) مندرجہ ذیل معلومات سے جوتوں کا کثیریہ سائز معلوم کیجیے۔

جوتوں کا سائز :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تعداد :	10	5	13	6	23	32	14	35	8	7

(جواب: 6)

(4) مندرجہ ذیل جدول، گزشتہ مہینے امر فارماسیوٹیکلس کو کیے گیے فروخت کالس (calls) کی اضافی تقسیم کو پیش کرتا ہے۔

کثیریہ کالوں کو معلوم کیجیے

فروخت کالس کی تعداد :	0	1	2	3	4	5 or more
اضافی تعداد :	0.21	0.18	0.38	0.19	0.03	0.01

(جواب : 2 فروخت کال)

(5) مندرجہ ذیل مواد کے لیے کثیریہ معلوم کیجیے:

جماعت :	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
تعداد :	24	42	56	66	108	130	154

(جواب : 71.34)

(6) مندرجہ ذیل مواد کے لیے ترسیم کے ذریعے سے انتہائی عام تنخواہ معلوم کیجیے اور موزوں فارمولہ استعمال کر کے اس کی تصدیق کر لیجیے :

تنخواہ (روپیوں سے زیادہ تر) :	100	150	200	250	300	350	400	450
تعداد ملازمین :	100	98	93	83	43	23	12	5

(جواب : 280 روپے)

(7) ترسیم کے ذریعہ کثیریہ معلوم کیجیے نیز تخمیب سے معلوم کر کے اس کی جانچ کیجیے :

وزن سے کم (کیلوگرام) :	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125
تعداد ملازمین :	0	5	13	30	55	75	85	93	120	125

(جواب : 98.1)

(8) عام فارمولوں کو استعمال کیے بغیر مندرجہ ذیل تقسیمات کے لیے کثیریہ حاصل کیجیے :

(i)

x :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f :	1	6	15	20	15	6	1

(ii)

x :	48-52	52-56	56-60	60-64	64-68	68-72	72-76
f :	4	8	16	18	15	4	2

(جواب : (i) 35 (ii) 61.93)

(9) جب حسابی اوسط 27.9 اور کثیریہ 25.2 ہو تو وسطانیہ معلوم کیجیے۔ مفروضات، اگر کوئی ہوں، تو پیش کیجیے۔

(جواب : 27)

(10) مندرجہ ذیل تقسیمات (Distribution) کے لیے کثیریہ اقدار کیا ہیں؟

(a) بالوں کا رنگ	:	کالا	بھورا	سرخ	سفید
تعداد	:	11	24	6	18
(b) خون کا گروپ	:	AB	0	A	B
تعداد	:	4	12	35	16

(جواب : (a) بھورا (b) A

نوٹ : یہ سوالات اس اکائی کے سمجھنے میں مددگار ثابت ہوں گے۔ ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجیے لیکن آپ کے جواب یونیورسٹی کو نہ بھیجیے۔ یہ آپ کی مشق کے لئے ہیں۔

اکائی 13 ہندسی، ہارمونی اور متحرک اوسط

UNIT-13 GEOMETRIC, HARMONIC AND MOVING AVERAGES

Structure ساخت

Objectives	مقاصد	13.0
Introduction	تمہید	13.1
Geometric Mean	ہندسی اوسط	13.2
Computation	تخمیب	13.2.1
Weighted Geometric Mean	وزنی ہندسی اوسط	13.2.2
Properties of Geometric Mean	ہندسی اوسط کی خاصیتیں	13.2.3
Uses and Limitations	استعمال اور خامیاں	13.2.4
Harmonic Mean	ہارمونی اوسط	13.3
Computation	تخمیب	13.3.1
Weighted Harmonic Mean	وزنی ہارمونی اوسط	13.3.2
Properties of Harmonic Mean	ہارمونی اوسط کی خاصیتیں	13.3.3
Uses and Limitations	استعمال اور خامیاں	13.3.4
Harmonic Mean Vs. Arithmetic Mean	ہارمونی اوسط بمقابلہ حسابی اوسط	13.4
Moving Average	متحرک اوسط	13.5
What is Moving Average?	متحرک اوسط کیا ہے؟	13.5.1
Computation	تخمیب	13.5.2
Choice of Suitable Average	موزوں اوسط کا انتخاب	13.6
Let Us Sum Up	خلاصہ	13.7
Key Words	کلیدی الفاظ	13.8
Answers to Check Your Progress	اپنی معلومات کی جانچ: جوابات	13.9
Terminal Questions/Exercises	امتحانی سوالات/مشقیں	13.10

13.0 Objectives مقاصد

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ :

- ہندسی اور ہارمونی اوسط کی تعریف کر سکیں اور ان کو محسوب کر سکیں۔
- ہندسی اور ہارمونی اوسط کی خاصیتوں کو شمار کر سکیں۔
- ہندسی اور ہارمونی اوسط کی خامیوں اور ان کے استعمال سے واقف ہو جائیں۔
- متحرک اوسط کے تصور کی تشریح کر سکیں۔
- زمانی سلسلے کے رجحان کے تعین میں متحرک اوسط کو استعمال کر سکیں۔
- کسی دی گئی صورت حال میں موزوں اوسط کا انتخاب کر سکیں۔

13.1 تمہید Introduction

جیسا کہ آپ جانتے ہیں اوسط کو ریاضیاتی اوسط، مقام بندی اوسط اور مخصوص اوسط کے طور پر درجہ بند کیا جا سکتا ہے۔ قبل ازیں آپ نے حسابی اوسط کا مطالعہ کیا جو ریاضیاتی اوسط کے زمرے سے تعلق رکھتا ہے اور وسطانیہ اور کثیریہ کے متعلق سیکھا جو مقام بندی اوسط کے زمرے میں شامل ہیں اس اکائی میں آپ دو اور ریاضیاتی اوسطوں کا مطالعہ کریں گے یعنی ہندسی اوسط اور ہارمونی اوسط نیز آپ ایک مخصوص اوسط یعنی متحرک اوسط کے بارے میں بھی معلومات حاصل کریں گے اور دی گئی صورت حال کے تحت مختلف قسموں کے تمام اوسط سے موزوں اوسط کا کیسے انتخاب کریں، اس سے بھی واقف ہو جائیں گے۔

13.2 ہندسی اوسط Geometric Mean

ایسے حالات میں جہاں کہ مقداریں وقت کے ایک عرصہ میں متغیر ہو جاتی ہوں اور ہمیں اوسط شرح تغیر کے معلوم کرنے میں دلچسپی ہو تو سادہ حسابی اوسط (Simple Arithmetic Mean) (کا استعمال) مناسب نہیں ہوتا۔ ہمیں ہندسی اوسط کو استعمال کرنا پڑتا ہے۔

13.2.1 تحسیب Computation

دوسرے اوسطوں کی طرح، ہندسی اوسط معلوم کرنے کا طریقہ گروہ بند اور غیر گروہ بند مواد وں کے لیے مختلف ہوتا ہے۔ اب ہم ان طریقوں کا مطالعہ کریں گے۔

غیر گروہ بند مواد Ungrouped Data

اگر سلسلہ مواد میں دو مدہوں تو ان دو مدوں کے حاصل ضرب کا جذر المربع (Square root) ہندسی اوسط ہوتا ہے۔ اگر تین مدہوں تو ان تین مدوں کے حاصل ضرب کا جذر المکعب (Cube root) ہندسی اوسط ہوتا ہے۔ اگر سلسلہ میں 'n' مدہوں تو ان مدوں کے حاصل ضرب کا n واں جذر ہندسی اوسط ہے۔ علامتی طور پر ہندسی اوسط $= \sqrt[n]{x_1, x_2, \ldots, x_n}$

جہاں پر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ سلسلے کے n مدہوں گے۔ مثال کے طور پر تین اعداد 4، 8 اور 16 کا ہندسی اوسط ہوگا:

$$G.M. = \sqrt[3]{4 \times 8 \times 16}$$
$$= \sqrt[3]{512}$$
$$= 8$$

ہندسی اوسط، مدوں کے حاصل ضرب پر مبنی ہوتا ہے۔ اگر مدوں کی تعداد تین یا تین سے زیادہ ہو تو ان کا حاصل ضرب محسوب کرنا اور جذر نکالنا کافی دشوار ہوتا ہے۔ اس لیے تحسیب کے لیے لوکارتم کا سہارا لیا جاتا ہے۔ اس کا طریقہ حسب ذیل ہے:

(1) متغیرہ کی مختلف قدروں کا لوکارتم معلوم کیجیے اور اس کو جمع کیجیے اور ان کا مجموعہ $\Sigma \log x$ لیجیے۔

(2) حاصل جمع کو n سے تقسیم کر کے معکوس لوکارتم (Antilogarithm) لیجیے۔ اس طرح ہندسی اوسط (Geometric mean) حاصل ہوگا۔ علامتی طور پر اس کو مندرجہ ذیل طریقہ سے ظاہر کیا جائے گا:۔

$$\log G.M. = \frac{1}{n}\log(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n)$$
$$= \frac{\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n}{n}$$
$$= \frac{\Sigma \log x}{n}$$

لہذا $G.M. = \text{Antilog}\frac{\Sigma \log x}{n}$

مثال کے طور پر چار اعداد 20, 65, 83, 135 کا ہندسی اوسط ہوگا:

$$G.M. = \text{Antilog}\ \frac{\log 20 + \log 65 + \log 83 + \log 135}{4}$$
$$= \text{Antilog}\ \frac{1.3010 + 1.8129 + 1.9191 + 2.1303}{4}$$
$$= \text{Antilog}\ 1.7904 = 61.77$$
$$= 61.77$$

تمثیل 1

گزشتہ سال کی بہ نسبت 1987 ' 1988 اور 1989 میں بالائی اخراجات بالترتیب 32% 40% اور 50% زیادہ ہوے۔تین سال کی مدت میں بالائی اخراجات میں اوسط شرح اضافہ محسوب کیجیے۔

حل

1987 ' 1988 اور 1989 میں بالائی اخراجات میں اضافہ بالترتیب 32%, 40% اور 50% ہے۔اس کا مطلب یہ ہے کہ ان سالوں میں اخراجات پچھلے سال کے مقابل 132%, 142% اور 150% ہوئے۔اس لیے تین سال کے ختم پر ان کی آخری (فائنل سطح) اصلی سطح کی $\frac{132 \times 140 \times 150}{100 \times 100}$ فی صد ہوگی۔

چونکہ یہ اعداد دو شمار نوعیت کے لحاظ سے ضربی (multiplicative) ہیں' ان کا اوسط، ہندسی اوسط سے حاصل ہوتا ہے۔

$$x_1 = 132 x_2 = 140 x_3 = 150 \text{ and } n = 3$$
$$\text{Now G.M.} = \text{Antilog}\ \frac{\Sigma \log x}{n}$$
$$= \text{Antilog}\ \frac{\log 132 + \log 140 + \log 150}{3}$$
$$GM = \text{Antilog}\ \frac{2.1206 + 2.1461 + 2.1761}{3}$$
$$= \text{Antilog}\ \frac{6.4428}{3} = \text{Antilog}\ 2.1476$$
$$= 140.5$$

اوسط طور پر بالائی اخراجات' پچھلے سال کی سطح کے لحاظ سے 140.5% ہوں گے۔اس لیے بالائی اخراجات میں اضافہ کی اوسط شرح ہوگی 40.5% (یعنی 140.5 - 100)۔

گروہ بند مواد Grouped Data

غیر گروہ بند مواد کے لیے ہندسی اوسط معلوم کرنے کا طریقہ آپ سیکھ چکے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ گروہ بند مواد غیر مسلسل یا مسلسل سلسلہ کی شکل میں موجود ہوتا ہے۔ان دونوں قسموں کے لیے علاحدہ طریقے اختیار کیے جائیں گے۔

غیر مسلسل سلسلہ Discrete Series : جب مواد گروہ بند یعنی تعددی تقسیم کی صورت میں ہوتا ہے تو ہندسی اوسط حسب ذیل طریقے سے معلوم کیا جاتا ہے:

$$G.M. = \sqrt[n]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots\ldots\ldots x_r^{f_r}}$$

جہاں پر $x_1, x_2 \ldots\ldots x_r$ متغیرہ x کی مختلف قدریں ہیں اور $f_1, f_2 \ldots\ldots f_r$ متعلقہ تعددات ہیں اور

$$n = f_1, f_2 + \ldots\ldots\ldots f_r = \Sigma f$$

$$\log GM = \frac{1}{2}(f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \ldots\ldots + f_r \log x_r)$$

$$= \frac{1}{n}(\Sigma f \log x)$$

$$G.M. = \text{Antilog}\left(\frac{\Sigma f \log m}{n}\right)$$

مسلسل سلسلہ Continuous Series: ہندسی اوسط کے پچھلے فارمولے میں ہم صرف x کو m سے تبدیل کریں گے جہاں پر m جماعتوں کی وسطی قدر ہے۔

$$G.M. = \text{Antilog}\left(\frac{\Sigma f \log m}{n}\right)$$ یہاں پر

دونوں فارمولوں میں اختیار کیا جانے والا طریقہ کار حسب ذیل ہے۔

(1) متغیرہ x کے دیے گیے مدوں یا وسطی قدروں (m) (مسلسل سلسلہ کی صورت میں) کو لوگارتم میں تبدیل کر دیجیے۔

(2) ان کو متعلقہ تعددوں سے ضرب دیجیے اور حاصل ضرب ($\Sigma f \log x$) یا ($\Sigma f \log m$) معلوم کیجیے۔

(3) حاصل ضرب کے مجموعے کو جملہ تعدد ($\Sigma f = n$) سے تقسیم کیجیے اور حاصل شدہ قدر کا معکوس لوگارتم لیجیے۔

تمثیل 2

مندرجہ ذیل مواد کے لیے ہندسی اوسط معلوم کیجیے۔

سائز	تعدد
7.5 - 10.5	5
10.5 - 13.5	9
13.5 - 16.5	19
16.5 - 19.5	23
19.5 - 22.5	7
22.5 - 25.5	4
25.5 - 28.5	1

حل

جماعتی وقفہ	وسطی نقطہ (m)	log m	f	f.log m
7.5 - 10.5	9	0.9542	5	4.7710
10.5 - 13.5	12	1.0792	9	9.7128
13.5 - 16.5	15	1.1761	19	22.3459
16.5 - 19.5	18	1.2553	23	28.8719
19.5 - 22.5	21	1.3222	7	9.2554
22.5 - 25.5	24	1.3802	4	5.5208
25.5 - 28.5	27	1.4314	1	1.4314
جملہ			68	81.9092

$$\text{Log G.M.} = \left(\frac{\Sigma f \log x}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{68} \times 81.9092$$
$$= 1.2045$$
$$\text{G.M} = \text{Antilog } 1.2045$$
$$= 16.02$$

اوسط شرح تبدیلی کی تحسیب کے لیے ہندسی اوسط
Geometric Mean for Computing Average Rate of Change

اکثر اوقات ہم دو زمانی وقفوں کے درمیان متغیرہ کی اوسط شرح تبدیلی میں دلچسپی رکھتے ہیں جیسے آبادی میں سالانہ شرح اضافہ، کل قومی پیداوار کے اضافے کی شرح، منافع میں اوسط اضافہ کی شرح وغیرہ۔ ایسی شرحوں کے محسوب کرنے کے طریقے، اوسط محسوب کرنے کے طریقوں سے یکساں ہوتے ہیں۔ دیئے گئے سلسلے کے لیے، فرض کرو کہ P_o اور P_n بالترتیب زمانی وقفوں کے آغاز اور اختتام کی قدریں ہیں۔ اب، مندرجہ ذیل سود مرکب کا فارمولہ استعمال کر کے اوسط شرح افزائش (r) حاصل کر سکتے ہیں۔

جہاں پر 'n' عرصہ وقت ہے $P_n = P_o(1+r)^n$

$$(1+r)^n = \frac{P_n}{P_o}$$
$$(1+r) = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_o}}$$
$$r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_o}} - 1$$

تمثیل 3

1951 میں کسی ملک کی آبادی 300 ملین تھی۔ 1969 میں 520 ملین ہوگئی۔ فیصد مرکب شرح افزائش فی سال معلوم کیجیے۔

حل

یہاں پر P_o ہے 300 ، P_n ہے 520 اور n ہے 18۔ فرض کرو کہ فی سال شرح افزائش (آبادی) 'r' ہے۔

$$1+r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_o}}$$

اب (Using logarithms)

$$= \sqrt[18]{\frac{520}{300}}$$
$$\log(1+r) = \frac{\log 520 - \log 300}{18}$$
$$1+r = \text{Antilog}\left(\frac{2.7160 - 2.477}{18}\right)$$
$$= \text{Antilog}\left(\frac{0.2389}{18}\right)$$
$$= \text{Antilog } 0.0133$$
$$= 1.031 \quad r = 1.031 - 1 = 0.031$$

لہٰذا فیصد مرکب شرح افزائش (آبادی) $100 \times r = 3.1\%$

13.2.2 وزنی ہندسی اوسط Weighted Geometric Mean

حسابی اوسط کی طرح وزنی ہندسی اوسط بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کا طریقہ تخمیب مندرجہ ذیل ہے۔

وزنی ہندسی اوسط $= \sqrt[\Sigma w]{x_1^{w_1} \cdot x_2^{w_2} \cdot \ldots\ldots x_N^{w_N}}$ = Weighted G.M.

جہاں پر x_1، x_2، ..... x_N متغیرہ کی قدریں ہیں اور w_1، w_2 ..... w_N متعلقہ اوزان ہیں۔

لوگارتم حاصل کر کے

$$\log \text{ weighted G.M.} = \frac{W_1 \log x_1 + W_2 \log x_2 + \ldots + W_n \log x_n}{\Sigma w}$$

$$\text{or } \log \text{ weighted G.M.} = \frac{\Sigma w \log x}{\Sigma w}$$

$$\text{weighted G.M.} = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma w \log x}{\Sigma w}\right]$$

تمثیل 4

مندرجہ ذیل معلومات سے وزنی ہندسی اوسط معلوم کیجیے:۔

گروپ	اشاریہ نمبر	وزن
غذا	300	40
ایندھن	200	10
لباس	250	10
کرایہ مکان	150	15

وزن

گروپ	اشاریہ نمبر	وزن	log x	W. log x
غذا	300	40	2.4771	99.084
ایندھن	200	10	2.3010	23.01
لباس	250	10	2.3979	23.979
کرایہ مکان	150	15	2.1761	32.6415
		$\Sigma w = 75$		$\Sigma W \log x = 178.7145$

$$\text{Weighted GM} = \text{Antilog}\left[\frac{\Sigma W \log x}{\Sigma x}\right]$$

$$= \text{Antilog}\frac{[178.7145]}{75}$$

$$= \text{Antilog } 2.3829 = 241.50$$

اس لیے اشاریہ اعداد کا وزنی ہندسی اوسط 241.50 ہے۔

13.2.3 ہندسی اوسط کی خاصیتیں Properties of Geometric Mean

ہندسی اوسط کی مندرجہ ذیل اہم خصوصیات ہیں۔

(1) کسی دیئے گئے سلسلے میں ، اگر ہر مد کو ہندسی اوسط سے تبدیل کر دیا جائے تو مدوں کا حاصل ضرب تبدیل نہیں ہوتا۔مثال کے طور پر مدات 4, 8 اور 16 کا ہندسی اوسط 8 ہے۔لہذا $4\times8\times16=8\times8\times8=512$

(2) ہندسی اوسط کی قدر اس سے لیے گیے مشاہدوں کی نسبت انحرافات (Ratio deviations) کو متوازن کرتی ہے۔دوسرے الفاظ میں دو عددوں "a" اور "b" کا ہندسی اوسط "G" ہے اور دو نسبتیں a:G اور G:b مساوی ہیں۔اس کا مطلب یہ ہے کہ $\frac{a}{G}$ مساوی ہے $\frac{G}{b}$۔مثال کے طور پر 4 اور 16 کا ہندسی اوسط ہے $\sqrt{4\times16}$ یا 8 ۔نسبت $\frac{4}{8}$ اور $\frac{8}{16}$ کا مساوی ہونا ضروری ہے جو کہ ایک حقیقت ہے۔

(3) اس سے مزید الجبرائی عمل ممکن ہے۔اگر دو یا دو سے زائد گروہوں کے ہندسی اوسط دیئے گیے ہوں تو مخلوط گروپ کا اوسط حسب ذیل طریقے سے معلوم کیا جاتا ہے :

$$\text{Combined G.M.} = \text{Antilog}\left[\frac{N_1\log GM_1 + N_2\log GM_2 + \ldots N_k\log GM_k}{N_1+N_2+\ldots\ldots+N_k}\right]$$

مخلوط ہندسی اوسط (مخلوط ہندسی اوسط)

جہاں پر GM_1 = پہلے گروپ کا ہندسی اوسط ہے

GM_2 = دوسرے گروپ کا ہندسی اوسط ہے

GM_k = k ویں گروپ کا ہندسی اوسط ہے

مثال کے طور پر فرض کیجیے 100 مدات کا ہندسی اوسط 50 اور 200 مدات کا ہندسی اوسط 40 ہے۔تب مخلوط ہندسی اوسط ہوگا :

$$\text{Combined G.M.} = \text{Antilog}\left[\frac{100\log50+200\log40}{300}\right]$$

مخلوط ہندسی اوسط = (مخلوط ہندسی اوسط)

$$= \text{Antilog}\left[\frac{100\times1.6990+200\times1.6021}{300}\right]$$

$$= \text{Antilog}\,1.6344$$

$$= 43.09$$

(4) حسابی اوسط کی بہ نسبت ہندسی اوسط بڑے مدوں سے کم متاثر ہوتا ہے۔یہ کہا جاسکتا ہے کہ ہندسی اوسط کا چھوٹے مدوں کی جانب میلان ہوتا ہے جب کہ حسابی اوسط کا میلان بڑے مدوں کی جانب ہوتا ہے۔مثال کے طور پر پانچ مد 2, 3, 5, 10 اور 100 کو لیجیے۔

حسابی اوسط $= \dfrac{2+3+5+10+100}{5} = 24$

ہندسی اوسط $= \text{Antilog}\dfrac{[\log2+\log3+\log5+\log10+\log100]}{5}$

$$= \text{Antilog}\frac{[0.3020+0.4771+0.6990+1.0000+2.0000]}{5}$$

$$= \text{Antilog}\ 0.8954$$

$$= \text{(تقریباً)}\ 7.86$$

آپ غور کر سکتے ہیں کہ حسابی اوسط 24 ہے جو ہندسی اوسط 7.86 سے بہت زیادہ ہے۔اس لیے ہندسی اوسط چھوٹے مدوں کی جانب رغبت کا میلان رکھتا ہے اور حسابی اوسط بڑے مدوں کی جانب رغبت کا میلان رکھتا ہے۔

13.2.4 استعمال اور خامیاں Uses and Limitations

استعمال Uses

(1) نسبتوں اور فیصدوں کے اوسطوں کو محسوب کرنے کے لیے ہندسی اوسط نہایت موزوں ہے۔

(2) چونکہ چھوٹے مدوں کی جانب اس کا میلان زیادہ ہوتا ہے لہذا اس صورت میں زیادہ مفید ہوتا ہے جب کہ کسی دیے گیے مظہر کی نچلی قدروں کی ایک کمترین حد ہوتی ہے لیکن اعلیٰ اقدار کی ایسی کوئی حد نہیں ہوتی۔ مثال کے طور پر قیمت کسی بھی صورت میں صفر سے کم نہیں ہوسکتی۔

(3) اشاریہ اعداد (Index numbers) کی تشکیل میں، ہندسی اوسط کو ایک بہترین اوسط تصور کیا جاتا ہے۔ خصوصاً فیشر کا مثالی فارمولہ (Fisher's Ideal Formula)، جو (time reversal and factor reversal) جانچوں کو پورا کرتا ہے۔ (ان تصورات کا مطالعہ اس کورس کے دائرہ سے بالاتر ہے)

(4) جب چھوٹے مدوں کو بڑے اوزان دینا مقصود ہوتا ہے تو یہ حسابی اوسط کی بہ نسبت نہایت موزوں پیمانہ ہے۔

خامیاں (Limitations)

(1) اگر دیئے گئے سلسلہ کا ایک بھی مد صفر ہو تو ہندسی اوسط صفر ہوتا ہے۔ اس لیے اس کو محسوب نہیں کیا جاسکتا۔ مثال کے طور پر تین مد 0, 10, 100 اور 100 کا ہندسی اوسط ($\sqrt[3]{0 \times 10 \times 100} = 0$) ہوگا صفر۔

(2) اگر ایک بھی مد منفی ہو تو ہندسی اوسط موجود نہیں رہتا۔

(3) جب مدات بہت بڑے ہوں تو ہندسی اوسط کا طریقہ تحسیب پیچیدہ اور مشکل ہوجاتا ہے۔

(4) چھوٹی قدروں کی جانب ہندسی اوسط کا رجحان اس کے استعمال کا ایسی صورتوں میں مزاحم ہوتا ہے جب کہ تفاوتوں (disparities) کو اُجاگر کرنا مطلوب ہو جیسا کہ آمدنی کی تقسیم (Income distribution) وغیرہ۔

اپنی معلومات کی جانچ A

(1) نیشنل سیونگس سرٹی فی کیٹ (NSC VI) کے جاری کردہ سرٹی فیکیٹ VI میں مشغول سرمایہ 6 سالوں میں دوگنا ہوجاتا ہے۔ سالانہ اضافہ کی شرح فیصد معلوم کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

(2) اعظم ترین نشانات 75 میں سے کسی امتحان میں 70 طلبہ کے حاصل کردہ نشانات نیچے دیئے گئے ہیں۔ ہندسی اوسط (Geometric mean) محسوب کیجیے اور اس کا تقابل حسابی اوسط (Arithmetic mean) سے کیجیے۔

نشانات :	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
طلبہ کی تعداد :	12	15	25	10	6	2

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(3) کسی شئے کی قیمت میں 1978 سے 1979 تک 5% ' 1979 سے 1980 تک 8% ' 1980 سے 1981 تک 77% اضافہ ہوا ہے۔ 1978 تا 1981 اوسط اضافہ 30% کی بجائے 26% بیان کیا گیا ہے۔ اس بیان کی تصدیق کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

(4) کسی مشین کی قیمت میں پہلے سال میں 40% ، دوسرے سال 25% اور آئندہ تین سالوں میں سالانہ 10% کی کمی ہوتی ہے۔ ہر فی صد کو گھٹتی ہوئی قدر پر محسوب کیا گیا ہے۔ پانچ برسوں میں مشین کی قیمت میں اوسط فیصد کمی کیا ہے؟

(5) تحریر کیجیے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) ہندسی اوسط 'n' مدات کے مجموعے کا n واں جذر ہے۔

(ii) نسبتوں اور فیصدوں کا اوسط نکالنے کے لیے ہندسی اوسط موزوں طریقہ ہے۔

(iii) تمام اقسام کے مواد کے لیے ہندسی اوسط معلوم کرنا ممکن ہے۔

(iv) وزنی حسابی اوسط کی قدر ہمیشہ سادہ ہندسی اوسط سے زیادہ ہوتی ہے۔

(v) جب بڑے عددوں کو اہمیت دینی ہو تو ہندسی اوسط' اوسط معلوم کرنے کا اچھا طریقہ نہیں ہے۔

(6) خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

(i) انفرادی قدروں (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256) کا ہندسی اوسط ..... ہے۔

(ii) اگر کسی سلسلے میں 6 مدات ہوں تو اس کا ہندسی اوسط ان مدوں کے حاصل ضرب کا ..... واں جذر ہے۔

(iii) GNP (جملہ خام قومی پیداوار) میں اضافہ کی شرح کی تحسیب کے لیے ..... زیادہ مناسب پیمانہ ہے۔

(iv) ہندسی اوسط ..... قدروں کی جانب میلان رکھتا ہے۔

(v) اگر کسی سلسلے کا ایک مد بھی صفر ہو تو اس کا ہندسی اوسط ..... ہوگا۔

(vi) اگر کسی شئے کی قیمت 4 برسوں میں دوگنی ہو جاتی ہے تو سالانہ اوسط فیصد اضافہ ..... ہے۔

(vii) 5 سال کے دوران کسی فیکٹری پیداوار کے سالانہ افزایش کی شرحیں بالترتیب 5, 2.5, 7.5, 5 اور 10 فیصد ہیں تو اس مدت کے لیے مخلوط افزایش کی شرح فی سال ..... ہے۔

13.3 ہارمونی اوسط Harmonic Mean

جیسا کہ آپ جانتے ہیں، مواد مختلف شکل میں ہوتا ہے۔ مرکزی رجحان کے پیمانوں کے استعمال کی موزونیت کا فیصلہ کرنے کے لیے، مواد جس انداز سے پیش کیا جاتا ہے، وہ انداز نہایت اہم ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر، جب کل فاصلہ مستقل ہو اور رفتار فی اکائی وقت دی گئی ہو، تو اوسط رفتار معلوم کرنے کے لیے ہارمونی اوسط نہایت موزوں ہے۔ فرض کیجیے کہ مواد فی گھنٹہ تیار کردہ اشیا کے حوالہ سے دیا گیا ہے اور ہم فی اکائی اوسط وقت معلوم کرنے میں دلچسپی رکھتے ہیں، تو ہارمونی اوسط قابل ترجیح رہے گا۔

13.3.1 تحسیب Computation

گروہ بند اور غیر گروہ بند مواد کے لیے ہارمونی اوسط کی تحسیب مختلف ہوتی ہے اب ہم ان طریقوں پر الگ الگ بحث کریں گے۔

غیر گروہ بند مواد Ungrouped Data

اگر متغیرہ کی 'n' قدریں ہیں یعنی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ان کا ہارمونی اوسط مندرجہ ذیل طریقے سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{Harmonic Mean} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum\frac{1}{x}}$$ ہارمونی اوسط

$$= \frac{\sum\frac{1}{x}}{n}$$ ہارمونی اوسط

$\frac{\sum 1/x}{n}$ ہارمونی اوسط کا مقلوب ہے

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ویں n قدروں کے مقلوبوں کے حسابی اوسط کا مقلوب

لہذا ہارمونی اوسط مقلوبوں کے حسابی اوسط کا مقلوب ہے۔ مثال کے طور پر دو قدروں 12 اور 15 کا ہارمونی اوسط مندرجہ ذیل طریقے سے معلوم کیا جاتا ہے:۔

$$H.M. = \frac{2}{\frac{1}{12}+\frac{1}{15}}$$

$$= \frac{2}{\frac{5+4}{60}}$$

$$= \frac{120}{9}$$

$$= 13.34$$

تمثیل 5

ایک موٹر سوار نے 480 کیلومیٹر فی دن کے حساب سے تین دن سفر کیا۔ پہلے دن 48 کیلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے اس نے 10 گھنٹے سفر کیا، دوسرے دن 40 کیلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے 12 گھنٹے سفر کیا اور تیسرے دن 32 کلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے 15 گھنٹے سفر کیا۔ اس کی اوسط رفتار کیا تھی؟

حل

یہاں پر فی دن طے شدہ کل فاصلہ مستقل ہے، جبکہ وقت اور رفتار متغیر ہیں۔ ہمیں اوسط رفتار محسوب کرنا ہے۔ اس لیے ہارمونی اوسط موزوں اوسط ہے۔

$$HM = \frac{3}{\frac{1}{48}+\frac{1}{40}+\frac{1}{32}}$$

$$= \frac{3}{\frac{37}{480}}$$

$$= \frac{3 \times 480}{37}$$

= 39 کیلومیٹر فی گھنٹہ (تقریباً)

یہاں پر، ہارمونی اوسط کیسے موزوں اوسط بن جاتا ہے؟ اس کی تصدیق مندرجہ ذیل سے کی جاسکتی ہے۔ 3 دن میں کل طے شدہ مسافت = 480 + 480 + 480 = 480 x 3 کیلومیٹر۔ لیا گیا کل وقت = 10 + 12 + 15 = 37

اس لیے اوسط رفتار = $\frac{3 \times 480}{37}$ یعنی 39 کلومیٹر فی گھنٹہ (تقریباً)۔ اب غور کیا جائے کہ اس منطقی طریقہ کے ذریعہ حاصل کردہ نتیجہ ہارمونی اوسط کے مماثل ہے۔ اس لیے رفتاروں کا اوسط حاصل کرنے کے لیے، جب کہ کل فاصلہ مستقل ہو اور وقت متغیر ہو، ہارمونی اوسط موزوں اوسط ہے۔

گروہ بند مواد Grouped Data

جیسا کہ آپ واقف ہیں، گروہ بند مواد کی دو قسمیں ہیں: (i) غیر مسلسل سلسلہ (ii) مسلسل سلسلہ۔ اب دو قسم کے مواد کے سٹوں کے لیے ہارمونی اوسط معلوم کرنے کے طریقوں کا مطالعہ کریں گے۔

غیر مسلسل سلسلہ Discrete Series : غیر مسلسل سلسلے کے لیے، ہارمونی اوسط کو مندرجہ ذیل طریقے سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$HM = \frac{n}{\Sigma f(\text{reciprocals of } x)}$$

$$= \frac{n}{\Sigma f \frac{1}{x}}$$

$$= \text{Reciprocal } \frac{\Sigma f \frac{1}{x}}{n}$$

(مقلوب)

جہاں پر علامتوں کے معنی حسب معمول ہیں۔

یہ طریقہ کار مندرجہ ذیل مراحل پر مشتمل ہے۔

(1) متغیرہ x کی مختلف قدروں کے مقلوب لیجیے۔

(2) مقلوبوں کو متعلقہ تعددوں سے ضرب دیجیے اور حاصل ضرب کی جمع معلوم کیجیے یعنی $\left(\Sigma f \frac{1}{x}\right)$

(3) کل تعدد (n) اور $\Sigma f \frac{1}{x}$ کی نسبت حاصل کیجیے۔

تمثیل 6

ایک شخص جنس A کو 2 کیلوگرام فی روپیہ کے حساب سے 10 کیلوگرام اور جنس B کو 5 کیلوگرام فی روپیہ کے حساب سے 20 کیلوگرام، اور جنس C کو 10 کیلوگرام فی روپیہ کے حساب سے 30 کیلوگرام خریدتا ہے۔ فی روپیہ کیلوگرام میں اوسط قیمت معلوم کیجیے۔

حل

ہمیں اوسط قیمت معلوم کرنا ہے۔ لہذا وہ مدات جن کا اوسط مطلوب ہے 'x' سے تعبیر کیے جاتے ہیں۔ خریدی گئی مقداریں تعدد وہاں سے مشابہ ہیں۔ اس لیے انہیں f سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اب ہارمونی اوسط کو مندرجہ ذیل طریقے سے محسوب کیا جائے گا:۔

اجناس :	قیمت کیلوفی روپیہ میں (x)	خریدی ہوئی مقدار (f)	$\frac{1}{x}$	$f\frac{1}{x}$
A	2	10	0.5	5.0
B	5	20	0.2	4.0
C	10	30	0.1	3.0
جملہ		$n = \Sigma f = 60$		$\Sigma f\frac{1}{x} = 12.0$

$$HM = \frac{n}{\Sigma f \frac{1}{x}}$$
$$= \frac{60}{12.0}$$
$$= 5.0$$

لہذا اوسط قیمت ہے 5 کیلوفی روپیہ۔

نوٹ:

آپ یہ سوال کر سکتے ہیں کہ اس تمثیل میں ہارمونی اوسط کیوں محسوب کیا گیا ہے۔ اوسط قیمت دریافت کرنے کے لیے آپ کو درکار ہے جملہ خرچ کی ہوی رقم اور جملہ خریدی ہوی مقدار (کیلوگرام)۔

$$\text{کیلوگرام میں فی روپیہ اوسط قیمت} = \frac{\text{جملہ خریدی ہوی مقدار}}{\text{جملہ خرچ کی ہوی رقم}}$$

کالم $\frac{1}{x}$ روپوں میں ایک کیلوگرام کی قیمت ظاہر کرتا ہے اور کالم f خریدی ہوی مقدار ظاہر کرتا ہے۔ لہذا کالم $f\frac{1}{x}$ مختلف اجناس کی f مقدار خریدنے جملہ خرچ کردہ رقم کو ظاہر کرتا ہے۔ اب Σf یا n سے جملہ خرچ کردہ رقم $\Sigma f\frac{1}{x}$ سے خریدی ہوی کیلوگرام میں حد مقدار حاصل ہوتی ہے۔

چنانچہ مطلوبہ اوسط ہے $\frac{n}{\Sigma f\frac{1}{x}}$ جو کہ ہارمونی اوسط کے برابر ہے۔

اس تمثیل سے آپ یہ بھی نوٹ کریں گے کہ مقدار اکائی میں ظاہر کردہ قیمتوں کا اوسط نکالنا ہو تو ہارمونی اوسط ایک صحیح اوسط ہے۔ عام طور پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ مدات کا اوسط معلوم کرنے کے لیے ان کے مقلوبوں (reciprocals) کا استعمال کیا جائے تو ہارمونی اوسط ہی 'اوسط معلوم کرنے کا ایک صحیح طریقہ ہے۔

مسلسل سلسلہ Continuous Series: مسلسل سلسلہ کے لیے تخمیب کا وہی طریقہ ہے جو غیر مسلسل سلسلے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ فرق صرف یہ ہے کہ مسلسل سلسلے کی صورت میں، مختلف جماعتوں کی وسطی قدروں کے (m) مقلوبوں کو لیا جاتا ہے۔ اس کے بعد ان کو متعلقہ جماعتی تعدادوں سے ضرب دے کر ان حاصل ضربوں کو جمع کیا جاتا ہے یعنی $(\Sigma f/m)$۔ اس کے بعد کل حاصل ضرب اور کل تعداد (n) کی نسبت معلوم کی جاتی ہے۔

$$\therefore H.M. = \frac{n}{\Sigma f/m} \text{ or Reciprocal } \frac{\Sigma f \frac{1}{m}}{n}$$

تمثیل 7

مندرجہ ذیل معلومات کے لیے ہارمونی اوسط محسوب کیجیے:

جماعتی وقفہ	f
0 - 10	5
10 - 20	8
20 - 30	10
30 - 40	2
40 - 50	7
50 - 60	6
60 - 70	3

حل

جماعتی وقفے	f	mid values (m)	1/m	f/m
0 - 10	5	05	0.2	1.0
10 - 20	8	15	0.067	0.536
20 - 30	10	25	0.04	0.40
30 - 40	2	35	0.029	0.348
40 - 50	7	45	0.022	0.154
50 - 60	6	55	0.018	0.108
60 - 70	3	65	0.015	0.045
	51			$\Sigma f/m = 2.591$

$$HM = \frac{n}{\Sigma f/m}$$
$$= \frac{51}{2.591} = 19.68$$

∴ ہارمونی اوسط 19.68 ہے۔

13.3.2 وزنی ہارمونی اوسط Weighted Harmonic Mean

ایسی صورت حال بھی درپیش آتی ہے جہاں پر سادہ ہارمونی اوسط کی بجائے وزنی ہارمونی اوسط معلوم کرنا ضروری ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر کوئی شخص پہلے دس کیلومیٹر کا فاصلہ 4 کیلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے طے کرتا ہے، پھر 5 کیلومیٹر کا فاصلہ فی گھنٹہ 3 کیلومیٹر کی رفتار سے اور آخر میں 4 کیلومیٹر فی گھنٹہ 2 کیلومیٹر کی رفتار سے طے کرتا ہے۔ اس کی اوسط رفتار معلوم کرنی ہے۔ تینوں مرحلوں میں طے شدہ فاصلوں کو بطور اوزان استعمال کیا جاتا ہے۔

$$\text{Weighted H.M.} = \frac{\Sigma W}{\Sigma \frac{W}{x}} \quad \text{where 'W' refers to weights}$$

(وزنی ہارمونی اوسط) جہاں (W) اوزان کی علامت ہے

$$\text{Weighted H.M.} = \text{Reciprocal} = \frac{\Sigma W \frac{1}{x}}{\Sigma W}$$

(وزنی ہارمونی اوسط) (مقلوب)

اوپر کی مثال میں

x	2	3	4
w	4	5	10

$$\text{وزنی ہارمونی اوسط} = \frac{10+5+4}{\frac{10}{4}+\frac{5}{3}+\frac{4}{2}}$$

$$= \frac{19}{2.5+1.67+2}$$

$$= \frac{19}{6.17}$$

$$= 3.08 \text{ کیلومیٹر فی گھنٹہ}$$

اس تمثیل میں، مستقل ہارمونی اوسط موزوں طریقہ ہے۔ حسب معمول حسابی طریقے سے اوسط رفتار معلوم کر کے اس کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔

صورت	فاصلہ (کیلومیٹر میں)	رفتار (فی گھنٹہ)	صرف شدہ وقت	گھنٹے
پہلی	10kms	4km.ph	10/4	2.50
دوسری	5kms	3km.ph	5/3	1.67
تیسری	4kms	2km.ph	4/2	2.00
جملہ	19 kms			6.17

اوسط رفتار 3.08 = 19/6.17 کیلومیٹر فی گھنٹہ دونوں نتائج یکساں ہیں۔ اس لیے جب ایسے مدوں کے لیے جس کی اضافی اہمیت مختلف ہے، ہارمونی اوسط محسوب کرنا ہو تو وزنی ہارمونی اوسط محسوب کرنا چاہیے۔

تمثیل 8

مسٹر راکیش 6 کیلومیٹر دور واقع ایک دیہات کے لیے روانہ ہوا۔ اس نے اپنی کار میں 40 کیلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے سفر کیا۔ 4 کیلومیٹر کی مسافت کرنے کے بعد کار رک گئی۔ اس کے بعد اس نے ایک رکشا میں 10 کیلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے سفر کیا۔ 1.5 کیلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے کے بعد، اس نے رکشا چھوڑ دیا اور بقیہ فاصلہ 4 کیلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے پیدل چل کر طے کیا۔ اس کی اوسط رفتار فی گھنٹہ معلوم کیجیے اور نتیجہ کی تصدیق کیجیے۔

حل

یہاں پر رفتاریں ہیں، $x_1 = 40$ ، $x_2 = 10$ ، $x_3 = 4$ اور طے شدہ فاصلے یعنی $w_1 = 4$, $w_2 = 1.5$ اور $w_3 = 0.5$ بطور وزن لیے جاتے ہیں۔

$$\text{Weighted H.M} = \frac{\Sigma w}{\Sigma w / x}$$

$$= \frac{4 + 1.5 + 0.5}{\frac{1}{40} \times 4 + \frac{1}{10} \times 1.5 + \frac{1}{4} \times 0.5}$$

$$= \frac{6}{0.1 + 0.15 + 0.125}$$

$$= \frac{6}{0.375}$$

$$= 16$$

لہذا راکیش کی اوسط رفتار 16 کیلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔اب ہم اس جواب کی تصدیق صرف کردہ وقت کی تحسیب سے کریں گے۔

سواری کی قسم	فاصلہ	رفتار	صرف لیا گیا وقت
موٹر کار	4kms	40 km.ph	6 minutes
رکشا	1.5 kms	10 km.ph	9 minutes
پیدل	0.5 kms	4 km.ph	7.5 minutes
جملہ	6 kms		22.5 minutes

22.5 منٹوں میں راکیش نے 6 کیلومیٹر کا فاصلہ طے کیا۔اس لیے 60 منٹوں میں وہ 16 کیلو میٹر فاصلہ طے کر سکتے ہیں یعنی (6x60/22.5)

13.3.3 ہارمونی اوسط کی خاصیتیں Properties of Harmonic Mean

(1) اگر متغیرہ کی ہر قدر ہارمونی اوسط سے تبدیل کی جاتی ہے تو قدروں کے مقلوبوں (reciprocals) کا مجموعہ وہی رہے گا۔

(2) ہارمونی اوسط انفرادی مشاہدوں کے مقلوبوں کے حسابی اوسط کا مقلوب ہوتا ہے۔

(3) حسابی اور ہندسی اوسطوں کی طرح یہ مزید الجبرائی عمل کے قابل ہے۔

(4) تینوں اوسط میں (یعنی حسابی، ہندسی اور ہارمونی) یہ کم ترین ہوتا ہے یعنی $A.M \geq G.M \geq H.M$ ۔

اس کی وضاحت کے لیے پانچ اعداد 2, 3, 5, 10, 100 کا ہارمونی اوسط معلوم کریں گے اور اس کا حسابی اور ہندسی اوسطوں سے تقابل کریں گے۔

(ہارمونی اوسط)

$$H.M. = \frac{5}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{5}{0.50 + 0.33 + 0.20 + 0.10 + 0.01}$$

$$= \frac{5}{1.14} = 4.39$$

جیسا کہ اس سے پہلے ہندسی اوسط کی خاصیتوں کے ضمن میں محسوب کیا گیا ہے کہ جب حسابی اوسط 24 ہو تو ہندسی اوسط 7.86 ہوتا ہے۔اس سے

واضح ہوتا ہے کہ مثبت مواد کے سٹ کے لیے AM > GM > HM ۔ اس خاصیت کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ ہارمونی اوسط کا رجحان چھوٹے مدوں کی طرف ہوتا ہے۔

نوٹ : جب تمام دیے ہوئے مدوں کی قدریں بالکل یکساں ہوں تو، AM = GM = HM ہوں گے۔ اس صورت میں، وسطانیہ اور کثیریہ کی قدریں بھی اسی عام قدر کے مساوی ہوں گی۔

13.3.4 استعمال اور خامیاں Uses and Limitations

استعمال

(1) رفتار، وقت اور فاصلہ سے وابستہ شرحوں اور نسبتوں (rates and ratios) کے لیے اور اوسط رفتار معلوم کرنے کے لیے ہارمونی اوسط کا استعمال کیا جاتا ہے۔

(2) قیمت اور مقدار سے وابستہ شرحوں اور نسبتوں کے لیے (جب کہ خرچ کردہ رقم اور فی روپیہ اکائیاں دی جائیں تو) ہارمونی اوسط کو استعمال کیا جاتا ہے۔ عام طور پر اگر مدوں کے مقلوبوں (reciprocals) کو ان کے مخلوط مشترکہ اثرات حاصل کرنے کے لیے استعمال کیا جائے تو ان کا اوسط معلوم کرنے کے لیے ہارمونی اوسط استعمال کیا جاتا ہے۔

(3) دیئے گئے مواد کے سٹ میں اگر کچھ بڑی قدریں ہیں، مقلوبات بڑے اعداد کے اثر کو کم کرتے ہیں۔ ایسی صورتوں میں ہارمونی اوسط کو استعمال کیا جانا چاہیئے۔

(4) جب متغیرہ کی چھوٹی قدروں کو بڑا وزن اور بڑی قدروں کو چھوٹا وزن دینا مطلوب ہو تو اس کے استعمال کی سفارش کی جاتی ہے۔

خامیاں Limitations

(1) اس کو محسوب کرنا اور سمجھنا مشکل ہے۔

(2) اگر ایک یا زیادہ اعداد صفر ہوں تو اس کو محسوب نہیں کیا جاسکتا۔ درحقیقت ان حالات میں ہارمونی اوسط ہمیشہ صفر ہوتا ہے چاہے دوسرے اعداد کی قدر کچھ ہی کیوں نہ ہو۔ مثال کے طور پر 0 ,10 اور 100 کا ہارمونی اوسط ہوگا :

$$\frac{3}{\frac{1}{0}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}} = \frac{3}{\infty + 0.10 + 0.01} = \frac{3}{\infty} = 0$$

نوٹ : علامت ∞ کا مطلب ہے لامتناہی۔ یہ اعظم ترین عدد کا تصور ہے۔

(3) سب سے چھوٹے مد کو سب سے بڑا وزن دینا، ہمیشہ پسندیدہ صفت نہیں اور معاشی مواد کے تجزیے میں اس کا استعمال محدود ہوتا ہے۔

13.4 ہارمونی اوسط بمقابل حسابی اوسط Harmonic Mean Vs. Arithmetic Mean

رفتار، وقت اور فاصلہ یا قیمت، مقدار اور خرچ کردہ رقم سے وابستہ شرحوں اور نسبتوں کے اوسطوں کو اخذ کرنے کے لیے ہارمونی اوسط اور حسابی اوسط دونوں میں سے کسی ایک کا انتخاب کوئی آسان کام نہیں ہے۔ بعض صورتوں میں ہارمونی اوسط مناسب نظر آتا ہے جب کہ دوسری صورتوں میں صحیح نتائج کے لیے ہارمونی اوسط زیادہ مناسب معلوم ہوتا ہے۔ اس قسم کے انتخاب کا زیادہ تر انحصار مواد کی نوعیت پر ہوتا ہے۔ ان دونوں اوسطوں کے منصفانہ انتخاب کے لیے ذیل میں چند عام نوعیت کے رہنما خطوط کی سفارش کی جاتی ہے۔

(1) رفتار، وقت اور فاصلہ سے وابستہ شرحوں اور نسبتوں کے لیے، اگر فاصلہ دیا گیا ہو تو ہارمونی اوسط کو ترجیح دی جاسکتی ہے لیکن اگر وقت دیا گیا ہے تو حسابی اوسط زیادہ موزوں ثابت ہوگا۔ عام طور پر اگر دی گئی نسبتیں فی y 'x اکائیوں کی شکل میں دی جائیں تو ہارمونی اوسط استعمال کیجیے جبکہ x اکائیاں دی جائیں۔ حسابی اوسط استعمال کیجیے جبکہ y اکائیاں دی جائیں۔ مندرجہ ذیل تمثیل 9 کے ذریعہ اس کو بہتر طور پر سمجھا جاسکتا ہے۔

تمثیل 9

ایک شخص موٹر کار کے ذریعہ 30 کیلومیٹر فی گھنٹہ کی اوسط رفتار سے 100 کیلومیٹر فاصلہ طے کرتا ہے بعد ازاں 20 کیلومیٹر فی گھنٹہ کی اوسط رفتار سے واپسی کا سفر طے کرتا ہے۔ اس کی اوسط رفتار کیا ہے؟

حل

یہاں پر رفتار کیلومیٹر فی گھنٹے میں دی گئی ہے اور طے کیا گیا کل فاصلہ (یعنی فاصلہ آمد و رفت) دونوں طرف 100 کیلومیٹر) بھی دیا گیا ہے اس لیے وزنی ہارمونی اوسط ہر ایک کو مساوی وزن 100 کے ساتھ یا سادہ ہارمونی اوسط زیادہ موزوں اوسط ثابت ہوگا۔

$$H.M. = \frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30}}$$

$$= \frac{2}{\frac{3+2}{60}} = \frac{2 \times 60}{5}$$

$$= 24 \text{ کیلومیٹر فی گھنٹہ}$$

اب مندرجہ بالا معلومات کو ذرا سا تبدیل کریں گے۔ فرض کیجیے اسی سفر کے لیے وہ شخص 30 کیلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے نصف وقت اور 20 کیلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے باقی نصف وقت سفر کرتا ہے۔ چونکہ اوقات دیئے گئے ہیں اس لیے حسابی اوسط استعمال کیا جائے گا۔ مزید چونکہ سفر کے دو اوقات مساوی ہیں، سادہ حسابی اوسط موزوں ہے۔

$$\text{حسابی اوسط} = \frac{30+20}{2} = 25 \text{ کیلومیٹر فی گھنٹہ}$$

یہاں پر آپ جانچ سکتے ہیں آیا حسابی اوسط صحیح اوسط ہے یا نہیں۔ 25 کیلومیٹر فی گھنٹہ کی حسابی اوسط رفتار سے، وہ 8 گھنٹوں میں 200 کیلومیٹر کا فاصلہ طے کرتا ہے۔ اگر وہ نصف وقت یعنی 4 گھنٹے 30 کیلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے سفر کرتا ہے اور مزید 4 گھنٹے 20 کیلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے سفر کرتا ہے تو وہ ٹھیک 200 کیلومیٹر کا فاصلہ طے کرتا ہے۔ اس لیے اس صورت میں صحیح اوسط رفتار حسابی اوسط ہوگی۔

(2) دوسرا امتیازی نکتہ یہ ہے کہ حسابی اوسط انتہائی قدروں سے متاثر ہوتا ہے جب کہ ہارمونی اوسط چھوٹی قدروں کی جانب حساس ہے۔ اس لیے ایک غیر ہموار تقسیم کے لیے حسابی اوسط کے استعمال کا مشورہ مناسب نہیں ہے جب کہ معاشی مواد کے تجزیہ کے لیے ہارمونی اوسط استعمال نہیں کیا جاتا۔

اپنی معلومات کی جانچ B

(1) ہارمونی اوسط کیا ہے؟

.....

.....

.....

.....

(2) ایک طلبہ گروپ کے ماہانہ اخراجات مندرجہ ذیل ہیں۔ ہارمونی اوسط معلوم کیجیے۔

125, 75, 10, 130, 45, 500, 150, 80, 65, 100

.....

.....

.....

.....

(3) مندرجہ ذیل مواد سے ہارمونی اوسط محسوب کیجیے۔

مدوں کا سائز	:	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
تعدد	:	5	10	7	3	2

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(4) ایک سرمایہ کار، ہر مہینہ کسی کمپنی کے 1,200 روپے کے حصص خریدتا ہے۔ پہلے پانچ مہینوں میں اس نے 10 روپے، 12 روپے، 15 روپے، 20 روپے، 24 روپے فی حصہ مالیتی حصص خریدے۔ فی حصہ ادا کی گئی اوسط قیمت کیا ہے؟

.....

.....

.....

.....

.....

(5) ایک شخص اپنے شہر کو پہنچنے کے لیے، 80 کیلومیٹر فی گھنٹے کی اوسط رفتار سے ٹرین کے ذریعہ 1200 کیلومیٹر فاصلہ طے کرتا ہے۔ بعد میں 40 کیلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے بس کے ذریعہ 20 کیلومیٹر اور آخر میں 8 کیلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے سائیکل رکشا کے ذریعہ 5 کیلومیٹر طے کرتا ہے۔ اس سفر میں اوسط رفتار کیا ہے؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(6) تحریر کیجیے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) ہارمونی اوسط، حسابی اوسط کا مقلوب (reciprocal) ہے۔

(ii) ہارمونی اوسط تمام حالات میں شرحوں اور رفتاروں کے اوسط نکالنے کا بہترین پیمانہ ہے۔

(iii) اوزان کے استعمال سے صرف اوسط کے ریاضیاتی پیمانے ہی محسوب کیے جاسکتے ہیں۔

(iv) اگر مواد میں کسی مد کی قدر 0 (صفر) ہو تو اس مواد میں (ہارمونی اوسط) موجود نہیں رہتا۔

(v) اگر خریدے ہوئے مدوں کی تعداد اور روپیوں میں فی مد قیمت دی جائے تو پہلے ہارمونی اوسط ہی صحیح اوسط ہوتا ہے۔

(7) قوس میں دیئے گئے موزوں الفاظ سے خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

(i) ..... مقلوبوں کے اوسط کا مقلوب ہے۔ (حسابی اوسط/ ہارمونی اوسط)

(ii) ہارمونی اوسط ایسا اوسط ہے کہ اگر متغیرہ کی ہر قدر کو اس سے بدلا جائے تو متغیرہ کی قدر کے ..... کی میزان یکساں رہتی ہے۔
(حاصل جمع product / مقلوب Reciprocal)

(iii) تین اواسط (GM ' AM اور HM) میں ہارمونی اوسط سب سے .....ہے۔ (بڑا/چھوٹا)

(iv) جب چھوٹی قدروں کو ..... اوزان دینا مطلوب ہو تو، ہارمونی اوسط کی سفارش کی جاتی ہے۔ (چھوٹے/بڑے)

(v) اگر دی گئی نسبتیں x اکائی فی y کی شکل میں ہوں، ..... کو استعمال کریں جب کہ x دیے گئے ہوں۔
(ہارمونی اوسط/حسابی اوسط)

(vi) اگر طیارے کی رفتار اور طے شدہ فاصلہ دیا جائے تو، اوسط رفتار معلوم کرنے کے لیے ..... ہارمونی اوسط استعمال کیا جاتا ہے۔
(سادہ/وزنی)

13.5 متحرک اوسط Moving Average

13.5.1 متحرک اوسط کیا ہے؟ What is Moving Average?

قیمتوں کا رجحان، خریداری، نفع وغیرہ جیسے مسایل زیر غور ہوں تو ایک مخصوص قسم کا اوسط استعمال کیا جاتا ہے جس کو متحرک اوسط کہتے ہیں۔ متحرک اوسط زمانی سلسلہ کے مواد میں طویل مدتی رجحان کو جاننے کا ایک پیمانہ ہے۔ متحرک اوسط ایک مدت پر محیط نمودار ہونے والے مواد کا حسابی اوسط ہے جس کی تحسیب میں پہلے مد کو نئے نمودار ہونے والے مد سے بدلا جاتا ہے۔ ہر متحرک اوسط کا دارومدار ایک مقررہ عرصہ پر محیط قدروں پر مبنی ہوتا ہے جس کو ''متحرک اوسطوں کی مدت'' کہا جاتا ہے۔

لگاتار اوسط نکالنے کا یہ طریقہ کار زمانی سلسلہ کے مواد میں ہمواری لانے کا ایک موثر عمل ہے یعنی تغیرات کے وقفہ اور شدت میں یکسانیت پیدا کرتا ہے۔ ان کا مکمل ازالہ متحرک اوسط کی اس مدت کے انتخاب سے کیا جاسکتا ہے جو کہ سائیکلی وقفہ (Period of cycle) کے برابر ہوتا ہے (یعنی دَوری حرکات)۔ اگر زمانی سلسلہ میں دوری حرکت نہ بھی ہو تو متحرک اوسط کے عمل سے بڑی حد تک مواد کی بے قاعدگی میں کمی کی جاسکتی ہے۔

13.5.2 تحسیب Computation

متحرک اوسط کو محسوب کرنے میں، متحرک اوسط کا وقفہ (Period) نہایت اہم ہے۔ مثال کے طور پر سالانہ قدروں A, B, C, D, E اور F کے لیے، تین سالانہ متحرک اوسطوں کی تحسیب کی جاسکتی ہے جیسا کہ جدول 13.1 میں بتایا گیا ہے۔

جدول 13.1
متحرک اوسطوں کی تحسیب

سالانہ قدریں	تین سالہ متحرک مجموعے	تین سالہ متحرک اوسط
A	———	———
B	(A + B + C)	(A + B + C)/3
C	(B + C + D)	(B + C + D)/3
D	(C + D + E)	(C + D + E)/3
E	(D + E + F)	(D + E + F)/3
F	———	———

ہمیں یا تو متحرک اوسط کا طاق وقفہ (یعنی 3 سال، 5 سال، 7 سال) یا جفت وقفہ (یعنی 2 سال، 4 سال' 6 سال) لینا پڑتا ہے۔ متحرک اوسط کے وقفہ (Period) کا تعین عام طور سے مواد میں دَوریہ (cycle) کی لمبائی کے پیش نظر کیا جاتا ہے۔ عام طور پر کاروباری اغراض کے لیے متحرک اوسط کا وقفہ 3 تا 10 سال کا درمیانی طاق وقفہ لیا جاتا ہے۔

متحرک اوسط کا طاق وقفہ Odd Period of Moving Averages :

جب متحرک اوسط کا وقفہ طاق ہو (جیسے 3 سال، 5 سال، 7 سال) متحرک اوسط کو متعلقہ وقفے کے وسطی نقطہ پر لیا جاتا ہے۔ جدول 13.2 کا بہ غور مطالعہ کیجیے تا کہ طریقہ کار سمجھ میں آسکے۔

جدول 13.2
طاق وقفہ رکھنے والے متحرک اوسطوں کی تحسیب

سال	فروخت ('000 ٹنوں میں)	۳ سالہ متحرک مجموعے	۳ سالہ متحرک اوسط
1977	15	---	---
1978	25	72	24
1979	32	81	27
1980	24	75	25
1981	19	60	20
1982	17	---	---

آپ غور کر سکتے ہیں کہ پہلے تین سالوں کے لیے (1977 ' 1978 اور 1979) متحرک اوسط یعنی 72 کو وسطی سال 1978 کے مقابل رکھا جاتا ہے۔ پہلے سال کو حذف کر کے، اگلے تین سال یعنی 1978 ' 1979 اور 1980 کے متحرک اوسط کو 1979 کے مقابل رکھا جاتا ہے وغیرہ۔ یہ بھی قابل غور ہے کہ پہلے اور آخری سال کے لیے دیئے گئے مواد میں متحرک اوسط حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ اگر متحرک اوسط کا وقفہ 5 سال ہے تو پہلے دو سال اور آخری دو سال کا متحرک اوسط معلوم نہیں کیا جا سکتا۔

متحرک اوسط کا جفت وقفہ Even Period of Moving Average

اگر متحرک اوسط کا وقفہ جفت ہو (جیسے 4 سال، 6 سال، 8 سال) تو متحرک مجموعے اور متحرک اوسط کو کسی سال کے مقابل قطعی طور پر نہیں لکھا جا سکتا۔ ایسی صورت میں مرکوز کاری (centering) کا سہارا لینا پڑتا ہے۔ مرکوز کاری اس انداز میں کی جا سکتی ہے کہ متحرک اوسط اصل مواد پر منطبق ہو جاتا ہے۔ تمثیل 11 کا بغور مطالعہ کر کے مرکوز کاری کے طریقہ کار کو سمجھ لیں۔

تمثیل 10

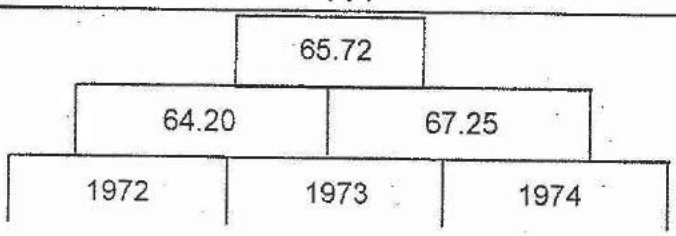
مندرجہ ذیل مواد کے لیے چار سالہ متحرک اوسط معلوم کیجیے۔

سال	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980 :
فروخت ('000 روپوں میں) :	75	60	54	69	86	65	63	80	90	72

حل

سال	فروخت ('000 روپوں میں)	4 سالہ متحرک مجموعہ	4 سالہ متحرک اوسط	4 سالہ مرکوز متحرک اوسط
1971	75	------	------	------
1972	60	------	------	------
		258	64.20	
1973	54			65.72
		269	67.25	
1974	69			67.88
		274	68.50	
1975	86			69.62
		283	70.75	
1976	65			72.12
		294	73.50	
1977	63			73.50
		298	74.50	
1978	80			75.37
		305	76.25	
1979	90	------	------	------
1980	72	------		

پہلے چار سالوں (یعنی 1971-1974) کا مجموعہ 258 اور ان کا اوسط 64.20 اس مدت کے درمیان یعنی 1972 اور 1973 کے درمیان لکھا گیا ہے۔ یہ درمیانی وقفہ 1972 کے آخری چھ ماہ اور 1973 کے پہلے چھ ماہ کو لے کر خصوصی طور پر واضح کیا گیا ہے۔ اسی طرح میزان 269، 1972 تا 1975 کی درمیانی مدت سے متعلق ہے اور ان کے اوسط 67.25 کو خصوصی طور پر ڈیزائن کیے ہوئے سال جو کہ 1973 اور 1974 کا درمیانی سال ہے، مقابل لکھا گیا ہے۔ یہ عمل اس وقت تک جاری رہتا ہے جب تک کہ آخری اوسط 76.25 اور میزان 305، 1978 اور 1979 کے درمیانی سال کے مقابل نہ لکھا جائے۔ پہلا مرکوز (centered) متحرک اوسط 65.72 (یعنی متحرک اوسط کا وہ عدد جو سال 1973 سے منطبق ہوتا ہے) معلوم کرنے کے لیے ہم کو 64.20 اور 67.25 (کالم نمبر 4 کے پہلے دو اعداد) کی وسطی قدر معلوم کرنی ہوگی۔ مندرجہ شکل کی مدد سے اس کو آسانی سمجھا جا سکتا ہے۔



شکل سے ظاہر ہے کہ وہ عدد جو سال 1973 سے منطبق ہوتا ہے 64.20 کے نصف اور 67.24 کے نصف سے لیا جاتا ہے، جس کا مطلب ہے کہ یہ دو متحرک اوسطوں کا حسابی اوسط ہے۔ لہٰذا اس اوسط قدر 65.72 کو مرکوز کردہ (centered) متحرک اوسط کہا جاتا ہے، اور آخری کالم میں داخل کیا جاتا ہے۔ اس طرح کالم 4 سے دو متواتر اعداد کا اوسط نکال کر مختلف مرکوز کردہ اوسطوں کو محسوب کیا جا سکتا ہے۔

13.6 موزوں اوسط کا انتخاب Choice of a Suitable Average

اکائی 13-10 میں ہم نے مختلف اوساط یعنی حسابی اوسط، کثیریہ، وسطانیہ، ہندسی اوسط وغیرہ پر بحث کی۔ آپ نے ان اوساط کی خوبیوں، خامیوں اور خاص استعمالات کے متعلق بھی بہت کچھ سیکھا۔ اب یہ جاننا ضروری ہے کہ کس وقت، کون سا اوسط موزونیت کے ساتھ استعمال کیا جانا چاہیے۔ مرکزی رجحان کے اچھے پیمانے کی لازمی صفات (qualities) کے نقطۂ نظر سے جائزہ لینے پر، حسابی اوسط، بہترین پیمانہ معلوم ہوتا ہے، کیونکہ اس میں بہت سی صفات موجود ہیں۔ لیکن موزوں اوسط کا انتخاب ایک مسئلہ بن جاتا ہے۔ اگر انتخاب موزوں نہ ہو تو، نتائج قابل بھروسہ نہیں ہوں گے۔ کسی اوسط کے ناموزوں انتخاب سے کیا گیا تقابل کا منظر حقیقت سے کوسوں دور ہوتا ہے۔ اس لیے، اوسط کا انتخاب کرتے وقت، مندرجہ ذیل نکات پر دھیان دینا چاہیے۔

(1) مقصد : اوسط کا انتخاب اُس مقصد سے ہم آہنگ ہونا چاہیے جس کی تکمیل کے لیے اس کو وضع کیا گیا ہے۔ اگر مقصد یہ ہے کہ سلسلہ کے سب مدوں کو مساوی اہمیت دی جائے تو، حسابی اوسط نہایت موزوں اوسط ہوگا۔ کسی مد کی دوسرے مدوں کے مقابل میں مقام بندی مطلوب ہو تو وسطانیہ، مناسب اوسط ہوتا ہے۔ جب چھوٹے مدوں کو بڑے مدوں کے مقابل میں زیادہ اہمیت دینی ہو تو ہندسی اوسط کا انتخاب کرنا چاہیے۔ اگر چھوٹی اقدار کو قابل لحاظ طور پر بڑے اوزان عطا کرنا ہو تو ہارمونی اوسط کا استعمال کرنا چاہیے۔

(2) مواد کے سٹ کی نوعیت اور ضمونہ : اگر تقسیم خمیدہ ہے تو کثیریہ یا حسابی اوسط کو ترجیح دی جائے گی۔ کھلے کناروں کی تقسیم کے لیے بھی کثیریہ یا حسابی اوسط زیادہ موزوں ہوتے ہیں۔ j شکلی تقسیم یا معکوس j شکلی تقسیم کی صورت میں وسطانیہ نہایت موزوں اوسط ہے۔ قیمت کی تقسیم اور آمدنی کی تقسیم اس کی دو مثالیں ہیں۔ اگر مواد یکساں طور پر پھیلا ہوا ہو اور وسیع تغیرات کا مظہر نہ ہو تو حسابی اوسط نہایت کارآمد اوسط ہے۔ اوسط پیداوار کی لاگت اس کی ایک مثال ہے۔ جب نسبتوں یا فیصدوں کا اوسط نکالنا مقصود ہو تو ہندسی اوسط موزوں ترین اوسط ہے۔ وہ مواد سٹ جس میں کسی متغیرہ کی قدر کا مقابلہ دوسرے مستقل متغیرہ کی قدر سے کرنا ہو تو ہارمونی اوسط موزوں ترین اوسط ہے۔ اس کی مثالیں ہیں متغیر رفتار اور مستقل فاصلے۔ فی روپیہ خرید کردہ تبدیل ہونے والی مقداریں وغیرہ۔

(3) مزید الجبرائی عمل کے لیے موزوں ہونا : اگر کسی اوسط کو مزید الجبرائی عمل کے لیے استعمال کرنا ہے، تو حسابی اوسط کو بہترین پیمانہ تصور کیا جاتا ہے کیونکہ اسے وسیع طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔

(4) کیفیتی مظاہر : ان خصوصیتوں کے لیے جو کیفیتی نوعیت کی ہوں، جیسے ایمانداری، خوبصورتی، ذہانت وغیرہ۔ وسطانیہ ایک موزوں اوسط ثابت ہو سکتا ہے۔

(5) خاص مقاصد : زمانی سلسلہ کے تجزیہ میں رجحان کو محسوب کرنے کے لیے، متحرک اوسط نہایت موزوں اوسط ہے۔

اگرچہ مندرجہ بالا ملحوظ نکات، موزوں اوسط کے انتخاب میں رہنما اصول کے طور پر کام آتے ہیں، کئی صورتوں میں یہ اختیاری ہوتے ہیں۔ اگر مفروضات کو ثابت کرنے کے لیے، اونچی قدر کی ضرورت پڑتی ہو تو اونچی قدر والے پیمانے کے استعمال کی ترغیب ہو سکتی ہے۔ چونکہ اپنی

خواہش کے مطابق ہم مرکزی رجحانات کے پیمانوں کا انتخاب کر سکتے ہیں، عین ممکن ہے کہ ہم وہ اوسط منتخب کر لیں جو ہمارے حسب خواہش نتیجہ برآمد کر سکے۔ غیر معقول طریقے سے یا نااہلی کی وجہ سے اختیار کیے گئے طریقہ کار کی پوری ذمہ داری ان کے استعمال کرنے والے پر ہے نہ کہ اوسط کے پیمانوں پر۔

اپنی معلومات کی جانچ C

(1) قوس میں دیئے گیے الفاظ سے موزوں لفظ منتخب کر کے خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

(i) ..... رجحان اور سائیکلی تغیرات (Cyclic variations) کا پیمانہ ہے۔ (اوسط/متحرک اوسط)

(ii) متحرک اوسط کے ..... کو استعمال کر کے زمانی سلسلہ کے تغیرات کو مکمل طور پر خارج کیا جاسکتا ہے۔ (وقفہ/طول)

(iii) متحرک اوسط کے جفت وقفہ (even period) کے لیے ... . کا سہارا لینا پڑتا ہے۔ (اوسط نکالنے/مرکز یانے)

(2) مندرجہ ذیل صورتوں کے لیے موزوں اوسط تجویز کیجیے۔

(i) ملبوسات کی دکان میں فروخت شدہ ملبوسات کے سائز۔

(ii) کھلے کناروں کی تقسیم۔

(iii) سال بہ سال فیصد تبدیلیوں کے اعداد سے درکار اوسط شرح نمو افزایش۔

(iv) فاصلہ متعین ہے جب کہ رفتاریں تغیر پذیر ہیں۔

(v) جب یہ مطلوب ہو کہ اُس اوسط سے حاصل کردہ مطلق انحرافات اقل ترین ہوں۔

(vi) جب مقصد یہ ہو کہ زمانی سلسلہ مواد سٹ کے بے قاعدہ متغیرات کو باقاعدہ بنایا جائے۔

(vii) اگر مقصد بڑے مدوں کی بجائے چھوٹے مدات کو زیادہ اہمیت دینا ہو۔

(viii) تقسیم میں انتہائی مدات موجود ہیں۔

(ix) مصارف زندگی کا اشاریہ تشکیل دینا ہو تو۔

(x) موجودہ فرنیچر اسٹائیل کے بجائے نئے فرنیچر اسٹائیل کو ترجیح دینا ہو تو۔

13.7 خلاصہ Let Us Sum Up

مرکزی رجحان کے کچھ اور پیمانے بھی موجود ہیں جیسے ہندسی اوسط اور ہارمونی اوسط جو مخصوص حالات میں استعمال کیے جاتے ہیں۔ نسبتوں اور فیصدوں کا اوسط نکالنے کے لیے، 'ہندسی اوسط' استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر کسی سلسلہ میں 'N' مدات ہوں تو ان کا ہندسی اوسط ان کے حاصل ضرب کا n واں جذر ہے۔ اگر مدوں کی تعداد زیادہ ہو تو آسانی سے محسوب کرنے کے لیے ہندسی اوسط کا لوگارتم لیا جاتا ہے۔ ہندسی اوسط گروہ بند اور غیر گروہ بند مواد کے لیے نیز غیر مسلسل (discrete series) اور مسلسل سلسلے (continuous series) کے لیے مختلف فارمولوں (formulas) سے محسوب کیا جاتا ہے۔ ہندسی اوسط کسی مخصوص مدت کے لیے، متغیرہ میں اوسط شرح تغیر محسوب کرنے کے لیے وسیع پیمانے پر استعمال کیا جاتا ہے۔ وزنی ہندسی اوسط بھی محسوب کیا جاسکتا ہے جو اشاریہ اعداد کی تشکیل کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ ہندسی اوسط کی کچھ ریاضیاتی خاصیتیں ہیں جن کی بنیاد پر نسبتوں اور فیصدوں کا اوسط نکالنے میں اس کو وسیع پیمانے پر استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اگر کسی مد کی قیمت صفر یا منفی ہو تو یہ اوسط معلوم نہیں کیا جاسکتا۔

اگر کسی متغیرہ کی قدروں کا تقابل کسی اور متغیرہ سے کرنا مطلوب ہو جب کہ متغیرہ مستقل ہو تو ہارمونی اوسط استعمال کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً رفتار، وقت اور فاصلہ سے وابستہ شرحوں اور نسبتوں کا اوسط معلوم کرنے کے لیے ہارمونی اوسط استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یہ اوسط انفرادی مشاہدوں کے مقلوبوں کے حسابی اوسط کا مقلوب ہوتا ہے۔ یہ گروہ بند اور غیر گروہ بند و نیز غیر مسلسل اور مسلسل سلسلوں کے لیے محسوب کیا جاسکتا ہے۔ وزنی ہندسی اوسط کی طرح وزنی ہارمونی اوسط بھی محسوب کیا جاسکتا ہے۔

بعض صورتوں میں ہندسی اور ہارمونی اوسط میں سے کسی ایک کا انتخاب مشکل ہوجاتا ہے۔ اگر دی گئی نسبتیں x اکائیاں فی y کی شکل میں ہوں تو ہارمونی اوسط استعمال کیا جائے جب کہ x اکائیاں دی جائیں اور حسابی اوسط استعمال کیا جائے جب کہ y اکائیاں دی جائیں۔

قیمتوں، فروخت، منافعوں وغیرہ کے رجحان پر غور کرنا ہو تو متحرک اوسط استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ اوسط متراکب سادہ اوسطوں (overlapping simple averages) کا ایک طویل سلسلہ ہوتا ہے جو کہ زمانی سلسلہ مواد کو ہموار بناتا ہے۔ متحرک اوسط کی تحسیب کا انحصار متحرک اوسط کے وقفہ (Period) پر ہوتا ہے جو طاق (odd) یا جفت (even) ہوسکتا ہے۔ طاق وقفہ کی صورت میں متحرک اوسط کو متعلقہ زمانی وقفہ کے وسطی نقطوں سے متعلق کیا جاتا ہے۔ جفت وقفہ کی صورت میں یہ عمل ناممکن ہونے کی وجہ سے متحرک اوسط کو مرکوز کیا جاتا ہے۔

کسی اوسط کا انتخاب، اُس مقصد پر منحصر ہوتا ہے جس کے لیے یہ محسوب کیا جاتا ہے جیسے مواد سٹ کی نوعیت اور ہیت، مزید الجبرائی تجزیہ (algebraic analysis) کے لیے موزونیت وغیرہ۔ مرکزی رجحان کے پیمانوں کا استعمال، نہایت احتیاط اور مہارت سے کرنا چاہیے۔

13.8 کلیدی الفاظ Key Words

ہندسی اوسط Geometric Mean : اگر سلسلے میں N مدات ہوں تو ہندسی اوسط ان کے حاصل ضرب کا n واں جذر ہوتا ہے۔

ہارمونی اوسط Harmonic Mean : انفرادی مشاہدوں کے مقلوبوں کے حسابی اوسط کا مقلوب

متحرک اوسط Moving Average : متحرک اوسط متراکب (overlapping) سادہ اوسطوں کا ایک طویل سلسلہ ہوتا ہے جو کہ وسطی سال (middle year) کے بالمقابل لکھا جاتا ہے۔ کسی سلسلہ کے رجحان کو ہموار کرنے کے لیے اس کو محسوب کیا جاتا ہے۔

رجحان Trend : زمانی سلسلہ مواد میں پایا جانے والا طویل مدتی عام رجحان۔

13.9 اپنی قابلیت کی جانچ کے جوابات Answers to Check Your Progress

A (4 121.3

1) 12.3% تقریباً

2) GM = 25.3 نشانات، AM = 28.4 نشانات

4) 29%

5) (i) غلط (ii) صحیح (iii) غلط (iv) غلط (v) صحیح

6) (i) 16 (ii) 10 (iii) GM (iv) درمیانی (v) صفر (vi) 18.7 (vii) 5.9

B (2 HM = 50.55

3) 13

4) 14.63 روپے

5) 75.45 کیلومیٹر فی گھنٹہ

6) (i) غلط (ii) غلط (iii) صحیح (iv) صحیح (v) غلط

7) (i) ہارمونی اوسط (ii) مقلوب (iii) اقل ترین (iv) زیادہ تر
(v) ہارمونی اوسط (vi) وزنی (اوسط)

1 C) (i) متحرک اوسط (ii) وقفہ (iii) مرکزیانا (centering)

2) (i) کثیریہ (ii) وسطانیہ (iii) ہندسی اوسط (iv) ہارمونی اوسط
(v) وسطانیہ (vi) متحرک اوسط (vii) ہارمونی اوسط
(viii) وسطانیہ (ix) وزنی اوسط (x) کثیریہ

13.10 امتحانی سوالات/مشقیں Terminal Questions/Exercises

(1) حسابی اوسط، ہندسی اوسط اور ہارمونی اوسط کی اضافی خوبیوں اور خامیوں کی نشاندہی کے لیے ان کا تقابل کیجیے۔

(2) متحرک اوسط معلوم کرنے کے طریقے کی تشریح کیجیے۔ یہ کس مقصد کے لیے کام آتا ہے؟

(3) مرکزی رجحان کے موزوں پیمانے کا انتخاب کس طرح کیا جاتا ہے؟

مشقیں

(1) اگر بیس سال میں آبادی دوگنا ہوگئی ہے، تو کیا یہ کہنا صحیح ہے کہ شرح افزائش 5% سالانہ ہے؟ اگر نہیں، تو صحیح شرح افزائش کیا ہے۔

(جواب : نہیں 1.035%)

(2) 5 سال میں کسی فیکٹری کی سالانہ پیداوار میں اضافہ بالترتیب 5.0, 7.5, 5.0, 2.5 اور 10 فیصد ہے۔ پیداوار میں سالانہ اضافہ کی مرکب شرح کیا ہے؟

(جواب : 5.9% فی سال)

(3) 8 مدوں کا ہندسی اوسط 3 اور 12 مدوں کا ہندسی اوسط 11 ہے۔ تمام 20 مدوں کا ہندسی اوسط کیا ہوگا؟

(جواب : 6.54)

(4) مندرجہ ذیل مواد کے لیے ہارمونی اوسط معلوم کیجیے۔

(i) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

(ii) $1\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$

(جواب : (i) 3.184 (ii) 4.505)

(5) آپ سیر کرنے جاتے ہیں جس میں لازماً آپ ریل کے ذریعہ اوسط رفتار 60 کیلومیٹر فی گھنٹے سے 60 کیلومیٹر، کشتی کے ذریعہ سے اوسط رفتار 25 کیلومیٹر فی گھنٹہ سے 3,000 میل، طیارے کے ذریعہ 350 کیلومیٹر فی گھنٹہ رفتار سے 4,000 کیلومیٹر اور آخر میں ٹیکسی سے 25 کیلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے 15 میل سفر کرتے ہیں۔ جملہ فاصلے کے لیے اوسط رفتار کیا ہے؟

(جواب: **31.6** کیلومیٹر فی گھنٹہ)

(6) (i) سہ سالہ اور (ii) 4 سالہ متحرک اوسط محسوب کیجیے جب کہ قیمتوں سے متعلق مندرجہ ذیل مواد دیا گیا ہے؟

سال	:	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
قیمت (روپے)	:	6	8	11	7	10	11	15	11	12	13	17

(7) مندرجہ ذیل ہر ایک صورت کے لیے آپ کی اپنی ایک خصوصی مثال دیجیے۔

(i) وسطانیہ کو حسابی اوسط پر ترجیح دی جاتی ہے۔

(ii) ہارمونی اوسط کو حسابی اوسط پر ترجیح دی جاتی ہے۔

(iii) کثیریہ کو وسطانیہ پر ترجیح دی جائے گی۔

(iv) حسابی اوسط کو ہارمونی اوسط پر ترجیح دی جاتی ہے۔

(v) کوئی اوسط معنی خیز نہیں ہے۔

نوٹ : یہ سوالات اور مشقیں اکائی کے بہتر طور پر سمجھنے میں مددگار ہیں۔ ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجیے لیکن ان کے جواب یونیورسٹی کو مت روانہ کیجیے۔ یہ محض آپ کی مشق کے لیے ہیں۔

چند مفید کتابیں Some Useful Books

Elhance, D.N. and Veena Elhance, 1988. Fundamentals of Statistics, Kitab Mahal : Allahabad, (Chapter 8)

Gupta, C.B. 1988. An Introduction to Statistical Methods, Vikas Publishing House: New Delhi. (Chapter 9)

Gupta, S.P. 1989, Elementary Statistical Methods, Sultan Chand & Sons: New Delhi. (Chapter, 7)

Sancheti, D.C., and Kapoor, V.K., 1989, Statistical Theory, Methods and Applications, Sultan Chand & Sons: New Delhi. (Chapter 5)

Shenoy, G.V. Srivastava V.K. and S.C. Sharma, 1988. Business Statistics, Wiley Eastern: New Delhi, (Chapter 4)

Simpson, G, and Kafka; F.Basic Statistics, Oxford & IBH Publishing: New Delhi (Chapters 10-12).

☆☆☆

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی
حیدرآباد

بلاک

4

انتشار اور خمیدگی کے پیمانے
Measures of Dispersion and Skewness

5	Measures of Dispersion - I	اکائی 14 انتشار کے پیمانے - I
26	Measures of Dispersion - II	اکائی 15 انتشار کے پیمانے - II
58	Measures of Skewness	اکائی 16 خمیدگی کے پیمانے

مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی

Maulana Azad National Urdu University



Urdu Translation
Under the Supervision of: Translation Division,
Maulana Azad National Urdu University

اردو ترجمہ
زیر اہتمام: ٹرانسلیشن ڈویژن
مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

Translator
Dr. Mohd. Jahangir Ali,
Lecturer in Commerce

مترجم
ڈاکٹر محمد جہانگیر علی، لکچرر کامرس

Editor
Dr. Mohd. Osman Ahmed
Lecturer in Commerce, Anwar-ul-uloom College,

ایڈیٹر
ڈاکٹر محمد عثمان احمد، لکچرر کامرس انوار العلوم کالج

Language Consultant
Dr. Mustafa Ali Khan Fatimi
Maulana Azad National Urdu University

ناظر زبان
ڈاکٹر مصطفیٰ علی خاں فاطمی، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

Indira Gandhi National Open University

Expert Committee

Prof. B.S. Sharma
Vice-Chancellor, IGNOU

Prof. J. Satyanarayana (*Chairman*)
Osmania University, Hyderabad

Prof. G.V. Shenoy
Institute of Rural Management, Anand

Prof. B.S. Bhatia
Punjabi University, Patiala

Prof. P.K. Ghosh
Delhi University, Delhi

Prof. Rakesh Khurana
Director
School of Management Studies, IGNOU

Prof. R.B. Upadhyaya
University of Rajasthan Jaipur

Prof. I.H. Farooqi
Aligarh Muslim University, Aligarh

Mr. A.K. Majumdar
Institute of Chartered Accountants of India, New Delhi

Prof. Amar Chand
Madras University, Madras

Course Preparation Team

Mr. Vidya Ratna
Sri. Ram College of Commerce
Delhi University,
Delhi

Prof. Brahmha Bhatt
School of Commerce
Gujrat University,
Ahmedabad

Faculty Members Indira Gandhi National Open University

Dr. R.K. Grover
Dr. N.V. Narasimham
Ms. Madhu Surya
Mr. Nawal Kishor
Dr. Madhu Tyagi
Prof. G. Sambasiva Rao (*Language Editor*)

© *Indira Gandhi National Open University, 1990 (Reprint January 1999)*
All rights reserved. No part of this work may be reproduced in any form, by mineograph or any other means, without permission in writing from the Indira Gandhi National Open University

EMESCO BOOKS,HYDERABAD YEAR-2011

بلاک 4 انتشار اور خمیدگی کے پیمانے

MEASURES OF DISPERSION AND SKEWNESS

بلاک 3 میں آپ نے مرکزی رجحان کے متعلق سیکھا جو کسی مواد کے تجزیہ کی پہلی اہم خصوصیت ہے۔ بسا اوقات دو یا دو سے زیادہ تقسیموں کے مرکزی رجحان کے پیمانے مساوی یا تقریباً مساوی ہو سکتے ہیں، لیکن اس کے باوجود تقسیمیں ایک دوسرے سے قابل لحاظ حد تک مختلف ہو سکتی ہیں۔ یہ فرق مدات سے اوسط کے انحراف کی حد کے تعلق سے ہو سکتا ہے یا اس طریقہ میں ہو سکتا ہے جس میں کہ مدات اوسط کے اطراف پھیلے ہوئے ہوتے ہیں۔ کسی بھی تقسیم کی یہ دو اہم خصوصیات ہوتی ہیں جن کا مطالعہ کسی مواد کے تجزیہ کے ذریعہ کیا جاتا ہے۔ اس باب میں ان خصوصیات کا مطالعہ کیا جائے گا جنہیں انتشار اور خمیدگی کا نام دیا جاتا ہے۔ ان دو پیمانوں کے علاوہ، اور بہت سارے شماریاتی طریقے موجود ہیں جو مواد کے تجزیے اور ترجمانی میں مددگار ہوتے ہیں لیکن ان اعلیٰ طریقوں کا مطالعہ اس نصاب کی وسعت میں داخل نہیں ہے۔ اس باب میں تین اکائیاں ہیں۔

اکائی 14 میں انتشار کی تعریف کی گئی ہے، اس کی ضرورت اور اہمیت اور اس کے مطالعہ میں درکار مختلف پیمانوں سے بحث کی گئی ہے۔ مزید یہ کہ اس اکائی میں انتشار کے تین پیمانوں یعنی چوتھائیہ انحراف اور اوسط انحراف کی وضاحت کی گئی ہے۔

اکائی 15 میں اور دو انتشار کے پیمانوں یعنی معیاری انحراف اور تغیر کی قدر ضربی (Coefficient of Variation) کی تشریح کی گئی ہے۔ مزید یہ کہ ان کی تحسیب کے طریقوں، خاصیتوں، خوبیوں اور خامیوں پر بھی روشنی ڈالی گئی ہے۔ لورنز منحنی Lorenz Curve پر بھی بحث کی گئی ہے جو انتشار کے مطالعہ کا ترسیمی طریقہ ہے۔

اکائی 16 خمیدگی سے متعلق ہے۔ اس میں خمیدگی کے معنی، ضرورت اور اس کے تعین کے مختلف طریقوں سے بحث کی گئی ہے۔ اس اکائی میں انتشار اور خمیدگی میں فرق بتلایا گیا ہے اور ساتھ ہی ساتھ طبعی منحنی (Normal curve) کے نظریہ کا تعارف کروایا گیا ہے جو کہ تعددی تقسیم کی بعض خوبیوں کے مطالعہ کے لیے ایک معیار ہے۔

اکائی 14 انتشار کے پیمانے - I

UNIT-14 : MEASURES OF DISPERSION - I

Structure ساخت

Objectives	مقاصد	14.0
Introduction	تمہید	14.1
What is Dispersion?	انتشار کیا ہے؟	14.2
Significance of Measuring Dispersion	پیمائش انتشار کی اہمیت	14.3
Properties of a Good Measure of Dispersion	اچھے انتشاری پیمانہ کی خاصیتیں	14.4
Absolute and Relative measures of Dispersion	انتشار کے مطلق اور اضافی پیمانے	14.5
Measures of Dispersion	انتشار کے پیمانے	14.6
Range	رینج	14.7
Quartile Deviation	چوتھائیہ انحراف	14.8
Mean Deviation	اوسط انحراف	14.9
Let Us Sum Up	خلاصہ	14.10
Key Words and Symbols	کلیدی الفاظ اور علامات	14.11
Answers to Check Your Progress	اپنی معلومات کی جانچ : جوابات	14.12
Terminal Questions/Exercises	امتحانی سوالات/مشقیں	14.13

14.0 مقاصد Objectives

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ :

- انتشار کے تصور اور پیمائش انتشار کی تشریح کر سکیں۔
- مطلق اور اضافی تغیر کے پیمانوں میں فرق کر سکیں۔
- انتشار کے مختلف پیمانوں جیسے مختلف قسم کے مواد کے لیے رینج، چوتھائیہ انحراف اور اوسط انحراف کو محسوب کر سکیں، اور
- مختلف صورتوں کے تحت موزوں پیمانوں کے استعمال کا فیصلہ کر سکیں۔

14.1 تمہید Introduction

10 تا 13 اکائیوں میں آپ نے مرکزی رجحان کے مختلف پیمانوں کا مطالعہ کیا لیکن مواد کے تجزیہ کے لئے صرف مرکزی رجحان ہی کافی نہیں ہے۔ مواد کے بامعنی تجزیہ کے لیے انتشار کا مطالعہ بھی ضروری ہے یعنی مواد کا پھیلاؤ یا وہ حد جس سے مدات، مرکزی رجحان سے انحراف کرتے ہیں۔ اس اکائی میں، آپ انتشار کے معنی اور اہمیت کا مطالعہ کریں گے۔ آپ انتشار کے تین پیمانوں یعنی رینج، چوتھائیہ انحراف اور اوسط انحراف کے متعلق تفصیل سے معلومات حاصل کریں گے۔

14.2 انتشار کیا ہے؟ What is Dispersion?

لفظ 'انتشار' مواد میں غیر متجانسیت (heterogeneity) کے درجہ کے اظہار کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ یہ ایک اہم خاصیت ہے جو اس بات کو ظاہر کرتی ہے کہ مشاہدات کس حد تک ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔ انتشار کا پیمانہ، مرکزی قدر کے اطراف انفرادی قدروں کے پھیلاؤ یا انتشار کی وضاحت کرتا ہے۔ انتشار کے تصور کو سمجھنے کے لیے مندرجہ ذیل تمثیل کا بغور مطالعہ کیجیے۔

تمثیل 1

تین مختلف فرموں کی روزانہ فروخت (روپیوں میں)

فرم A	فرم B	فرم C
60,000	62,500	51,000
60,000	60,000	32,000
60,000	52,250	22,000
60,000	56,500	18,000
60,000	60,500	27,000
60,000	68,250	2,10,000
$\bar{X}_A$=60,000	$\bar{X}_B$=60,000	$\bar{X}_C$=60,000

چونکہ A, B اور C فرموں کی اوسط فروخت یکساں ہے، ہم نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ تینوں فروختوں کی تقسیمات یکساں ہیں لیکن آپ نوٹ کر لیں کہ ہر فرم کی روزانہ فروخت میں تغیرات مختلف ہیں۔ فرم A کی صورت میں روزانہ فروخت تمام دنوں کے لیے یکساں ہے جب کہ فرم B کی صورت میں روزانہ فروخت میں کچھ تغیر ہے اور فرم C کی صورت میں تغیر کی مقدار خاصی بڑی ہے۔ یہاں پر اگرچہ تینوں مواد کے سٹوں کا حسابی اوسط ایک ہی ہے لیکن تینوں مدات کے پھیلاؤ مختلف ہیں۔ لہذا مواد کے ان مختلف سٹوں کا مرکزی رجحان ایک ہی ہے، لیکن پھیلاؤ یا بکھراؤ یعنی انتشار کی اصطلاح میں یہ زیادہ اختلاف رکھ سکتے ہیں۔

لفظ انتشار کی اور ایک مفہوم سے بھی ترجمانی کی جا سکتی ہے۔ جب مواد کے تمام مدات مرکزی رجحان کے مساوی نہ ہوں تو مختلف مدات مرکزی رجحان سے ایک مخصوص مقدار میں مختلف ہوتے ہیں لہذا ''انتشار سے اوسط طور پر یہ اندازہ ہوتا ہے کہ مدات کس حد تک مرکزی رجحان سے مختلف ہوتے ہیں۔ آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ فرم B کی صورت میں انفرادی فروخت سے اوسط فروخت کا انحراف (60,000) فرم C کی بہ نسبت بہت کم مقدار میں ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ اوسط فروحت سے انحراف کا اوسط ' فرم B میں فرم C کے مقابلہ میں کم رہے گا۔ بالفاظ دیگر فرم B میں فرم C کی بہ نسبت کم انتشار ہے۔

14.3 پیمائش انتشار کی اہمیت Significance of Measuring Dispersion

تغیرات یعنی انتشاروں کے پیمانوں کو مندرجہ ذیل مقاصد کے لیے محسوب کیا جاتا ہے:

(1) تغیر کی پیمائش سے اوسط کے اعتبار کا تعین (determination of reliability of an average) اس طور پر ہو جاتا ہے کہ یہ (اوسط) کس حد تک مواد کا نمائندہ عدد ہے)۔ تمثیل 1 میں، اوسط فروخت یعنی 60,000 روپے کا اوسط، اعظم ترین اور اقل ترین اعداد (2,10,000 روپے اور 18,000) روپے کا نمائندہ عدد نہیں کہا جا سکتا۔

(2) انتشار کے پیمانے، دو یا دو سے زیادہ تقسیموں کی تغیر پذیری کے تقابل میں مددگار ہوتے ہیں۔

(3) تغیر پذیری کی پیمائش کا ایک دوسرا مقصد یہ ہے کہ خود تغیر پذیری پر قابو رکھنے کے لیے اس کی نوعیت اور اسباب کا تعین کیا جا سکے۔

(4) تغیر پذیری کی پیمائش سے دیگر شماریاتی پیمانوں مثلاً ہم ربطی، رجعت اور شماریاتی استنباط (Inference) وغیرہ کے استعمال میں سہولت پیدا ہو جاتی ہے۔

14.4 اچھے انتشاری پیمانے کی خاصیتیں
Properties of a Good Measure of Dispersion

جیسا کہ آپ جانتے ہیں، انتشار کا پیمانہ، حسابی اوسط سے مدوں کے انحراف کا اوسط ہے یعنی یہ دوسرے درجہ کا اوسط ہے۔ لہٰذا اس کو ایک اچھے اوسط کی تمام خوبیوں کا حامل ہونا چاہیئے۔ یول اور کینڈال (Yule and Kendall) کے مطابق، اچھے انتشار کے پیمانے میں مندرجہ ذیل خوبیوں کا موجود ہونا ضروری ہے:

(1) شماریاتی پیمانوں کا ایک عام آدمی بھی استعمال کر سکتا ہے لہٰذا پیچیدہ تعریفیں اور تحسیب پسندیدہ نہیں۔ ان کا سمجھنے میں آسان اور محسوب کرنے میں سہل ہونا ضروری ہے۔

(2) اس کی بے لوچ اور جامع تعریف ضروری ہے۔ ایک ہی مواد کے لیے، تمام طریقوں سے یکساں نتائج کا برآمد ہونا ضروری ہے۔ تحسیب کے مختلف طریقوں سے مختلف نتائج حاصل ہوں تو یہ کوئی مناسب بات نہیں ہے۔

(3) اس کو تمام مدات پر مبنی ہونا چاہیئے۔ یہ اگر تمام مدوں پر مبنی ہو تو اس سے ایک بہت زیادہ نمائندہ قدر حاصل ہو سکتی ہے لہٰذا انتشار کے کسی اچھے پیمانے کا تمام مدات پر مبنی ہونا ضروری ہے۔

(4) اس کا مزید الجبرائی عمل کے قابل ہونا ضروری ہے۔ اس کا مطلب ہے گروپوں کو یکجا کرنا، غائب قدروں کو محسوب کرنا، غلط اندراجات کی تطبیق وغیرہ جن کا ظہور تمام مدوں کی حقیقی قدروں سے ناواقفیت کی وجہ سے ہو سکتا ہے۔

(5) اس میں نمونہ بندی استحکام ہونا ضروری ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ نمونہ سے حاصل قدروں اور اس سے متعلقہ آبادی (population) کے اوسطوں کا فرق اقل ترین ہونا چاہیئے۔

(6) اس کو انتہائی قدروں سے غیر ضروری طور پر متاثر نہیں ہونا چاہیئے چونکہ انتہائی اعداد اکثر و بیشتر غیر نمائندہ ہوتے ہیں لہٰذا ان کی موجودگی سے تحسیبات کو قابل لحاظ حد تک متاثر نہیں ہونا چاہیئے۔

یہ فہرست، انتشار کے ایک اچھے پیمانے کی خوبیوں کا مکمل احاطہ نہیں کر سکتی لیکن یہ وہ چند اہم خصوصیات ہیں جن کا انتشار کے ہر اچھے پیمانے میں موجود ہونا ضروری ہے۔

14.5 انتشار کے مطلق اور اضافی پیمانے
Absolute and Relative Measures of Dispersion

انتشار کے وہ پیمانے جن کو اصلی اکائیوں میں ظاہر کیا جاتا ہے "مطلق پیمانوں" کے نام سے موسوم کیے جاتے ہیں۔ مثلاً اس سے قبل تمثیل (1) میں، فرم B کی یومیہ فروخت 52,250 روپے اور 68,250 روپیوں کے درمیان محدود ہے۔ اس لیے مواد کے پھیلاؤ کی وسعت ہے (68, 250 - 52, 250 = 16,000 روپے)۔ فروخت کے پھیلاؤ کا یہ پیمانہ مطلق پیمانہ ہے۔ مواد کی اکائیوں میں ظاہر کیے گئے

ایسے پیمانے' تقسیمات کی تغیر پذیری سے یا ان سلسلوں سے جن کا اظہار پیمایش کی مختلف اکائیوں سے ہوا ہو' تقابل کے لیے موزوں نہیں ہوتے۔ اس کے برعکس انتشار کے اضافی پیمانے، نسبتوں یا فیصدوں کی شکل میں حاصل کئے جاتے ہیں۔ لہذا اضافی پیمانے خالص اعداد ہوتے ہیں' جو پیمایش کی اکائیوں کے تابع نہیں ہوتے۔ مطلق انتشار کے پیمانے اور کسی مناسب اوسط یا مواد کے چند منتخب اعداد میں پائی جانے والی نسبت کو اضافی انتشار کا پیمانہ کہا جاتا ہے۔ لہذا اس کو انتشار کی قدر ضربی (Coefficient of Dispersion) بھی کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر تمثیل 1 میں، اگر 16,000 روپے کے پھیلاؤ کو اوسط فروخت (60,000 روپے) کی نسبت یعنی 16,000/60,000 سے ظاہر کیا جائے تو یہ اضافی پیمانہ بن جائے گا۔ یہ قدر ایک سادہ عدد ہے جس کی اپنی کوئی مخصوص پیمائش کی اکائیاں نہیں ہوتیں۔ اسی طرح 16,000 روپے کے پھیلاؤ کو دو انتہائی اعداد فروخت کے مجموعے کی نسبت میں بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے یعنی $\frac{16,000}{52,250 + 68,150}$ فروخت کے پھیلاؤ کا یہ بھی ایک اضافی پیمانہ ہے۔

کبھی کبھی مواد اگر یکساں اکائی میں ہو تو بھی تغیر کے مطلق پیمانوں کے ذریعہ تغیر کا تقابل غیر اہم ہوتا ہے۔ دہلی سے بمبئی کے فاصلہ میں ایک کیلومیٹر (1,00,000 سمر) کا تغیر قابل لحاظ نہیں ہوتا لیکن 1.40 میٹر کپڑے کی پیمائش میں 10 سمر کے انحراف سے بھی بہت فرق پڑ جاتا ہے لہذا ہمیشہ مواد کے دو سٹوں میں تغیر پذیری کا تقابل اضافی پیمانہ کے ذریعہ کیا جاتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ A

(1) اصطلاح ''انتشار'' کے معنی کیا ہیں؟

.....

.....

.....

(2) انتشار کے مطلق پیمانوں اور اضافی پیمانوں میں فرق بتایئے۔

.....

.....

.....

.....

(3) تحریر کیجیے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) تغیر کا مطلب صرف مواد کے سٹوں (sets) میں مدات کا پھیلاؤ ہے۔

(ii) انتشار کی پیمائش کرنے کا مقصد صرف یہ ہے کہ ایک اوسط کے قابل اعتماد ہونے کا تخمینہ کیا جائے۔

(iii) کبھی کبھی خود تغیر پذیری کو فیصلہ سازی میں استعمال کیا جاتا ہے۔

(iv) مواد کے دو سٹوں (sets) کا تقابل انتشار کے اضافی پیمانوں سے کیا جاتا ہے۔

(v) انتشار کے تمام مطلق پیمانے خالص اعداد ہوتے ہیں۔

(vi) ایک اچھے انتشار کا پیمانہ ترجیحی طور پر مواد کے تمام مدات کو استعمال کرتا ہے۔

14.6 انتشار کے پیمانے Measures of Dispersion

مطلق انتشار کے مندرجہ ذیل پیمانے عام طور پر استعمال کئے جاتے ہیں:

(1) : مواد کے منتخب مدات کی اساس پر

(i) رینج۔تمام مواد پر پھیلا ہوا ہوتا ہے۔

(ii) بین چوتھائیہ رینج (Inter Quartile Range)۔وسط کے 50% مواد پر پھیلا ہوا۔عام طور پر اس کی جگہ پر چوتھائیہ انحراف (Quartile Deviation) زیادہ استعمال کیا جاتا ہے، جو بین چوتھائیہ رینج کا نصف ہے۔

(2) مواد کے تمام مدات مبنی

(i) اوسط انحراف (Mean Deviation) مرکزی رجحان سے مطلق انحرافات کا حسابی اوسط

(ii) معیاری انحراف (Standard Deviation) یا جذر حسابی اوسط مربع انحراف (RootMean Square Deviation) بلحاظ حسابی اوسط

(3) ترسیمی طریقہ۔لورنز منحنی Lorenz Curve

اضافی انتشار کے پیمانے بمقابل مطلق انتشار کے پیمانے

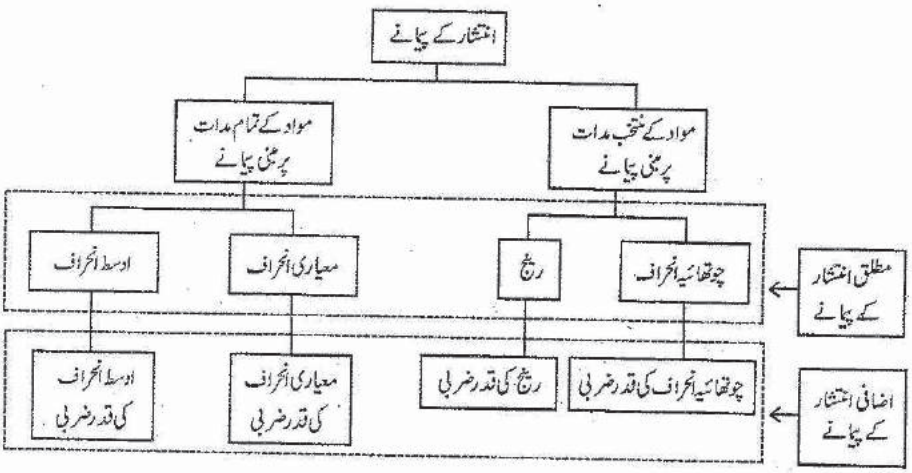
مطلق انتشار کے پیمانے	اضافی انتشار کے پیمانے
(i) رینج	رینج کی قدر ضربی (Co-efficient of Range)
(ii) چوتھائیہ انحراف	چوتھائیہ انحراف کی قدر ضربی Coefficient of Quartile Deviation
(iii) اوسط انحراف	اوسط انحراف کی قدر ضربی Coefficient of Mean Deviation
(iv) معیاری انحراف	معیاری انحراف کی قدر ضربی Coefficient of Standard Deviation

معیاری انحراف کی قدر ضربی کو جب فیصد میں ظاہر کیا جاتا ہے تو اس کو تغیر کی قدر ضربی (coefficient of variation) کہا جاتا ہے۔

انتشار کے پیمانوں کی درجہ بندی کے لیے شکل 14.1 کا بغور مطالعہ کیجیے۔رینج، چوتھائیہ انحراف، اوسط انحراف کے متعلق آپ اس اکائی میں آگے مطالعہ کریں گے اور معیاری انحراف اور لورنز منحنی کے متعلق اکائی 15 میں سیکھیں گے۔

شکل 14.1

انتشار کے پیمانوں کی درجہ بندی



14.7 ریںج Range

مواد کی بیش ترین (عددی طور پر سب سے بڑی) قدر اور کم ترین (عددی طور پر سب سے چھوٹی) قدر کے درمیانی فرق کو رینج کہا جاتا ہے۔

لہذا رینج $= X_{max} - X_{min}$

جہاں پر X_{max} = بیش ترین قدر ، X_{min} = کم ترین قدر

سابق میں بحث شدہ تمثیل 1 سے تین فرموں کے لیے یومیہ فروخت کا مواد لیجیے اور رینج محسوب کیجیے۔

فرم A کے لیے رینج = 60,000 - 60,000 = 0

فرم B کے لیے رینج = 68,250 - 52,250 = 16,000

فرم C کے لیے رینج = 2,10,000 - 18,000 = 1,92,000

رینج کی قدر کی تاویل بہت سہل ہے۔ اس تمثیل میں فرم A کے لیے یومیہ فروخت کی صورت میں تغیر صفر 0 ہے، فرم B کے لیے تغیر بہت کم ہے اور فرم C کے لیے تغیر بہت زیادہ ہے۔ گروہ بند مواد کے لیے رینج کو تقریباً اعظم ترین جماعت کی بالائی انتہا اور اقل ترین جماعت کی زیریں انتہا کے فرق کے طور پر لیا جاسکتا ہے۔ رینج سے متعلق اضافی پیمانہ، جسے رینج کی قدر ضربی (Coefficient of range) کہتے ہیں، رینج اور دو انتہاؤں کے مجموعہ کی نسبت سے تعبیر کرتے ہیں۔ اس صورت میں رینج کو اوسط کے حوالہ سے ظاہر نہیں کیا جاتا کیونکہ رینج اوسط پر منحصر نہیں ہوتا۔ یہ مواد کے دو منتخب مدات سے تعلق رکھتا ہے۔ لہذا رینج کی قدر کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے:

$$\text{رینج کی قدر ضربی} = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}}$$

تمثیل 2 کا بغور مطالعہ کر کے رینج کی قدر ضربی معلوم کرنے کے طریقے سیکھ لیں۔

تمثیل 2

مندرجہ ذیل مواد سے رینج کی قدر ضربی محسوب کیجیے۔

فروخت (لاکھ روپیوں میں)	دنوں کی تعداد
30 - 40	12
40 - 50	18
50 - 60	20
60 - 70	19
70 - 80	13
80 - 90	8

حل

رینج $= X_{max} - X_{min}$

$= 90 - 30$

$= 60$

$$\text{رینج کی قدر ضربی} = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}}$$

$$\frac{90-30}{90+30} = \frac{60}{120} = 0.5$$

رینج نہایت آسانی سے محسوب کیا جاسکتا ہے اور اس کے ذریعہ تغیر پذیری کے تعلق سے ایک ہلکا سا اندازہ ملتا ہے۔ چونکہ رینج کو محسوب کرنے میں صرف دو انتہائی اقدار کو استعمال کیا جاتا ہے، یہ تغیر کا نہایت خام پیمانہ ہے۔

شماریاتی کوالٹی کنٹرول میں رینج کے تصور کو وسیع طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔ حصص، ڈیبنچروں اور زرعی اجناس کی قیمتوں میں تغیرات کا مطالعہ کرنے کے لیے رینج سے مدد لی جاتی ہے، جو قیمتوں کی تبدیلیوں کے تعلق سے بہت حساس ہوتے ہیں۔ موسم کی پیشین گوئی کے لیے رینج بہت اچھا پیمانہ ہے۔

14.8 چوتھائیہ انحراف Quartile Deviation

بالائی اور زیریں چوتھائیوں کے حاصل تفریق کے نصف کو چوتھائیہ انحراف کہتے ہیں۔ آپ نے اکائی 11 میں چوتھائیہ محسوب کرنے کا طریقہ سیکھا ہے۔

$$\text{چوتھائیہ انحراف} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

جہاں پر Q_1 پہلا چوتھائیہ اور Q_3 تیسرا چوتھائیہ ہے

چونکہ Q_1 اور Q_3 کے درمیان فرق، دونوں چوتھائیوں کا درمیانی فاصلہ ہے، اس کو 'بین چوتھائیہ رینج' (Inter Quartile Range) کہتے ہیں اور اس کا نصف 'نیم بین چوتھائیہ رینج' (Semi-Inter Quartile Range) چوتھائیہ انحراف (Quartile deviation) کہلاتا ہے۔ چوتھائیہ انحراف ۲ چوتھائیوں پر منحصر ہوتا ہے اور سب سے بڑے 25% اور سب سے چھوٹے 25% مشاہدوں کی تغیر پذیری (Variability) کو شمار نہیں کرتا۔ اس لئے انتہائی قدریں اس پر اثر انداز نہیں ہوتیں۔ چوتھائیہ انحراف کا ایک اور فائدہ یہ ہے کہ یہ تغیر پذیری کا واحد پیمانہ ہے جو کھلے کنارے کی تقسیم میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔ چوتھائیہ انحراف کی سب سے بڑی خامی یہ ہے کہ یہ تمام مشاہدات کی ضخامتوں (magnitudes) پر انحصار نہیں کرتا۔ یہ وسط کے 50% مشاہدات پر مبنی ہوتا ہے۔ چوتھائیہ انحراف پر مبنی اضافی پیمانے کو چوتھائیہ انحراف کی قدر ضربی کہا جاتا ہے۔ چوتھائیہ انحراف کی قدر ضربی (Coefficient of quartile deviation) کو حسب ذیل فارمولہ کے ذریعے پیش کیا جاتا ہے :

$$\text{چوتھائیہ انحراف کی قدر ضربی} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

یہ اس لیے ہے کہ چوتھائیے مواد کے دو منتخب مدات بھی ہیں اور ان کا اوسط سے کسی قسم کا بھی تعلق نہیں رہتا۔ مندرجہ ذیل تمثیلوں کا بنظر غائر جائزہ لیجیے اور چوتھائیہ انحراف معلوم کرنے کے طریقے کو اچھی طرح سمجھ لیجیے۔

تمثیل 3

مندرجہ ذیل مواد سے چوتھائیہ انحراف اور اس کی قدر ضربی (Coefficient) محسوب کیجیے:۔

وزن (کیلو میں)	:	60	61	62	63	65	70	75	80
مزدوروں کی تعداد	:	1	3	5	7	10	3	1	1

حل

چوتھائیہ انحراف اور اس کی قدر ضربی کی تحسیب

وزن (کیلو میں)	تعدد	مجموعی تعدد
60	1	1
61	3	4
62	5	9
63	7	16
65	10	26
70	3	29
75	1	30
80	1	31 = n

Q_1 = $\frac{1}{4}(n+1)$ ویں یا 8 ویں مد کا سائز

= 62 کیلوگرام (کیونکہ 8 واں مد اس زمرے میں شامل ہے)

Q_3 = $\frac{3}{4}(n+1)$ ویں یا 24 ویں مد کا سائز

= 65 کیلوگرام (کیونکہ 24 واں مشاہدہ اس زمرے میں شامل ہے)

∴ لہذا چوتھائیہ انحراف = Quartile Deviation = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{65-62}{2}$

= 1.5 کیلوگرام

چوتھائیہ انحراف کی قدر ضربی = Coefficient of Q.D. = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{65-62}{65+62}$

$= \frac{3}{127}$

= 0.024

تمثیل 4

مندرجہ ذیل مواد سے نیم بین چوتھائیہ رینج (semi interquartile range) اور اس کی قدر ضربی معلوم کیجیے۔

نشانات :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
تعداد طلبہ :	11	18	25	28	30	33	22	15	22

حل:

چوتھائیہ انحراف معلوم کرنے کے لیے ہم کو پہلے چوتھائیہ اور تیسرے چوتھائیہ کی قدر معلوم کرنا پڑتا ہے جو کہ مندرجہ ذیل جدول سے حاصل کی جاسکتی ہے:

نشانات	تعدد (f)	مجموعی تعدد (c.f)
0 - 10	11	11
10 - 20	18	29
20 - 30	25	54
30 - 40	28	82
40 - 50	30	112
50 - 60	33	145
60 - 70	22	167
70 - 80	15	182
80 - 90	22	204

Q_1 کے $\frac{N}{4}$ مشاہدات ہیں یعنی $\frac{204}{4} = 51$ مشاہدات۔ اس لیے Q_1، جماعت 30-20 میں واقع ہے۔

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - C}{f} \times i$$

جہاں پر L = چوتھائیہ جماعت کی زیریں انتہا

c = چوتھائیہ جماعت سے پچھلی جماعت کا تعدد

f = چوتھائیہ جماعت کا سادہ تعدد

i = چوتھائیہ جماعت کا جماعتی۔وقفہ

لہذا $$Q_1 = 20 + \frac{51 - 29}{25} \times 10$$
$$= 28.8$$

Q_3 کے $\frac{3N}{4}$ مشاہدات ہیں یعنی $3 \times \frac{204}{4} = 153$ مشاہدات۔ اس لیے Q_3 جماعت 70-60 میں واقع ہے۔

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - C}{f} \times i$$
$$= 60 + \frac{153 - 145}{22} \times 10$$
$$= 63.64$$

نیم بین چوتھائیہ رینج یا چوتھائیہ انحراف (Semi-inter Quartile Range or Quartile Deviation) (Q.D.) ہے۔

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$
$$= \frac{63.64 - 28.8}{2}$$

$$= \frac{34.84}{2}$$

= 17.42 (نشانات)

چوتھائیہ انحراف سے متعلقہ اضافی پیمانہ چوتھائیہ انحراف کا قدر ضربی کہلاتا ہے اور اس کی تحسیب حسب ذیل طریقہ پر ہوگی :

چوتھائیہ انحراف کی قدر ضربی $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 - Q_1} = (\text{Coefficient of Q.D.})$

$$= \frac{63.64 - 28.8}{63.64 + 28.8}$$

$$= 0.37$$

تمثیل 5

مندرجہ ذیل مواد کے لیے موزوں انتشار کا پیمانہ محسوب کیجیے۔

ماہانہ اخراجات (روپے)	خاندانوں کی تعداد
850 سے کم	12
850 - 900	16
900 - 950	39
950 - 1000	56
1,000 - 1050	62
1,050 - 1100	75
1,100 - 1150	30
1,150 سے زیادہ	10

حل

چونکہ تعددی تقسیم کھلے کنارے کی جماعت ہے، اس لیے چوتھائیہ انحراف موزوں ترین انتشار کا پیمانہ ہے۔

ماہانہ اخراجات روپیوں میں	خاندانوں کی تعداد	مجموعی تعدد
850 سے کم	12	12
850 - 900	16	28
900 - 950	39	67
950 - 1,000	56	123
1,000 - 1,050	62	185
1,050 - 1,100	75	260
1,100 - 1,150	30	290
1,150 سے زیادہ	10	300 = n

Q_1 کے $\frac{N}{4}$ مشاہدات یعنی $\frac{300}{4} = 75$ مشاہدات۔ اس لیے Q_1 ' جماعت 1000 - 950 میں واقع ہے۔

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - c}{f}$$

$$= 950 + \frac{\frac{300}{4} - 67}{56} \times 50$$

957.14 روپے

Q_3 کے $\frac{3N}{4}$ اس یعنی $\frac{3 \times 300}{4} = 225$ مشاہدات۔ اس لیے Q_3 جماعت 1,100 - 1050 میں واقع ہے۔

لہذا

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - c}{f} \times i$$

$$= 1050 + \frac{225 - 185}{75} \times 50$$

1076.67 روپے

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{1070.67 - 957.14}{2}$$

= 59.76 روپے

اپنی معلومات کی جانچ B

(1) مطلق اور اضافی انتشار کے پیمانوں میں کیا فرق ہے؟ بیان کیجیے۔۔

.....

.....

.....

.....

.....

(2) چوتھائیہ انحراف کی تعریف کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

.....

(3) رینج اور اس کی قدر ضربی میں فرق کیجیے۔

(4) ہر روز شفاخانے (Hospital) کے ایمرجنسی روم پر علاج کیے گئے مریضوں کی تعداد سے متعلق مندرجہ ذیل مواد کے لیے رینج (Range) اور چوتھائیہ انحراف معلوم کیجیے۔

45, 50, 36, 59, 28, 42, 55, 67, 33, 35, 40, 50

(5) مندرجہ ذیل مواد سے رینج، چوتھائیہ انحراف اور متعلقہ اقدار ضربی کو محسوب کیجیے۔

سائز	5 - 7	8 - 10	11 - 13	14 - 16	17 - 19
تعداد	14	24	38	20	4

(6) تحریر کیجیے آیا مندرجہ ذیل بیان صحیح ہے یا غلط؟

(i) دو انتہاؤں کے درمیان کی قدروں کی تقسیم کو رینج نظر انداز کرتا ہے۔

(ii) کھلے کنارے کے مواد کے لیے رینج معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(iii) چوتھائیہ انحراف، P_{75} , P_{25} کا بین صدویہ رینج (Inter percentile range of P_{25}, P_{75}) یکساں ہوتا ہے۔

(iv) کھلے کنارے کے مواد کے لیے چوتھائیہ انحراف' انتشار کا بہترین پیمانہ ہے۔

(v) چوتھائیہ انحراف کا اضافی پیمانہ ' وسطانیہ پر مبنی ہے۔

14.9 اوسط انحراف Mean Deviation

جیسا کہ آپ جانتے ہیں، ایک مثالی انتشار کے پیمانے کی خاصیتوں میں ایک خاصیت یہ ہے کہ وہ تمام مدات پر مبنی ہوتا ہے۔ اس نقطہ نظر سے رینج اور چوتھائیہ انحراف (Quartile deviation) مثالی نہیں ہوسکتے کیونکہ یہ مواد کے تمام مشاہدات پر مبنی نہیں ہیں۔ اس پیمانے کو، دیئے گئے مواد کے حسابی اوسط سے انفرادی مشاہدات کے مطلق انحرافات کے حسابی اوسط کے طور پر محسوب کیا جاتا ہے۔ اوسط انحراف کے محسوب کرنے میں استعمال کیا جانے والا اوسط' اکثر حسابی اوسط (Mean) یا وسطانیہ (Median) ہوتا ہے، کبھی کبھی کثیریہ (Mode) بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ مطلق انحرافات کا مطلب ہوتا ہے کہ انحرافات کو ان کی حقیقی علامت سے قطع نظر ہر حال میں مثبت لیا جاتا ہے۔ مشاہدات $X_1, X_2 \ldots X_n$ دیے جانے پر، اوسط A سے اوسط انحراف معلوم کرنے کے لیے پہلے، انحرافات $(X_1 - A), (X_2 - A), \ldots (X_n - A)$ معلوم کیجیے۔ ان میں سے بعض مثبت اور بعض منفی ہوسکتے ہیں۔ اگر $[X_i - A]$ کی جو کچھ بھی علامت ہو اس کی مثبت قدر کو $[X_i - A]$ سے تعبیر کیا جائے تو ان مطلق انحرافات کا حاصل جمع ہوگا $[X_1 - A] + |X_2 - A| + \ldots + |X_n - A| = \Sigma|X - A|$ ان مطلق انحرافات کا حسابی اوسط، اوسط انحراف ہوتا ہے۔

لہذا (بلحاظ A) اوسط انحراف $= \frac{1}{n}\Sigma|X - A|$

(i) اگر A حسابی اوسط $(\bar{X})$ ہو تو

بلحاظ $(\bar{X})$ اوسط انحراف $= \frac{1}{n}\Sigma|X - \bar{X}|$

(ii) اگر A وسطانیہ (M_e) ہو تو

بلحاظ M_e اوسط انحراف $= \frac{1}{n}\Sigma|X - M_e|$

(iii) اگر A کثیریہ (M_o) ہو تو

بلحاظ M_o اوسط انحراف $= \frac{1}{n}\Sigma|X - M_o|$

اگر مواد' تعددی تقسیم کی شکل میں ہو تو، حسابی اوسط کے محسوب کرنے کے طریقے سے قیاس کرتے ہوئے بلحاظ $\bar{X}$ اوسط انحراف مساوی ہے $\frac{1}{n}\Sigma f|X - \bar{X}|$ اسی طرح، بلحاظ M_e اوسط انحراف $\frac{1}{n}\Sigma f|X - M_e|$ اور بلحاظ M_o اوسط انحراف مساوی ہے $\frac{1}{n}\Sigma f|X - M_o|$ - عموماً اس اوسط کا نام جس سے انحراف لیے جاتے ہیں ہمیشہ اوسط انحراف کے ساتھ ذکر کیا جاتا ہے۔ لیکن چند نصابی کتابوں میں، جب $\bar{X}$ سے انحرافات لیے جاتے ہیں بلحاظ $\bar{X}$ انحرافات کی بجائے صرف 'اوسط انحراف' لکھا جاتا ہے۔ اوسط انحراف کی ایک اہم خاصیت یہ ہے کہ اگر انحراف وسطانیہ سے لیے جاتے ہیں تو اوسط انحراف کی قدر کم سے کم ہوتی ہے یعنی بلحاظ وسطانیہ اوسط انحراف کی قدر کمترین ہوتی ہے۔

اوسط انحراف سے متعلقہ اضافی پیمانہ کو اوسط انحراف کی قدر ضربی کہتے ہیں جو کہ اوسط انحراف کو اس مخصوص اوسط سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتی ہے جس کے لحاظ سے اس کو محسوب کیا گیا ہے۔ لہذا اگر اس کو بلحاظ وسطانیہ محسوب کیا گیا ہے تو اوسط انحراف کی قدر ضربی۔ اوسط انحراف کو وسطانیہ سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوگی۔ بلحاظ M_e اوسط انحراف کی قدر $\frac{\text{اوسط انحراف بلحاظ وسطانیہ}}{\text{وسطانیہ}}$

اسی طرح سے بلحاظ $\bar{X}$ اوسط انحراف کی قدر ضربی = $\frac{\text{اوسط انحراف بلحاظ } \bar{X}}{\bar{X}}$

اوسط انحراف تمام مشاہدات پر مبنی ہوتا ہے، اس لیے مواد کے سٹ میں ہر ایک مد کی تغیر پذیری کو شمار کرتا ہے تاہم علامت کو نظر انداز کر کے مطلق انحرافات لینے کی وجہ سے اس پر الجبرائی عمل دشوار کن ہوتا ہے۔

اگر چہ اوسط انحراف تغیر پذیری کا ایک اچھا پیمانہ ہے، اس کا استعمال محدود ہے۔ اگر مواد کے متعدد سٹوں کے درمیان تغیر پذیری کی صرف پیمائش اور تقابل مطلوب ہو تو اوسط انحراف کو استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اگر آپ مندرجہ ذیل تمثیلات کا غور سے مطالعہ کریں گے تو اوسط انحراف کا تصور واضح ہو جائے گا۔

تمثیل 6

مندرجہ ذیل قدروں کا بلحاظ وسطانیہ اوسط انحراف معلوم کیجیے۔

18, 25, 63, 59, 29, 72, 17, 25, 105, 87

حل

چونکہ مشاہدات کی تعداد 10 ہے جو ایک جفت عدد (even number) ہے، وسطانیہ دو نصف ترین مشاہدات کا اوسط ہوگا، جب کہ انہیں ان کی ضخامت (magnitude) کی ترتیب میں مرتب کیا جائے گا۔

17, 18; 25, 25, **29, 59,** 63, 72, 87, 105

وسطانیہ $\frac{29+59}{2} = 44$

اوسط انحراف کی تحسیب

X	|X - Median| i.e., |X-44|
18	26
25	19
63	19
59	15
29	15
72	28
17	27
25	19
105	61
87	43
Total	$\|X - M_e\| = 272$

بلحاظ وسطانیہ اوسط انحراف $\text{Median} = \frac{1}{n}\Sigma|X - M_e|$

$= \frac{1}{10} \times 272$

$= 27.2$

تمثیل 7

مندرجہ ذیل سلسلے کا بلحاظ حسابی اوسط، اوسط انحراف معلوم کیجیے۔

X	:	10	11	12	13	14	
تعدد	:	3	12	18	12	3	جملہ 48

حل

بلحاظ $\bar{X}$ اوسط انحراف کی تحسیب

x	f	fx	$\lvert x - \bar{x}\rvert$ i.e. $\lvert X - 12\rvert$	$f\lvert x - \bar{X}\rvert$
10	3	30	2	6
11	12	132	1	12
12	18	216	0	0
13	12	156	1	12
14	3	42	2	6
Total	48	576	—	36

نوٹ : $\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{1}{48} \times 576 = 12$

اوسط انحراف (بلحاظ حسابی اوسط) $\text{(Mean Deviation) (about Mean)} = \frac{1}{n}\Sigma f|X - \bar{X}|$

$= \frac{36}{48} = 0.75$

تمثیل 8

100 کمپنیوں کی فروخت سے متعلق مندرجہ ذیل گروہ بند مواد کے لیے، حسابی اوسط $(\bar{X})$ استعمال کر کے اوسط انحراف کی قدر ضربی معلوم کیجیے۔

فروخت (000' روپے)	کمپنیوں کی تعداد
40 - 50	5
50 - 60	15
60 - 70	25
70 - 80	30
80 - 90	20
90 - 100	5

حل

اوسط انحراف معلوم کرنے کے لیے ہم کو، مندرجہ ذیل جدول تیار کرنی ہوگی۔

فروخت (000' روپے)	وسطی قدر (x)	کمپنیوں کی تعداد (f)	fx	$\lvert x-\bar{x}\rvert$ یعنی $\lvert x-71\rvert$	$f\lvert x-\bar{x}\rvert$
40 - 50	45	5	225	26	130
50 - 60	55	15	825	16	240
60 - 70	65	25	1,625	6	150
70 - 80	75	30	2,250	4	120
80 - 90	85	20	1,700	14	280
90 - 100	95	5	475	24	120
جملہ		n=100	$\Sigma fx = 7,100$		$\Sigma f(x-\bar{x}) = 1040$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\Sigma fx = \frac{7,100}{100} = 71$$

اوسط انحراف (بلحاظ حسابی اوسط) = $\frac{1}{n}\Sigma f\lvert X-\bar{X}\rvert$ Mean Deviation (about Mean)

$$\frac{1}{100} \times 1.040 =$$

10.40 یا 10.4 ہزار روپے

اوسط انحراف کی قدر ضربی = $\frac{\text{اوسط انحراف بلحاظ } \bar{X}}{\bar{X}}$ Coefficient of Mean Deviation

$$\frac{10.40}{71} = \quad =$$

$$0.146 \quad =$$

تمثیل 9

کسی ایجنٹ کے ذریعہ بیمہ کئے گئے بیمہ کمپنی کے 80 پالیسی ہولڈروں کی عمروں کی تقسیم مندرجہ ذیل ہے۔ وسطانیہ کے ذریعہ اوسط انحراف کی قدر ضربی معلوم کیجیے۔

عمر کا گروہ (سالوں میں)	تعداد
16 - 20	8
21 - 25	15
26 - 30	13
31 - 35	20
36 - 40	11
41 - 45	7
46 - 50	3
51 - 55	2
56 - 60	1

حل

وسطانیہ سے اوسط انحراف کی تحسیب

عمر کا گروہ (سالوں میں)	تعدد (f)	مجموعی تعدد (cf)	جماعت کا وسطی نقطہ (M)	$\lvert X-M_d \rvert$ یعنی $\lvert X-31.5 \rvert$	$f\lvert X-M_d \rvert$
16 - 20	8	8	18	13.5	108.0
21 - 25	15	23	23	8.5	127.5
26 - 30	13	36	28	3.5	45.5
31 - 35	20	56	33	1.5	30.0
36 - 40	11	67	38	6.5	71.5
41 - 45	7	74	43	11.5	80.5
46 - 50	3	77	48	16.5	49.5
51 - 55	2	79	53	21.5	43.0
56 - 60	1	80	58	26.5	26.5
جملہ	n=80				$\Sigma f\lvert x-M_d \rvert = 582.0$

وسطانیہ کے $\frac{N}{2}$ یعنی 40 مشاہدات ہیں۔اس لئے یہ جماعت 35-31 میں واقع ہوئی ہے یا 35.5 - 30.5 (حقیقی انتہاؤں کی شکل میں)

وسطانیہ

$$\text{Median} = L + \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times i$$

$$= 30.5 + \frac{40 - 36}{20} \times 5$$

$$= \text{سال } 31.5$$

اوسط انحراف (بلحاظ وسطانیہ)

$$\text{Mean Deviation (about Median)} = \frac{1}{n}\Sigma f\lvert X - M_d \rvert$$

$$= \frac{1}{80} \times 582$$

$$= \text{سال } 7.275$$

بلحاظ وسطانیہ اوسط انحراف کی قدر ضربی

$$\text{Coefficient of Mean Deviation (about Median)} = \frac{\text{اوسط انحراف بلحاظ وسطانیہ}}{\text{وسطانیہ}}$$

$$= \frac{7.275}{31.5}$$

$$= 0.23$$

14.10 خلاصہ Let Us Sum Up

انتشار مواد کے پھیلاؤ یا بکھراؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ کسی مرکزی رجحان کے پیمانے سے مدات کے انحراف کے اوسط کو محسوب کرنے کے لیے بھی اس کا استعمال کیا جاتا ہے۔ کسی اوسط کی اعتباریت (Reliability) کے تعین کے لیے انتشار کو استعمال کیا جاتا ہے یا دو یا دو سے زیادہ مواد وں کی تغیر پذیری کے تقابل کے لیے یا تغیر کو قابو میں کرنے کے لیے بھی اس کو استعمال کیا جاتا ہے۔ انتشار کے ایک اچھے پیمانے کے لیے اس کا تمام مشاہدات پر مبنی ہونا ضروری ہے، اُسے آسانی سے محسوب کرنے کے قابل ہونا چاہیئے، نمونہ بندی کے اتار چڑھاؤ سے کم از کم حد تک متاثر ہونا چاہیئے، اور الجبرائی عمل کے قابل ہونا چاہیئے۔ دو یا دو سے زیادہ مواد کے سٹوں (sets) میں تغیر پذیری کا تقابل کرنے کے لیے اضافی انتشار کے پیمانے محسوب کیے جاتے ہیں۔ مطلق انتشار کے پیمانوں کو موزوں اوسط کی نسبت کے طور پر یا مواد کے دو منتخب مدات کے مجموعے کے طور پر ظاہر کر کے اس کو حاصل کیا جاتا ہے۔

عام طور پر زیر استعمال انتشاری پیمانوں میں ہیں۔ رینج (Range)، چوتھائیہ انحراف (Quartile Deviation)، اوسط انحراف (Mean Deviation) اور معیاری انحراف (Standard Deviation)۔ مواد کے بیش ترین اور کم ترین مدات کے درمیانی فرق کو رینج کہا جاتا ہے۔ یہ پورے مواد کے پھیلاؤ کو پیش کرتا ہے۔ چوتھائیہ انحراف Q_1 اور Q_3 کے درمیان فرق کا نصف ہے اور وسط کے صرف 50% مدات پر منحصر ہوتا ہے۔ اوسط انحراف کسی مرکزی رجحان کے پیمانے سے مدات کے مطلق انحرافات کا حسابی اوسط ہے جو حسابی اوسط، وسطانیہ یا کثیریہ بھی ہو سکتا ہے۔

چوتھائیہ انحراف کھلے کنارے کے مواد کا موزوں پیمانہ ہو سکتا ہے۔ رینج اس وقت کارآمد ہوتا ہے، جب کہ انتہائی مدات اہم ہوتے ہیں جیسے کوالٹی کنٹرول، قیمتوں کا مطالعہ یا موسمیاتی مواد۔ اوسط انحراف تمام مدات پر مبنی ہوتا ہے۔ اکثر صورتوں میں دوسرے دو پیمانوں کی بہ نسبت، یہ پیمانہ مواد کی تغیر پذیری کا بہتر نمائندہ ہوتا ہے۔

14.11 کلیدی الفاظ اور علامات Key Words and Symbols

بین چوتھائیہ رینج (Inter Quartile Range): انتشار کا ایسا پیمانہ جو وسطی 50% مدات کے پھیلاؤ کو ملحوظ رکھتا ہے۔ یہ مواد کا $(Q_3 - Q_1)$ ہوتا ہے۔

اوسط انحراف (Mean Deviation) : اوسط، وسطانیہ یا کثیریہ سے لیے گئے مطلق انحرافات کا حسابی اوسط۔

چوتھائیہ انحراف (Quartile Deviation) : پہلے اور تیسرے چوتھائیے کے درمیانی فاصلے کا نصف۔

رینج (Range) : کسی مواد کے سٹ کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی قدر کا درمیانی فرق۔

علامات کی فہرست

باب 3 میں دی گئی علامات کی فہرست کے علاوہ، اس اکائی میں انتشار کے پیمانوں کے سلسلے میں مندرجہ ذیل مزید علامات دی جا رہی ہیں۔

اوسط انحراف : M.D., δ, A.D.

بلحاظ حسابی اوسط، اوسط انحراف : $M.D.(\bar{X})\ \delta\bar{X}\ AD\bar{X}$

بلحاظ وسطانیہ اوسط انحراف : $M.D.\ M_d, \delta M_d, AD\ M_d$

بلحاظ کثیریہ اوسط انحراف : $M.D.(M_o)\ \delta M_o, \delta z\ AD\ M_o$

چوتھائیہ انحراف : Q.D, Q

رینج : R

14.12 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات Answers to Check Your Progress

(A) 3. (i) غلط (ii) غلط (iii) صحیح (iv) صحیح (v) غلط (vi) صحیح

(B) 4. رینج = 39، Q.D. = 9.25

5. رینج = 14، رینج کی قدر ضربی = 0.58 ' Q.D. = 2.25 ' Q.D. (چوتھائیہ انحراف) کی قدر ضربی = 0.101

6. (i) صحیح (ii) غلط (iii) غلط (iv) صحیح (v) غلط

14.13 امتحانی سوالات/مشقیں Terminal Questions/Exercises

سوالات

1. اوسط انحراف کیا ہے؟ اس کے فوائد اور نقصانات پر تبصرہ کیجیے۔

مشقیں

(1) چوتھائیہ انحراف اور اوسط انحراف بلحاظ $\bar{X}$ معلوم کیجیے جب کہ مندرجہ ذیل مواد دیا گیا ہے۔

عمر برسوں میں :	20	30	40	50	60	70	80
ارکان کی تعداد :	3	61	132	153	140	51	3

(جواب Q.D. = 10, M.D. $\bar{X}$ = 9.52)

(2) دور کے فاصلے کے 20 ٹیلیفون کالوں کے دوران وقت کے لیے تعددی تقسیم مندرجہ ذیل ہے

کالموں کا دوران وقت	تعداد
4 لیکن 8 سے کم	4
8 لیکن 12 سے کم	5
12 لیکن 16 سے کم	7
16 لیکن 20 سے کم	2
20 لیکن 24 سے کم	1
24 لیکن 28 سے کم	1
جملہ	20

حسابی اوسط، وسطانیہ اور چوتھائیہ انحراف معلوم کیجیے۔

(جواب: حسابی اوسط = 12.8، وسطانیہ = 12.6، Q.D. = 3.3)

(3) مندرجہ ذیل مواد سے بلحاظ وسطانیہ، اوسط انحراف اور اوسط انحراف کی قدر ضربی معلوم کیجیے۔

فروخت ('000 روپے)	کمپنیوں کی تعداد
20 سے کم	3
30 سے کم	9
40 سے کم	20
50 سے کم	23
60 سے کم	25

(جواب: بلحاظ M_e M.D. = 8.9، بلحاظ M_e M.D. کی قدر ضربی = 0.29)

(4) بجلی کے گھریلو صرف (Consumption) پر ایک جائزہ سے مندرجہ ذیل صرف شدہ اکائیوں کی تفصیل حاصل ہوئی۔ چوتھائیہ انحراف اور اس کی قدرِ ضربی معلوم کرو۔

اکائیوں کی تعداد	صارفین کی تعداد
200 سے کم	9
200 - 400	18
400 - 600	27
600 - 800	32
800 - 000	45
1000 - 1000	38
1200 - 1400	20
1400 - سے زیادہ	11

(جواب: Q.D = 529.6 ' Q.D. کی قدر ضربی 0.317)

(5) مندرجہ ذیل مواد سے حسابی اوسط اور وسطانیہ کے بلحاظ اوسط انحراف محسوب کیجیے۔

جماعتی وقفہ :	0 - 9	10 - 19	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59
تعداد :	15	36	53	42	17	2

(جواب: $\overline{M.D.X} = 9.10$ $M.D.M_e = 9.08$)

(6) مندرجہ ذیل مواد کے لیے، بلحاظ کثیریہ' اوسط انحراف اور اس کی قدر ضربی محسوب کیجیے۔

فی مدنقائص کی تعداد	تعداد
0 - 5	18
5 - 10	32
10 - 15	50
15 - 20	75
20 - 25	125
25 - 30	150
30 - 35	100
35 - 40	90
40 - 45	80
45 - 50	50

(جواب: $M.D.M_o = 9.02$ $M.D.M_o$ کی قدر ضربی 0.338)

(7) مندرجہ ذیل مواد کے لیے اوسط انحراف اور اس کی قدر ضربی محسوب کیجیے۔

درخواست کیے گئے حصص کی تعداد	درخواست گزاروں کی تعداد
50 - 100	2,500
100 - 150	1,500
150 - 200	1,300
200 - 250	1,100
250 - 300	900
300 - 350	750
350 - 400	675
400 - 450	525
450 - 500	450

(جواب: $M.D.M_e = 102.13$ ، $M.D.M_o$ کی قدر ضربی = 0.011)

نوٹ : یہ سوالات اور مشقیں اکائی کے بہتر طور پر سمجھنے میں مددگار ہیں۔ ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجیے لیکن ان کے جواب یونیورسٹی کو مت روانہ کیجیے۔ یہ محض آپ کی مشق کے لیے ہیں۔

اکائی 15 انتشار کے پیمانے II

UNIT-15 : MEASURES OF DISPERSION - II

ساخت

Structure		15.0 مقاصد
Objectives		15.1 تمہید
Introduction		15.2 معیاری انحراف
Standard Deviation	15.2.1	معنی
Meaning	15.2.2	تحسیب
Computation	15.2.3	خاصیتیں
Properties	15.2.4	خوبیاں اور خامیاں
Merits and Limitations		15.3 تغیر کی قدر ضربی
Coefficient of Variation		15.4 چند تمثیلات
Some Illustrations		15.5 لورنز منحنی
Lorenz Curve		15.6 انتشار کے پیمانوں کا تقابل
Comparison of Measures of Dispersion		15.7 خلاصہ
Let Us Sum Up		15.8 کلیدی الفاظ اور علامات
Key Words and Symbols		15.9 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات
Answers to Check Your Progress		15.10 امتحانی سوالات/مشقیں
Terminal Questions/Exercises		

15.0 مقاصد Objectives

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ :

- مختلف قسم کے مواد کے لیے معیاری انحراف اور تغیر کی قدر ضربی کی تعریف کر سکیں اور انہیں محسوب کر سکیں۔
- معیاری انحراف کی خوبیاں اور خامیاں واضح کر سکیں۔
- لورنز منحنی مرتسم کر کے مدات میں عدم مساوات کی حد کا ترسیمی طور پر تعین کر سکیں۔
- مختلف قسم کے انتشار کے پیمانوں کا تقابل کر سکیں اور ان کا موزوں مقام پر استعمال کر سکیں۔

15.1 تمہید Introduction

اکائی 14 میں آپ نے انتشار کے پیمانوں یعنی رینج، چوتھائیہ انحراف اور اوسط انحراف کے متعلق سیکھا۔ پہلے دو پیمانے مواد کے منتخبہ مدات پر مبنی ہوتے ہیں اور تیسرا، مواد کے ہر ہد کی قدروں کو استعمال کر کے محسوب کیا جاتا ہے۔ لیکن اوسط انحراف کے محسوب کرنے میں مرکزی رجحان سے مدات کے انحرافات کی منفی علامات کو نظر انداز کر دیا جاتا ہے۔ تحسیب کے دوران رونما مثبت اور منفی علامتوں کو نظر انداز کرنے کی وجہ سے اوسط انحراف

(mean deviation) میں کچھ خامیاں پیدا ہو جاتی ہیں۔ انتشار کا ایک اور پیمانہ ہے معیاری انحراف جو علامات کے مسئلہ کا نگران ہے۔ اس اکائی میں آپ مختلف مواد کے لیے معیاری انحراف اور اس کی قدر ضربی (Coefficient) محسوب کرنے کے طریقے، ان کی خوبیاں، خامیاں اور طریق استعمال جان سکیں گے۔ آپ لورنز منحنی بھی سیکھیں گے جو انتشار معلوم کرنے کا ترسیمی طریقہ ہے۔

15.2 معیاری انحراف Standard Deviation

جیسا کہ پہلے بحث کی گئی ہے کہ ہم مرکزی رجحان سے مدات کے انحرافات کی منفی علامات کو نظر انداز کر کے اوسط انحراف کو محسوب کرتے ہیں۔ ایسا اس لیے ہے کہ انتشار میں ہم صرف یہ جاننا چاہتے ہیں کہ اس بات سے قطع نظر کہ مدات مرکزی رجحان سے کم ہیں یا زیادہ، اوسطاً یہ مرکزی رجحان سے کتنے منحرف ہیں۔ تحسیب کے دوران ان علامتوں کو نظر انداز کرنے سے رونما ہونے والی خامیوں کے ازالہ کے لیے ان اعداد کا ریاضیاتی حل یہ ہے کہ ان اعداد کا مربع معلوم کیا جائے کیونکہ ہر منفی قدر مربع نکالنے کے بعد مثبت ہو جاتی ہے اور اس طور پر ایک نیا اوسط حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ اس پیمانے کو حاصل کرنے کے لیے مرکزی رجحان کی قدروں سے لے گئے انحراف کے اوسط کا جذر المربع معلوم کیا جاتا ہے جس کو اوسط انحراف کا جذر المربع کہا جاتا ہے' اوسط انحراف کی طرح اوسط انحراف کے جذر المربع کی تحسیب حسابی اوسط یا وسطانیہ یا کثیریہ میں سے تفریق کر کے کی جا سکتی ہے۔ ان میں قدروں کے منجملہ ہر قسم کے مواد میں حسابی اوسط سے لیے گیے انحراف کے اوسط کے مربع کا جذر اقل ترین ہوتا ہے۔ اس لیے اس کو معیاری انحراف کہا جاتا ہے۔ اب ہم معیاری انحراف کے معنی، تحسیب کے طریقوں، خوبیوں اور خامیوں پر غور کریں گے۔

15.2.1 معنی (Meaning)

حسابی اوسط سے مشاہدات کے انحرافات کے مربعوں کے اوسط کے جذر المربع کو معیاری انحراف کہا جاتا ہے۔ اس کو عموماً یونانی حرف (سگما) σ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ معیاری انحراف کے محسوب کرنے میں مندرجہ ذیل مراحل اہم ہیں۔

(1) دیئے گیے سلسلے کا حسابی اوسط محسوب کریں۔

(2) مختلف مدوں کے حسابی اوسط سے انحرافات محسوب کریں۔

(3) انفرادی انحرافات کے مربعے محسوب کریں۔

(4) مربع انحرافات کو جمع کریں اور حاصل جمع کو مدات کی تعداد سے تقسیم کریں۔

(5) حاصل ہونے والے عدد کا جذر المربع، سلسلہ کا معیاری انحراف ہوتا ہے۔

مشاہدات کی تعداد اگر N ہو اور مشاہدات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ہوں جن کا اوسط $\bar{X}$ ہو تو حسابی اوسط سے انحرافات ہوں گے۔ $(X_1 - \bar{X}), (X_2 - \bar{X}), \ldots, (X_n - \bar{X})$۔ ان انحرافات کے مربعے ہوں گے $(X_1 - \bar{X})^2, (X_2 - \bar{X})^2, \ldots, (X_n - \bar{X})^2$۔

لہذا حسابی اوسط سے اوسط مربع انحرافات ہوں گے:

$$\frac{1}{n}\left[(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \ldots + (X_n - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n}\Sigma(X - \bar{X})^2$$

اس لیے معیاری انحراف $(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(X - \bar{X})^2}$

اس طریقے سے اگر تعریف کی جائے تو وہ معیاری انحراف کو محسوب کرنے کے طریقے کو سمجھنے میں مددگار ہوگی۔

تمثیل 1

مدات کے سٹ: 3, 4, 6, 7, 15, 25 کا معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

معیاری انحراف کی تحسیب (Computation of Standard Deviation)

مد نمبر	x	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$
1	3	-7	49
2	4	-6	36
3	6	-4	16
4	7	-3	9
5	15	5	25
6	25	15	225
	$\Sigma x = 60$	$\Sigma(x-\bar{x}) = 0$	$\Sigma(x-\bar{x})^2 = 360$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{60}{6} = 10$$

معیاری انحراف (S.D.) $(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(X-\bar{X})^2}$

$$= \sqrt{\frac{360}{6}}$$

$$= \sqrt{60}$$

تقریباً 7.7 =

گروہ بند مواد کے لیے مندرجہ بالا تعریف میں کچھ توافق ضروری ہے۔ اگر مواد گروہ بند ہے تو مدات (یا جماعت کے وقفوں کی نصف قدروں) سے انحرافات کے مربعوں کو متعلقہ تعددوں سے ضرب دے کر جمع کیا جاتا ہے اور تعددوں کے حاصل جمع سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ لہذا، گروہ بند مواد کے لیے معیاری انحراف کو $\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma f(X-\bar{X})^2}$ یا $\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma f(m-\bar{X})^2}$ سے دیا جاتا ہے۔ جہاں پر 'm' جماعتی وقفوں کا درمیانی نقطہ ہے۔ معیاری انحراف کے مربع کو تفاوت **(variance)** کہتے ہیں۔ اس لیے غیر گروہ بند مواد کے لیے تفاوت ہوگا $\frac{1}{n}\Sigma(X-\bar{X})^2$ اور گروہ بند مواد کے لیے $\frac{1}{n}\Sigma f(X-\bar{X})^2$ یا $\frac{1}{n}\Sigma f(m-\bar{X})^2$۔ اب ہم چند تمثیلوں کے ذریعہ معیاری انحراف کے محسوب کرنے کے طریقے کی وضاحت کریں گے۔

تمثیل 2

مندرجہ ذیل مواد سے معیاری انحراف (S.D.) اور تفاوت (Variance) دونوں معلوم کیجیے:۔

x :	10	12	14	16	18	20	22
f :	3	5	9	16	8	7	2

حل

معیاری انحراف کی تحسیب

x	f	fx	$(x-\bar{x})$	$f(x-\bar{x})^2$
10	3	30	-6	108
12	5	60	-4	80
14	9	126	-2	36
16	16	256	0	0
18	8	144	2	32
20	7	140	4	112
22	2	44	6	72
	N = 50	Σfx = 800		$\Sigma f(x-\bar{x})^2 = 440$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{n}$$

$$= \frac{800}{50} = 16$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma f(X-\bar{X})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{50} \times 440} = 2.97$$

تفاوت (Variance) $= \frac{1}{n}\Sigma f(X-\bar{X})^2$

$$= \frac{1}{50} \times 440 = 8.8$$

تمثیل 3

مندرجہ ذیل تقسیم سے معیاری انحراف اور تفاوت معلوم کیجیے۔

نشانات :	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16
تعداد طلبہ :	4	8	2	1

حل:

معیاری انحراف اور تفاوت کی تحسیب

Marks	f	(m) (mid point)	fm	$(m-\bar{x})$	$m-x^2$	$f(m-\bar{x})^2$
0 - 4	4	2	8	-4	16	: 64
4 - 8	8	6	48	0	0	: 0
8 - 12	2	10	20	4	16	: 32
12 - 16	1	14	14	8	64	: 64
Total	N = 15		Σfm = 90			$\Sigma f(m-\bar{x})^2 = 160$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{n}$$

$$= \frac{90}{15} = 6$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma f(m - \bar{X})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{15} \times 160} = 3.27 \text{ approximately}$$ تقریباً

$$\text{تفاوت} = \frac{1}{n}\Sigma f(X - \bar{X})^2$$

$$= \frac{160}{15} = 10.67$$ تقریباً

15.2.2 تحسیب Computation

معیاری انحراف معلوم کرنے کے دو طریقے ہیں۔ (1) راست طریقہ (2) آسان طریقہ۔ اب ہم ان دو طریقوں کا مطالعہ کریں گے۔

راست طریقہ : وہ طریقہ ہے جس میں معیاری انحراف کو محسوب کرتے وقت راست طریقوں کو استعمال کیا جاتا ہے لہذا یہ ایسا طریقہ ہے جس کا استعمال مندرجہ بالا تمثیلات میں کیا گیا ہے۔ لہذا اس طریقے کے تحت مندرجہ ذیل فارمولے ہیں۔

غیر گروہ بند مواد کے لیے $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(X - \bar{X})^2}$

گروہ بند مواد کے لیے $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(m - \bar{X})^2}$ یا $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(X - \bar{X})^2}$

جب مدات کا سائز اور ان کی تعداد زیادہ نہ ہو تو، مدات کے مجموعہ اور مدات کے مربعوں کو معلوم کرنے کا زائد مرحلہ اور اس کے بعد حسابی اوسط سے معیاری انحراف معلوم کرنا ضروری نہیں۔ اس کے لئے مندرجہ ذیل فارمولے استعمال کئے جاسکتے ہیں۔

غیر گروہ بند مواد کے لیے $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma fx^2 \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$ یا $\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{n} - \bar{x}^2}$ چونکہ $\bar{x} = \frac{\Sigma fx^2}{n}$

گروہ بند مواد کے لیے $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$ یا $\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - x^2}$ چونکہ $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

ریاضیاتی طور پر ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ضابطوں کا پہلا سٹ اور دوسرا سٹ یکساں ہیں اور ایک ہی نتیجہ پیش کرتے ہیں۔

آسان طریقہ: اگر مواد ضخیم اور حسابی اوسط کسور میں ہو تو معیاری انحراف مفروضہ حسابی اوسط (A) سے انحرافات لے کر بھی معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اس کے فارمولے مندرجہ ذیل ہیں:۔

غیر گروہ بند مواد کے لیے $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2}$ جہاں پر $d = X - A$

گروہ بند مواد کے لیے $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2}$ یا $c\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2}$

جہاں پر $d' = \frac{X - A}{C}$ اختصاری انحراف (Step Deviation) ہے اور 'C' x - a' یا 'd' کے کالم میں مشترکہ جزو ضربی ہے۔ ان فارمولوں کے محسوب کرنے میں مختلف مراحل کو سمجھنے کے لیے اب ہم کچھ تمثیلات لیں گے۔

تمثیل 4

مندرجہ ذیل مواد کے لیے راست طریقے سے اور مفروضہ حسابی اوسط 32 مان، کر آسان طریقہ سے معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

سلسلہ نشان :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
سائز :	20	22	27	30	31	32	35	40	45	48

حل :

راست طریقہ: معیاری انحراف کی تحسیب

S.No.	x	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$
1	20	- 13	169
2	22	- 11	121
3	27	- 6	36
4	30	- 3	9
5	31	- 2	4
6	32	-1	1
7	35	2	4
8	40	7	49
9	45	12	144
10	48	15	225
	$\Sigma x = 330$		$\Sigma(X-\bar{X})^2 = 762$

اب

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{330}{10} = 33$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\Sigma(X-\bar{X})^2}}{n} = \frac{\sqrt{762}}{\sqrt{10}} = \sqrt{76.2}$$
$$= 8.73$$

آسان طریقہ: معیاری انحراف کی تحسیب

S.No.	x	$d = x - 32$	d^2
1	20	- 12	144
2	22	- 10	100
3	27	-5	25
4	30	- 2	4
5	31	- 1	1
6	32	0	0
7	35	3	9
8	40	8	64
9	45	13	169
10	48	16	256
		$\Sigma d = 10$	$\Sigma d^2 = 772$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{772}{10} - \left(\frac{10}{10}\right)^2} = \sqrt{77.2 - 1}$$

$$= \sqrt{76.2} = 8.73$$

آپ نوٹ کریں کہ دونوں طریقوں سے محسوب کیے گئے نتیجے یکساں ہیں۔

تمثیل 5

مندرجہ ذیل تعددی تقسیم کے لیے معیاری انحراف اور تفاوت راست طریقے سے معلوم کیجیے اور مفروضہ حسابی اوسط 14 مان کر آسان طریقے سے بھی محسوب کیجیے۔

x	:	10	12	14	16	18	20	22
f	:	3	5	9	16	8	7	2

حل

معیاری انحراف اور تفاوت کی تحسیب Calculation of Standard Deviation and Variance

راست طریقہ

x	f	fx	$(x-\bar{x})$	$f(x-\bar{x})$	$f(x-\bar{x})^2$
10	3	30	- 6	- 18	108
12	5	60	- 4	- 20	80
14	9	126	- 2	- 18	36
16	16	256	0	0	0
18	8	144	2	16	32
20	7	140	4	28	112
22	2	44	6	12	72
	N = 50	$\Sigma fx = 800$		$\Sigma fx(x-\bar{x}) = 0$	$\Sigma f(x-\bar{x})^2 = 440$

اب $\text{Now } \bar{X} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{800}{50}$

$$= 16$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma f(x-\bar{X})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{440}{50}} = \sqrt{8.8}$$

$$= 2.97$$

تفاوت (Variance) $= \sigma^2 = 8.8$

آسان طریقہ

x	f	d = x - 14	fd	fd^2
10	3	-4	-12	48
12	5	-2	-10	20
14	9	0	0	0
16	16	2	32	64
18	8	4	32	128
20	7	6	54	252
22	2	8	16	128
			$\Sigma fd = 100$	$\Sigma fd^2 = 640$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{540}{50} - \left(\frac{100}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{12.8 - 4}$$

$$= \sqrt{8.8} = 2.97$$

تفاوت (Variance) $= 8.8 = \delta^2$

آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ جب حسابی اوسط، صحیح اعداد میں ہو تو آسان طریقے سے محسوب کرنے میں کچھ زیادہ سہولت نہیں ہوتی۔

تمثیل 6

1987-88 کے دوران 100 کمپنیوں کا کمایا ہوا نفع (لاکھ روپوں میں) نیچے دیا گیا ہے۔ مدات یا مربعوں کے استعمال سے (a) حسابی اوسط (b) تفاوت (c) معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

منافع (لاکھ روپے)	کمپنیوں کی تعداد
20 - 30	4
30 - 40	8
40 - 50	18
50 - 60	30
60 - 70	15
70 - 80	10
80 - 90	8
90 - 100	7

حل

جماعت	Mid-point (X)	Frequency (f)	fX	fX^2
20 - 30	25	4	100	2,500
30 - 40	35	8	280	9,800
40 - 50	45	18	810	36,450
50 - 60	55	30	1650	90,750
60 - 70	65	15	975	63,375
70 - 80	75	10	750	56,250
80 - 90	85	8	680	57,800
90 - 100	95	7	665	63,175
جملہ		100	5,910	3,80,100

$$\text{Mean}(\bar{X}) = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{5,910}{100} \quad \text{(اوسط)} \qquad \text{(a)}$$

$$= 59.10$$

$$\text{Variance} = \sigma^2 = \frac{\Sigma fX^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fX}{n}\right)^2 = \frac{380100}{100} - \left(\frac{5910}{100}\right)^2 \quad \text{(تفاوت)} \qquad \text{(b)}$$

$$= 3801.00 - 3492.81$$

$$= 308.19$$

$$\text{Standard Deviation} = \sqrt{\text{Variance}} = \sqrt{308.19} \quad \text{(معیاری انحراف)} \qquad \text{(c)}$$

$$= 17.56$$

آپ مشاہدہ کریں کہ اس تمثیل میں مدات کے مجموعے اوران کے مربعوں کے مجموعے کو استعمال کر کے تحسیبات کافی بڑے ہوگئے ہیں۔ یہ طریقہ اس مفہوم میں راست طریقہ ہے کیونکہ ہم نے مدات کو راست طور پر استعمال کیا ہے اور کسی دوسری قدر سے انحرافات کو نہیں لیا ہے۔ اس طریقہ کو ہم صرف اس وقت استعمال کر سکتے ہیں جب مدوں کا سائز اوران کی تعداد مختصر ہو۔

تمثیل 7

مندرجہ ذیل تقسیم سے معیاری انحراف اور حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

جماعتی وقفہ	:	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
تعدد	:	4	8	8	16	12	6	4

حل

حسابی اوسط کی تحسیب کی طرح مختلف درمیانی نقطوں میں سے کسی ایک کو مفروضہ اوسط کے طور پر لیا جاتا ہے جو کہ درمیان میں واقع ہوتا ہے اور جس کا تعدد سب سے زیادہ ہوتا ہے۔ اس طور پر حاصل ہوئے انحرافات کو جزو ضربی (common factor) (اگر ہو تو) سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ اس طریقہ کو اختصاری انحراف **(Step-deviation method)** طریقہ کہا جاتا ہے۔

حسابی اوسط اور معیاری انحراف کی تحسیب

جماعتی وقفے	f	Mid point (x)	$d = X - A$ $(x - 45)$	$d^1 = \frac{d}{10} = \frac{d}{c}$	fd^1	fd^{i2}
10 - 20	4	15	- 30	- 3	- 12	36
20 - 30	8	25	- 20	- 2	- 16	32
30 - 40	8	35	- 10	- 1	- 8	8
40 - 50	16	45	0	0	0	0
50 - 60	12	55	+10	1	12	12
60 - 70	6	65	+20	2	12	24
70 - 80	4	75	+30	3	12	36
	n = 58				$\Sigma fd^1 = 0$	$\Sigma f(d^1)^2 = 148$

یہاں پر مفروضہ حسابی اوسط (A) بقدر 45 ہے اور مشترک جزو ضربی (C) 10 ہے جو جماعت کا وقفہ بھی ہے۔

اوسط $\bar{x}$

$$\text{Mean } \bar{X} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times C$$

$$= 45 + \frac{0}{58} \times 10$$

$$= 45$$

معیاری انحراف

$$\text{Standard Deviation} = C \times \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{\frac{148}{58} - \left(\frac{0}{50}\right)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{2.552} = 1.597 \times 10$$

$$= 15.97$$

تمثیل 8

مندرجہ ذیل تقسیم کے لیے معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

جماعتی وقفہ :	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-3000
تعداد :	90	218	86	41	15

حل

جماعتی وقفہ	تعدادات (f)	Mid-point (m)	$d' = \frac{m - 750}{250}$	fd'	$f(d')^2$
0 - 500	90	250	-2	-180	360
500-1000	218	750	0	0	0
1000-1500	86	1250	2	172	344
1500-2000	41	1750	4	164	656
2000-3000	15	2500	7	105	735
Total	n = 450	---	---	261	2095

یہاں پر مفروضہ حسابی اوسط ہے 750 اور مشترک جزو ضربی ہے 250

معیاری انحراف :

$$\text{Standard Deviation} = C \times \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2}$$

$$= 250 \times \sqrt{\frac{2095}{450} - \left(\frac{261}{450}\right)^2}$$

$$= 250 \times \sqrt{4.6556 - (0.58)^2}$$

$$= 250 \times \sqrt{4.3192}$$

$$= 519.6$$

آپ نوٹ کریں کہ جب جماعتی وقفے مساوی نہیں ہوتے تو اختصاری انحراف (Step deviation) 'd' کا ترتیب وار صحیح اعداد یعنی 1، 2، 3 یا 1-، 2-، 3-، وغیرہ میں ہونا ضروری نہیں ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ A

(1) معیاری انحراف (Standard Deviation) کی تعریف کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

(2) معیاری انحراف محسوب کرنے میں استعمال ہونے والے فارمولے (formulae) لکھیے۔

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(3) مندرجہ ذیل مشاہدات سٹ کے لیے معیاری انحراف (Standard Deviation) محسوب کیجیے۔

245, 322, 192, 310, 231

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(4) مندرجہ ذیل مواد کے لیے تفاوت (Variance) معلوم کیجیے۔

Value:	130-139	140-149	150-159	160-169	170-179	180-189	190-199
f :	1	4	14	20	22	12	2

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(5) تحریر کیجیے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) تفاوت کو اوسط مربع انحراف (Mean square deviation) کہہ سکتے ہیں۔

(ii) معیاری انحراف منفی ہوسکتا ہے۔

(iii) کسی دیئے گئے مواد میں جذر اوسط مربع انحراف (root mean square deviation) کی ایک سے زیادہ قدر ہوسکتی ہے۔

(iv) معیاری اوسط جذر اوسط مربع انحراف کی کوئی خاص صورت نہیں ہوسکتی۔

(v) معیاری انحراف محسوب کرنے کے مختلف طریقے مختلف نتائج پیش کرسکتے ہیں۔

15.2.3 خاصیتیں Properties

آپ نے معیاری انحراف کے معنی اور محسوب کرنے کے طریقے سیکھے۔ اب ہم معیاری انحراف کی اہم خاصیتوں پر روشنی ڈالیں گے:۔

(1) کسی سلسلے کے ہر مد میں ایک مستقل قدر کے اضافہ یا کمی کے باوجود معیاری انحراف کی قدر غیر متبدل رہتی ہے چنانچہ اگر $Y = X + K$ جہاں پر K ایک مستقل مقدار ہے تو اس صورت میں Y کا معیاری انحراف x کے معیاری انحراف کے مساوی ہوتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں معیاری انحراف مبدا میں تبدیلی کے تابع نہیں ہوتا۔

مثال کے طور پر :

X	$X-\bar{X}$	$(X-\bar{X})^2$	Let Y = X+10	$(Y-\bar{Y})$	$(Y-\bar{Y})^2$
1	-2	4	1 + 10 = 11	-2	4
2	-1	1	2 + 10 = 12	-1	1
3	0	0	3 + 10 = 13	0	0
4	1	1	4 + 10 = 14	1	1
5	2	4	5 + 10 = 15	2	4
Total 15	0	10	65	0	10

حسابی اوسط $\text{Arithmetic Mean of } X = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{15}{5} = 3$

$$\sigma \text{ of } X = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

$$\text{A.M. of } Y = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{65}{5} = 13$$

$$\sigma \text{ of } Y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

Hence, S.D. of X = S.D. of Y

پس x کا معیاری انحراف = y کا معیاری انحراف۔

(2) کسی دیئے گئے سلسلے کے لیے ہر مشاہدے کو اگر کسی مستقل قدر سے ضرب دیا جائے یا تقسیم کیا جائے تو معیاری انحراف بھی اسی طرح متاثر ہوگا۔ لہذا اگر $Y = AX$، جہاں پر A مستقل ہے، تب Y کا معیاری انحراف = X کا معیاری انحراف × A ۔

مثال کے طور پر

x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$y=10x$	$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$
1	-2	4	10	- 20	400
2	-1	1	20	- 10	100
3	0	0	30	0	0
4	1	1	40	10	100
5	2	4	50	20	400
15	0	10	150	0	1,000

$$\bar{Y}=\frac{\Sigma Y}{n}=\frac{150}{5}=30$$

$$\sigma \text{ of } Y=\sqrt{\frac{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}{n}}=\sqrt{\frac{1000}{5}}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$$

$$\therefore \sigma \text{ of } Y=10(\sigma \text{ of } x)$$

لہذا، آپ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ معیاری انحراف' مبدا کی تبدیلی کے تابع نہیں ہوتا لیکن پیمانے کی تبدیلی کے تابع ہوتا ہے۔

(3) دیئے گیے مشاہدات سٹ کے لیے، معیاری انحراف، اوسط انحراف بلحاظ حسابی اوسط اور چوتھائیہ انحراف سے ہرگز کم نہیں ہوتا۔ درحقیقت نارمل مواد کے لیے اوسط انحراف $\frac{4}{5}\sigma$ اور چوتھائیہ انحراف $\frac{2}{3}\sigma$ ہوتا ہے۔

(4) اگر دو گروہ n_1 اور n_2 مشاہدوں پر مشتمل ہوں، جن کے اوسط $\bar{X}_1$ اور $\bar{X}_2$ اور معیاری انحراف بالترتیب σ_1 اور σ_2 ہوں تو مخلوط گروپ کے معیاری انحراف کا مندرجہ ذیل طریقہ سے تعین کیا جاسکتا ہے:

$$\sigma_{12}=\sqrt{\frac{(n_1\sigma_1^2+n_2\sigma_2^2)+n_1d_1^2+n_2d_2^2}{n_1+n_2}}$$

جہاں پر σ_{12} = دو گروپوں کا مخلوط معیاری انحراف

$d_1=\bar{X}_{12}-\bar{X}_1,\ d_2=\bar{X}_{12}-\bar{X}_2$

$\bar{X}_{12}$ = دو گروپوں کا مخلوط حسابی اوسط

خاصیتوں 3 اور 4 کو سمجھنے کے لیے تمثیل 13 اور 14 کو دیکھیے جن کو سکشن 15.4 (چند تمثیلات کے تحت) اس اکائی میں مابعد پیش کیا گیا ہے۔

(5) حسابی اوسط کے ماسوا کسی اور قدر سے محسوب کردہ جذر اوسط مربع انحراف ہمیشہ معیاری انحراف سے زیادہ رہتا ہے۔ اس کو سمجھانے کے لیے، ہم اوپر (1) کے تحت میں لیے گئے X کی اقدار کو پھر سے لیں گے اور جذر اوسط مربع انحراف کو بلحاظ 4 محسوب کریں گے جو حسابی اوسط $(\bar{x})$ سے مختلف ہے اور جو (3) ہے۔

X	:	1	2	3	4	5
X-4	:	-3	-2	-1	0	1
$(X-4)^2$	:	9	4	1	0	1

اب $\Sigma(X-4)^2$

لہذا بلحاظ (4) جذر اوسط مربع انحراف $= \frac{\sqrt{\Sigma(X-4)^2}}{n}$

$= \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$

$= \sqrt{3}$

لیکن X کا معیاری انحراف $\sqrt{2}$ ہے۔ اس لیے جذر اوسط مربع انحراف، حسابی اوسط کے سوا بلحاظ کسی اور قدر کے، معیاری انحراف سے بڑا ہوتا ہے

(6) ایک نارمل قسم کے مواد میں (نارمل مواد کے معنی کو تفصیل کے ساتھ اکائی 16 میں سمجھایا جائے گا) 'رینج $AM \pm \sigma$ کے درمیان تقریباً 68% مدات' $AM \pm 2\sigma$ کے درمیان تقریباً 95% مدات اور $AM \pm 3\sigma$ کے درمیان تقریباً تمام مدات واقع ہوتے ہیں۔

اس کو سمجھانے کے لیے، تمثیل 5 کے مواد پر غور کریں گے۔ اس مواد کے لیے A.M. 16 ہے اور σ 2.97 ہے۔ اس لیے رینج $A.M. \pm \sigma$ ہوگا 16 ± 2.7 یا 13.03 تا 18.97 ہے۔ مواد میں 13.03 تا 18.97 کے درمیان 8+16+9 یعنی 33 مدات ہیں یعنی کل مدوں کا 66% (یعنی 50) جو 68% سے بہت قریب ہے۔ اسی طرح رینج $AM \pm 2\sigma$ کے درمیان مدات کی تعداد ہوگی $16 \pm 2 \times 2.97$ یا 10.05-21.94

پہلے اور آخری گروپ کے مدات کے سوا تمام مدات اس رینج میں واقع ہیں۔ لہذا 10.06 سے 21.94 تک کے مابین 45 مدات ہیں یعنی 90% جو کہ قدریں 95% سے کچھ زیادہ مختلف نہیں ہے۔ آپ یہ بھی تصدیق کر سکتے ہیں آیا 100% مدات رینج $A.M. \pm 3\sigma$ کے درمیان واقع ہیں یا نہیں۔

مندرجہ بالا میں محسوب شدہ مختلف حدود میں واقع ہونے والے مدات کے فیصد' ان پیمانوں کی خاصیت کے ضمن میں ذکر کیے گئے فیصدوں کے بالکل مساوی نہیں ہے۔ اس سے اشارہ ملتا ہے کہ تمثیل 5 میں لیا گیا مواد مکمل طور پر نارمل نہیں، لیکن اس کے قریب تر ہے۔

15.2.4 خوبیاں اور خامیاں Merits and Limitations

خوبیاں: انتشار کے تمام پیمانوں میں، معیاری انحراف برتر سمجھا جاتا ہے کیونکہ اس میں ایک اچھے انتشار کے پیمانے کی تمام لوازم بدرجہ اتم موجود ہوتی ہیں۔ معیاری انحراف میں مندرجہ ذیل خوبیاں ہوتی ہیں:۔

(i) اس کی تعریف بے لوچ اور ٹھوس انداز میں کی گئی ہے اور یہ سلسلہ کے سب مشاہدوں پر محیط ہے۔

(ii) وہ یگانہ صفت جو معیاری انحراف کو انتشار کے دوسرے پیمانوں سے ممتاز کرتی ہے، یہ ہے کہ یہ الجبرائی عمل کے لیے نہایت موزوں پیمانہ ہے۔ چنانچہ اگر مختلف گروپوں میں سے ہر گروپ سے متعلق مشاہدوں کی جملہ تعداد' حسابی اوسط اور معیاری انحراف معلوم ہو تو مخلوط گروپ کا معیاری انحراف بہ آسانی محسوب کیا جا سکتا ہے۔

(iii) معیاری انحراف، نمونہ بندی کے اتار چڑھاؤ سے بہت کم متاثر ہوتا ہے۔

(iv) کسی نارمل تقسیم میں حسابی اوسط $\pm$ معیاری انحراف 68.36% قدروں کا احاطہ کرتے ہیں جب کہ چوتھائیہ انحراف 50% اور اوسط انحراف 57% قدروں کا احاطہ کرتے ہیں۔ اسی لیے معیاری انحراف ایک معیاری پیمانہ کہلاتا ہے۔

خامیاں: انتشار کے پیمانہ کے طور پر معیاری انحراف پیمانہ کی مندرجہ ذیل خامیاں ہیں:۔

(i) معیاری انحراف کی ایک اہم خامی یہ ہے کہ دو یا زیادہ سلسلوں کی مختلف اکائیوں میں دیے گئے مشاہدوں کے انتشار کے تقابل کے لیے اس کو استعمال نہیں کیا جا سکتا۔ اس مقصد کے لیے معیاری انحراف کی قدر ضربی کی تعریف ضروری ہو جاتی ہے۔

(ii) حسابی اوسط سے انحرافات کا مربع کرنا اور پھر ان مربع شدہ انحرافات کے مجموعہ کا جذر المربع نکالنا نہایت پیچیدہ عمل ہے۔

درحقیقت اس طریقہ عمل سے ایک اور خامی کی طرف اشارہ ملتا ہے یعنی معیاری انحراف انتہائی قدروں سے بہت زیادہ متاثر ہوتا ہے۔ انحرافات کے مربعے نکالنے کے عمل سے حسابی اوسط سے لیے گیے انحرافات کو غیر ضروری اہمیت ملتی ہے جو کہ انتہائی مدات سے حاصل کیے جاتے ہیں جب کہ حسابی اوسط کے قریبی اعداد کو بہت کم اہمیت ملتی ہے۔

(iii) کھلے کنارے کی جماعتوں کی تقسیم کے لیے معیاری انحراف کو معلوم نہیں کیا جاسکتا ہے۔

15.3 تغیر کی قدر ضربی Coefficient of Variation

تغیر کی قدر ضربی کو معیاری انحراف کی قدر ضربی بھی کہا جاتا ہے، جسے فیصد میں ظاہر کیا جاتا ہے، اس کا انحصار کسی سلسلہ کے معیاری انحراف اور حسابی اوسط کے مابین پائی جانے والی نسبت پر ہوتا ہے۔ چنانچہ تغیر کی قدر ضربی (co-efficient of variation) کو مندرجہ ذیل فارمولہ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\text{تغیر کی قدر ضربی} = \frac{\text{معیاری انحراف}}{\text{حسابی اوسط}} \times 100$$

تغیر کی قدر ضربی انتشار کا اضافی پیمانہ ہے، اور عموماً فیصد میں ظاہر کی جاتی ہے۔ لہذا اس کو مختلف اکائیوں میں ظاہر شدہ مشاہدات کے دو سٹوں یا اگر اکائیاں یکساں ہوں تو اوسط قدروں میں وسیع تغیرات کے حامل سٹوں (sets) کے درمیان تغیر پذیری یا انتشار کے تقابل کے لیے سہولت بخش طریقہ سے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ لہذا اس کو دو یا دو سے زیادہ مشاہدات کے سٹوں کی قطعی پیمائش میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔

اس نکتہ کو سمجھنے کے لیے ایک مثال پر غور کیا جاسکتا ہے۔ فرض کیا جاے کہ دہلی اور ممبئی کا درمیانی فاصلہ 1540 کیلومیٹر ناپتے وقت ایک کیلومیٹر یا 1,00,000 سمر کا حقیقی فاصلہ سے انحراف کوئی خاص اہمیت نہیں رکھتا اس کے برخلاف ایک میٹر کپڑے کو ناپتے وقت 10 سمر کا انحراف بہت زیادہ اہم ہے۔ اس امر کا انکشاف اس صورت میں ہوسکتا ہے کہ پہلی صورت کے 1,00,000 سمر کا تقابل دوسری صورت کے 10 سمر سے کیا جاے کیونکہ پہلی صورت کے 1,00,000 سمر دوسری صورت کے 10 سمر سے بہت زیادہ ہیں۔ اس سے ایک شخص یہ نتیجہ اخذ کرنے پر مائل ہوسکتا ہے کہ پہلی صورت میں انحراف بہت زیادہ ہے۔ اگر اس صورت میں اقدار ضربی یعنی Coefficients معلوم کریں تو صحیح صورت حال سامنے آجاتی ہے۔ پہلی صورت میں قدر ضربی صرف $\frac{1}{1540} \times 100 = 0.065\%$ اور دوسری صورت میں $\frac{10}{100} \times 100 = 1\%$ ہے۔ لہذا دوسری صورت کا انحراف بڑا ہے۔ چنانچہ جب بھی تغیر کا تقابل کرنا ہو تو صرف تغیر کی قدر ضربی کی صورت میں کیا جانا چاہیے۔

تمثیل 9

ایک فٹبال کے سیزن میں ٹیم A کے اسکور شدہ گولس (goals) کا ریکارڈ مندرجہ ذیل ہے۔

کسی میاچ میں اسکور شدہ گولس کی تعداد	:	0	1	2	3	4
میاچوں کی تعداد	:	1	9	7	5	3

ٹیم B کے لیے، فی میاچ اسکور شدہ گولس (goals) کی اوسط تعداد 2.5 تھی اور معیاری انحراف 1.25 گول تھا۔ معلوم کیجیے کہ کونسی ٹیم زیادہ مستحکم ہے۔

حل: فٹبال ٹیم A کے لیے حسابی اوسط اور معیاری انحراف کی تحسیب

گولس کی تعداد	میاچوں کی تعداد (f)	انحراف (d)	fd	fd^2
0	1	-2	-2	4
1	9	-1	-9	9
2	7	0	0	0
3	5	1	5	5
4	3	2	6	12
	n=25		$\Sigma fd = 0$	$\Sigma fd^2 = 30$

ٹیم A کا حسابی اوسط $= A + \frac{\Sigma fd}{n}$

$= 2 + \frac{0}{25} = 2$

ٹیم A کا معیاری انحراف $=$ S.D. of team A : $= \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{30}{25} - \left(\frac{0}{25}\right)^2}$

$= \sqrt{1.2 - 0}$

$= \sqrt{1.2}$

$= 11$

ٹیم A کے تغیر کی قدر ضربی Coefficient of Variation of Team A

$= \frac{S.D.}{A.M.} \times 100$

$= \frac{1.1}{2} \times 100 = 55\%$

ٹیم B کے تغیر کی قدر ضربی Coefficient of Variation of Team B

$= \frac{S.D.}{A.M.} \times 100$

$= \frac{1.25}{2.5} \times 100$

$= 50\%$

چونکہ ٹیم B کے تغیر کی قدر ضربی، ٹیم A کے تغیر کی قدر ضربی سے کم ہے، لہذا ٹیم B کو بہ نسبت ٹیم A کے زیادہ مستحکم مانا جائے گا۔

تمثیل 10

مندرجہ ذیل مواد سے یہ معلوم کیجیے کہ کون سا سلسلہ زیادہ متغیر ہے:۔

متغیرہ	سلسلہ A	سلسلہ B
10 - 20	10	18
20 - 30	18	22
30 - 40	32	40
40 - 50	40	32
50 - 60	22	18
60 - 70	18	10

حل

سلسلہ A کے حسابی اوسط اور معیاری انحراف کی تحسیب

جماعتی وقفہ (متغیرہ)	درمیانی قدر	تعدد (f_1)	اختصاری انحراف (d_1)	f_1d_1	$f_1d_1^2$
10 - 20	15	10	-2	-20	40
20 - 30	25	18	-1	-18	18
30 - 40	35	32	0	0	0
40 - 50	45	40	1	40	40
50 - 60	55	22	2	44	88
60 - 70	65	18	3	54	162
		140		100	348

یہاں پر A_1 ، 35 ہے اور C_1 10 ہے۔

$$\bar{X}_1 = A_1 + \frac{\Sigma f_1 d_1}{n_1} \times C_1$$

$$= 35 + \frac{100}{140} \times 10$$

$$= 35 + 7.143 = \mathbf{42.1} \text{ تقریباً}$$

$$\sigma_1 = C_1 \times \sqrt{\frac{\Sigma f_1 d_1^2}{n_1} - \left(\frac{\Sigma f_1 d_1}{n_1}\right)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{\frac{348}{140} - \left(\frac{100}{140}\right)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{2.486 - 0.510}$$

$$= 1.406 \times 10 = 14.06$$

$$\text{C.V. (Series A)} = \frac{\sigma_1}{\bar{X}_1} \times 100$$

$$= \frac{14.06}{42.1} \times 100 = 33.3\%$$

سلسلہ B کے حسابی اوسط اور معیاری انحراف کی تحسیب

جماعتی وقفہ (متغیرہ)	درمیانی قدر	تعدد (f_2)	اختصاری انحراف (d_2)	f_2d_2	$f_2d_2^2$
10 - 20	15	18	-2	-36	72
20 - 30	25	22	-1	-22	22
30 - 40	35	40	0	0	0
40 - 50	45	32	1	32	32
50 - 60	55	18	2	36	72
60 - 70	65	10	3	30	90
جملہ		140		40	288

یہاں پر $A_2 = 35$ اور $C_2 = 10$ ہیں۔

$$\bar{X}_2 = A_2 + \frac{\Sigma f_2 d_2}{n_2} \times C_2$$
$$= 35 + \frac{40}{140} \times 10$$
$$= 35 + 2.85 \qquad = 37.85$$

$$\sigma_2 = C_2 \times \sqrt{\frac{\Sigma f_2 d_2^2}{n_2} - \left(\frac{\Sigma f_2 d_2}{n_2}\right)^2}$$
$$= 10 \times \sqrt{\frac{288}{140} - \left(\frac{40}{140}\right)^2}$$
$$= 10 \times \sqrt{2.057 - 0.0784}$$
$$= 10 \times \sqrt{1.9786}$$
$$= 1.406 \times 10$$
$$= 14.06$$

سلسلہ B کے لیے $C.V. = \frac{\sigma_2}{X_2} \times 100$

$$= \frac{14.06}{37.85} \times 100$$
$$= 37.1\%$$

چونکہ سلسلہ B کے تغیر کی قدر ضربی، سلسلہ A کے تغیر کی قدر ضربی سے اونچی ہے، سلسلہ B زیادہ تغیر پذیر ہے۔ اس تمثیل میں آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ معیاری انحراف دونوں سلسلوں میں مساوی ہے یعنی 14.06۔ اس حقیقت سے ہم یہ نتیجہ اخذ نہیں کر سکتے کہ دونوں سلسلوں کا تغیر مساوی ہے۔ حسابی اوسط کے اختلاف کو صحیح تاویل کے لیے استعمال کیا جانا چاہیئے۔

15.4 چند تمثیلات Some Illustrations

تمثیل 11

کسی ریاستی حکومت نے فیصلہ کیا کہ ساٹھ سال سے زیادہ عمر کے لوگوں کو وظیفہ پیرانہ سالی دیا جائے۔ وظیفے کے اسکیلس (scales) مندرجہ ذیل مقرر کیے گئے۔

گروہ بلحاظ عمر	وظیفہ فی ماہ (روپے)
60 - 65	250
65 - 70	300
70 - 75	350
75 - 80	400
80 - 85	450

25 اشخاص کی عمریں جنہیں وظیفہ حقوق حاصل تھے ذیل میں دی گئی ہیں۔

74 62 84 72 83 72 81 64 71 63 61 60 61 67 74
64 79 73 75 76 69 78 66 67 68

اس مواد سے ادا شدنی اوسط ماہانہ وظیفہ اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

حل

مواد کی جماعت بندی

گروہ بلحاظ عمر	شمار سلاخیں	تعداد
60 - 65	||| ||||	7
65 - 70	||||	5
70 - 75	|||| ||||	6
75 - 80	||||	4
80 - 85	|||	3
		25

ادا شدنی ماہانہ اوسط وظیفہ اور معیاری انحراف کی تحسیب

وظیفہ کا اسکیل (روپے)	$d'=\left(\frac{X-350}{50}\right)$	f	fd'	fd'^2
250	-2	7	-14	28
300	-1	5	-5	5
350	0	6	0	0
400	1	4	4	4
450	2	3	6	12
		25	-9	49

یہاں پر: $A = 350,\ C = 50,\ \Sigma f = n = 25,\ \Sigma fd' = -9$ and $\Sigma fd^2 = 49$

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times C$$

$$= 350 - \frac{9}{25} \times 25 = 332$$

$$\sigma = C \times \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2}$$

$$= 50 \times \sqrt{\frac{49}{25} - \left(\frac{-9}{25}\right)^2}$$

$$= 1.353 \times 50$$

$$= 67.65$$

لہذا ماہانہ اوسط وظیفہ ہے 332 روپے اور معیاری انحراف ہے 67.65 روپے۔

کبھی کبھی ایسا بھی ہوتا ہے کہ حسابی اوسط اور معیاری انحراف محسوب کرتے وقت ہم لاشعوری طور پر غلط مشاہدات کی نقل کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر مشاہدہ 25 کو 52 درج کیا جاسکتا ہے۔ حسابی اوسط اور معیاری انحراف کی غیر صحیح اقدار کی تصحیح کا ایک آسان طریقہ ہے۔ صحیح حسابی اوسط حاصل کرنے کے لیے ہم اصلی (original) Σx سے غلط مشاہدات کو منہا کر کے، اس کو صحیح مشاہدات میں جمع کر کے صحیح Σx حاصل کر سکتے ہیں۔ اسی طرح، صحیح معیاری اوسط معلوم کرنے کے لیے، ہم صحیح Σx^2 کی قدر حاصل کرتے ہیں۔ تمثیل 12 میں اس طریقہ کار کی وضاحت کی گئی ہے۔

تمثیل 12

100 مشاہدات کے ایک سٹ (set) کا اوسط اور معیاری انحراف بالترتیب 40 اور 5 محسوب کیا گیا ہے۔ مشاہدات میں غلطی سے 40 کے بجائے 50 لے لیا گیا ہے۔ صحیح حسابی اوسط اور تفاوت معلوم کیجیے۔

غیر صحیح $\Sigma X = n\bar{X} = 100 \times 40 = 4{,}000$

صحیح $\Sigma X = 4{,}000 - 50 + 40 = 3{,}990$

صحیح حسابی اوسط $= \frac{3{,}990}{100} = 39.90$

اب تفاوت $= \frac{\Sigma X^2}{n} - \bar{X}^2$

چونکہ معیاری انحراف (σ) 5 ہے، تفاوت $25 = 5^2 = (\sigma^2)$

دی گئی قدروں کو درج کرنے سے

$$25 = \frac{\Sigma X^2}{100} - (40)^2$$

$$25 = \frac{\Sigma X^2}{100} - 1{,}600$$

$$25 = \frac{\Sigma X^2 - 160{,}000}{100}$$

$$2500 = \Sigma X^2 - 160{,}000$$

$$\Sigma X^2 = 160{,}000 + 2{,}500$$

یہ اصل ΣX^2 کی قدر ہے $= 162{,}500$

$$\text{Correct } \Sigma X^2 = 162{,}500 - (50)^2 + (40)^2$$

$$= 162{,}500 - 2{,}500 + 1{,}600$$

$$= 161{,}600$$

صحیح تفاوت $$\text{Correct Variance} = \frac{\text{Correct } \Sigma X^2}{n} - (\text{Correct } \bar{X})^2$$

$$= \frac{161600}{100} - (39.9)^2$$

$$= 1616 - 1592.01$$

$$= 23.99$$

لہذا صحیح حسابی اوسط (Correct Mean) 39.9 اور صحیح تفاوت (Correct Variance) 23.99 ہے۔

مخلوط معیاری انحراف: جس طرح ہم دو یا دو سے زائد گروہوں کا مخلوط حسابی اوسط معلوم کر سکتے ہیں، اسی طرح دو یا دو سے زائد گروہوں کا مخلوط معیاری انحراف بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ دو گروہوں کے مخلوط معیاری انحراف کو σ_{12} سے تعبیر کیا جاتا ہے اور اس کو مندرجہ ذیل طریقے سے محسوب کیا جا سکتا ہے:

$$\sigma_{12}^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n+n_2} + \frac{n_1d_1^2 + n_2d_2^2}{n_1+n_2} \quad \text{or} \quad \frac{n_1\left(\sigma_1^2 + d_1^2\right) + n_2\left(\sigma_2^2 + d_2^2\right)}{n_1+n_2}$$

جہاں پر

σ_{12} = مخلوط معیاری انحراف

σ_1 = پہلے گروہ کا معیاری انحراف

σ_2 = دوسرے گروہ کا معیاری انحراف

$\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_{12}\right) = d_1$

$\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_{12}\right) = d_2$

$\bar{X}_1$ = پہلے گروہ کا حسابی اوسط

$\bar{X}_2$ = دوسرے گروہ کا حسابی اوسط

$\bar{X}_{12}$ = مخلوط حسابی اوسط

معیاری انحراف معلوم کرنے کے لیے تین یا تین سے زیادہ گروہوں پر بھی مندرجہ بالا فارمولے کا اطلاق کیا جا سکتا ہے۔

تمثیل 13

50 مرد مزدوروں کے لیے، ان کی یومیہ اجرت کا حسابی اوسط اور معیاری انحراف بالترتیب 72 روپے اور 9 روپے ہے۔ 40 عورت مزدوروں کے لیے یہ بالترتیب 54 روپے اور 6 روپے ہے۔ 50 مزدوروں کے لیے مخلوط معیاری اوسط معلوم کیجیے۔

حل

اس مواد میں

$n_1 = 50$ اور $n_2 = 40$

$\bar{X}_1 = 72$ ، $\bar{X}_2 = 54$

$\sigma_1 = 9$ اور $\sigma_2 = 6$

لہذا 90 کے گروپ کے لیے مخلوط حسابی اوسط $\left(\bar{X}_{12}\right) = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1+n_2}$

$$= \frac{50\times72 + 40\times54}{90}$$

$$= \frac{3,600 + 2,160}{90}$$

$$= 64$$

90 کے گروپ کے لیے مخلوط انحراف $\sigma_{12} = \frac{n_1\left(\sigma_1^{\,2} + d_1^{\,2}\right) + n_2\left(\sigma_2^{\,2} + d_2^{\,2}\right)}{n_1+n_2}$

اب $d_1 = 64 - 72 = -8$ اور $d_2 = 54 - 72 = -18$

$$\sigma_{12}^2 = \frac{50(81+64)+40(36+324)}{90}$$
$$= \frac{7,250+14,400}{90}$$
$$= \frac{21650}{90}$$
$$= 240.56$$
$$\therefore \sigma_{12} = \sqrt{240.56}$$
$$= 15.51$$

آپ نوٹ کریں کہ دو گروپوں کے مخلوط حسابی اوسط کی قدر دونوں انفرادی اوسطوں کی قدروں کے مابین ہوتی ہے لیکن مخلوط معیاری انحراف کی قدر دونوں انفرادی معیاری انحراف کی قدروں میں اعظم ترین قدر سے بھی زیادہ ہوتی ہے۔ مخلوط اوسط ہمیشہ دیے گیے اوسط کے مابین واقع ہوتا ہے لیکن مخلوط معیاری انحراف دیے گیے معیاری انحرافات کی حدود سے باہر واقع ہوسکتا ہے۔ درحقیقت دیئے ہوئے اوسطوں کی قدروں میں جتنا زیادہ فرق ہوگا مخلوط معیاری انحراف کی قدر دیئے ہوئے معیاری انحرافات کی اعظم ترین قدر سے اتنا ہی زیادہ ہوگی۔ ہاں البتہ تمام گروپوں کے حسابی اوسط مساوی ہوں تو مخلوط معیاری انحراف کی قدر، دیے ہوئے انفرادی معیاری انحرافات کے درمیان واقع ہوگی۔

تمثیل 14

سابقہ تمثیل 7 میں دیے گئے مواد کے لیے حسابی اوسط سے، اوسط انحراف معلوم کیجیے اور بتائیے کہ اوسط انحراف، معیاری انحراف سے کم ہے۔

حل

اوسط انحراف کی تحسیب

جماعتی وقفہ	تعداد (f)	وسطی نقاط (m)	$m - \bar{X}$	$f(m-\bar{X})$ $f(m-45)$
10 - 20	4	15	-30	120
20 - 30	8	25	-20	160
30 - 40	8	35	-10	80
40 - 50	16	45	0	0
50 - 60	12	55	10	120
60 - 70	6	65	20	120
70 - 80	4	75	30	120
Total	58			720

تمثیل 7 میں $\bar{X} = 45$ اور $\sigma = 15.97$ ہے

حسابی اوسط سے اوسط انحراف $\bar{X} = \frac{\Sigma f|m-\bar{X}|}{n}$

$$= \frac{720}{58}$$
$$= 12.41$$

حسابی اوسط سے اوسط انحراف، معیاری انحراف سے کم ہے۔ یاد رکھیے کہ مواد چاہے کچھ بھی ہو حسابی اوسط سے اوسط انحراف ہمیشہ معیاری انحراف ہوتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ B

(1) تحریر کیجیے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) معیاری انحراف ان نقائص سے پاک ہوتا ہے جو دوسرے پیمانوں میں موجود ہوتے ہیں۔

(ii) تفاوت (Variance) اور تغیر کی قدر ضربی (Coefficient of Variation) دونوں ایک ہیں۔

(iii) حسابی اوسط سے لیے گیے انحراف کا جذر المربع اقل ترین ہوتا ہے۔

(iv) ہر ایک مد میں سے 5 کم کر دیئے جائیں تو، معیاری انحراف بھی 5 سے کم ہو جاتا ہے۔

(v) طبعی مواد (Ordinary data) میں معیاری انحراف، چوتھائیہ انحراف سے کم ہوتا ہے۔

(2) خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

(i) اوسط انحراف، معیاری انحراف کی بہ نسبت ..... ہے۔

(ii) $\bar{X} \pm \sigma$ مواد کے ..... فی صد مدوں کو شامل کرتا ہے۔

(iii) کسی سلسلہ میں تغیر کی قدر ضربی 64 ہے اور حسابی اوسط 10 ہے تو معیاری انحراف ہوگا .....۔

(iv) تفاوت ہمیشہ ..... منفی ہوتا ہے۔

(v) اگر 10 قدروں پر مشتمل سٹ میں ہر ایک کی قدر 5 ہو تو معیاری انحراف ..... ہوگا۔

(3) صحیح جواب پر نشان لگایئے۔

(a) سلسلہ کے ہر مد پر مبنی پیمانہ:

(i) رینج (range)

(ii) معیاری انحراف

(iii) چوتھائیہ انحراف

(iv) ان میں سے سب

(b) کھلے کنارے کی تقسیم میں بہت زیادہ کارآمد انتشار کا پیمانہ:

(i) رینج (range)

(ii) اوسط انحراف

(iii) معیاری انحراف

(iv) چوتھائیہ انحراف

(c) معیاری انحراف ہمیشہ اس سے محسوب کیا جاتا ہے:

(i) حسابی اوسط

(ii) کثیریہ

(iii) وسطانیہ

(iv) ہندسی اوسط

(d) مندرجہ ذیل پیمانوں میں سے کونسا پیمانہ انتہائی موادوں سے کم سے کم متاثر ہوتا ہے:

(i) چوتھائیہ انحراف

(ii) رینج

(iii) معیاری انحراف

(iv) اوسط انحراف

(e) اوسط انحراف:

(i) S.D. (معیاری انحراف) سے کم ہوتا ہے

(ii) S.D. سے زیادہ ہوتا ہے

(iii) S.D. سے متعلق نہیں ہوتا ہے

(iv) S.D. کے مساوی ہوتا ہے۔

(f) تغیر کی قدر ضربی ذیل سے حاصل ہوتی ہے:

(i) $\frac{\sigma}{\bar{X}}$

(ii) $\frac{\bar{X}}{\sigma}$

(iii) $\frac{\bar{X}}{\sigma} \times 100$

(iv) $\frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$

15.5 لورنز منحنی Lorenz Curve

لورنز منحنی ایک مشہور ماہر معاشیات ڈاکٹر میکس او لورنز (Dr. Max O Lorenz) کی اختراع ہے۔ یہ انتشار کے مطالعہ کا ترسیمی طریقہ ہے۔ یہ منحنی جس کو لورنز نے ابتداء میں دولت اور آمدنی کی تقسیم کی پیمائش میں استعمال کیا تھا، اب منافع، اجرتوں اور کل فروخت (Turn over) کی تقسیم کے مطالعہ میں بھی استعمال کی جارہی ہے۔

لورنز منحنی کی تشکیل مندرجہ ذیل مراحل پر مشتمل ہے۔

(i) مختلف گروہوں سے مدوں کی کل قدروں کو حاصل کیا جاتا ہے۔

(ii) مختلف گروہوں سے متعلقہ مدوں کی جملہ قدروں اور تعدادوں کو "سے کم" قسم میں جمع کیا جاتا ہے اور فیصدوں میں تبدیل کیا جاتا ہے۔

(iii) محور X پر 100 سے پیمانے کو شروع کریں اور 0 تک جائیں اور اس کو مجموعی تعدادوں کے فیصدوں کے لیے استعمال کریں (X)۔

(iv) محور Y پر پیمانے کو 0 سے شروع کریں اور 100 تک جائیں، اور مدات کی جملہ قدروں کے فیصدوں کو مرتسم کریں (Y)۔

(v) ایک وتری خط (diagonal line) کے ذریعہ محور X پر 0 صفر کو، محور Y- پر 100 سے جوڑ لیں۔ اس کو مساوی تقسیم خط (Line of equal distribution) کہتے ہیں۔ اس وتر پر کوئی بھی نقطہ، X پر وہی فیصد بتاتا ہے جو Y پر ہے۔

(vi) X اور Y سے متعلق مختلف نقطوں کو مرتسم کریں اور انہیں ملادیں۔ اس طرح سے حاصل کردہ خط، ہمیشہ مساوی تقسیم خط سے نیچے ایک منحنی X- شکل میں ہوتا ہے۔ مساوی تقسیم خط اور مرتسم منحنی کا درمیانی رقبہ (area) مدات میں عدم مساوات کی حد کو ظاہر کرتا ہے۔ اگر مختلف تقسیموں کی منحنیوں کو ایک ہی لورنز (منحنی) پر ظاہر کیا جائے تو وہ منحنی جو وتری خط سے دور واقع ہوتی ہے زیادہ عدم مساوات کی نشاندہی کرتی ہے۔

تمثیل 15

50 کاروباری فرمس کے منافع سے متعلق مواد کے لیے لورنز منحنی ترسیم کیجیے اور منافع میں موجود عدم مساوات کی حد کو ظاہر کیجیے۔

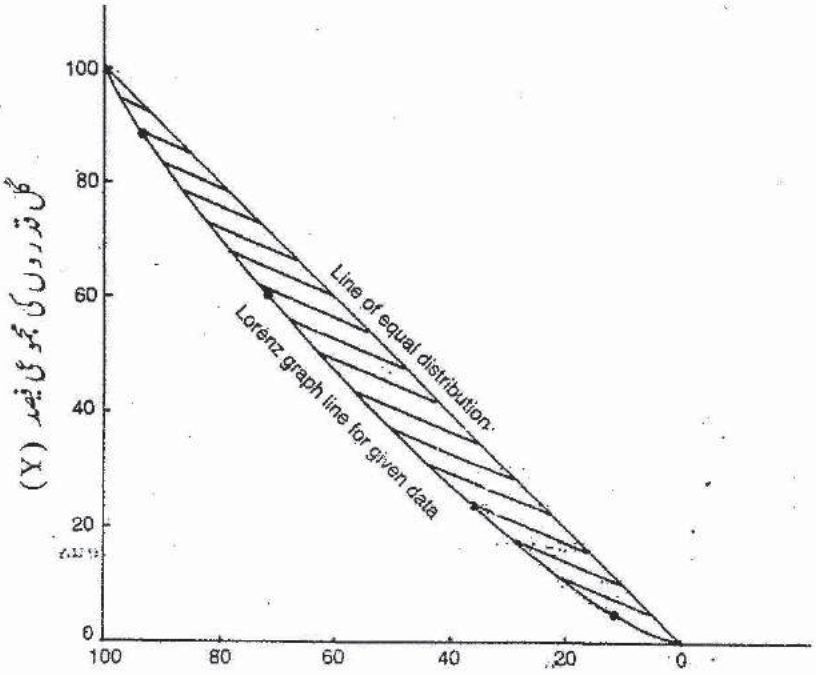
منافع (000' روپے)	:	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
فرمس کی تعداد	:	5	13	18	10	4

حل

لورنز منحنی کے لیے تحسیبات

منافع (000' روپیوں میں)	نقطہ درمیانی f	تعدد فرمس کی تعداد (f)	مجموعی تعدد	٪ مجموعی تعدد (x)	کل قدر (mxf)	مجموعی کل قدریں	٪ مجموعی کل قدریں (y)
10 - 20	15	5	5	10	75	75	4.4
20 - 30	25	13	18	36	325	400	23.5
30 - 40	35	18	36	72	630	1,030	60.6
40 - 50	45	10	46	92	450	1,480	87.1
50 - 60	55	4	50	100	220	1,700	100.0

اب آپ سابق میں تشریح کیے گیے مراحل کو یکے بعد دیگرے روبہ عمل لائیے اور محور x پر فیصد مجموعی تعدد (x) اور محور y پر فیصد کُل قدریں (Y) لے کر لورنز منحنی ترسیم کیجیے۔ شکل 15.1 کو دیکھیے اور مطالعہ کیجیے کہ کیسے اس کو ترسیم کیا جاتا ہے۔



شکل 15.1

تعدد کا مجموعی فیصد (x)

50 کاروباری فرمس کے لیے نفع کی تقسیم میں عدم مساوات ظاہر کرنے والی لورنز منحنی

تشریح: پہلے نقاط X محور 10 اور Y محور پر 4.4 یہ ظاہر کرتے ہیں کہ 10% مدوں کی جملہ مالیت 4.4% ہے اسی طرح سے نقاط X 36 محور پر اور Y 23.5 محور پر یہ ظاہر کرتے ہیں کہ 36% مدات جملہ قدروں کے 23.5% حصہ کے حامل ہیں۔ دوسرے اعداد کے لیے بھی اسی طرح آپ تعبیر کر سکتے ہیں چنانچہ نقاط X = 0 اور Y = 0 بھی لورنز منحنی پر موجود رہتے ہیں۔ جب کوئی مد نہ لیا جائے تو اس صورت میں کوئی جملہ قدر بھی نہ ہوگی۔ اسی لیے نقطہ X = 0 اور Y = 0 لورنز منحنی پر موجود رہتا ہے۔ X اور Y کی محسوب کردہ قدروں کے ساتھ ساتھ نقطہ (0, 0) کو بھی مرتسم کیا جاتا ہے اور اس طرح مختلف نقاط کو جوڑا جاتا ہے۔

جیسا کہ پہلے بیان کیا گیا ہے کہ (100, 100) تا (0, 0) کو جوڑنے والا خط مساوی تقسیم کا خط کہلاتا ہے۔ ایسا کیوں ہے؟ یہ خط نقاط (0, 0) , (20, 20) , (70, 70) وغیرہ کی نمائندگی کرتا ہے۔

ان نقاط کا مطلب یہ ہے کہ مدوں کا فیصد وہی ہے جو کہ جملہ قدروں کا فیصد ہے یا جملہ قدروں میں اضافہ اسی تناسب میں ہوتا ہے جس تناسب میں قدروں میں اضافہ ہوتا ہے۔ یہ اسی صورت میں ممکن ہے جب کہ تمام مدوں کی قدریں یکساں ہوں۔ اسی وجہ سے یہ خط مساوی تقسیم کا خط کہلاتا ہے۔

دونوں محور (X محور اور Y محور) مشترکہ طور پر اعظم ترین عدم مساوات کے لیے لورنز منحنی ترسیم کو ظاہر کرتے ہیں۔ اعظم ترین عدم مساوات کا مطلب ہے سوائے آخری مد کے تمام مدوں کی قدر صفر ہے۔ کل مالیت (ڈاکٹر لورنز کے لیے گیے مواد میں دولت) آخری مد میں مرکوز ہوتی ہے۔ چنانچہ اقل ترین عدم مساوات کی ترسیم کے لیے ہم کو نقاط اس طور پر لینے پڑتے ہیں:۔ 0% مد 0% قدر کے ساتھ، 20% مدات 0% قدر کے ساتھ 80% مدات 0% قدر کے ساتھ، 99% مدات 0% قدر کے ساتھ وغیرہ اور اس طرح آخری حد 100% مدات، 100% قدر کے ساتھ لیا جاتا ہے۔ تمام نقاط دو محوروں کو وجود میں لاتے ہیں اور یہ دونوں محور مشترکہ طور پر اعظم ترین عدم مساوات کی لورنز ترسیم کی تشکیل کرتے ہیں۔ کسی بھی دیے گیے مواد کی ترسیم کا میلان مساوی تقسیم کے خط سے پرے دونوں محوروں کی جانب رہتا ہے۔ چنانچہ مساوی تقسیم کے خط اور دیے ہوئے مواد کے مابین رقبہ (area) (شکل میں جس کو گہرے سیاہ سایہ (shades) سے ظاہر کیا گیا ہے) مواد میں موجود عدم مساوات کی حد کو ظاہر کرتا ہے۔

تمثیل 16

پانچ مزدوروں کے دو سٹوں (sets) کے لیے جن میں سے ہر ایک کی ہفتہ وار آمدنی کے اعداد ذیل میں دیے گئے ہیں، لورنز ترسیم کھینچیے اور بتایئے کہ کون سے سٹ کی آمدنی میں عدم مساوات زیادہ ہے :

گروہ A کی آمدنی (روپے)	:	98	99	103	104	96
گروہ B کی آمدنی (روپے)	:	430	620	580	270	100

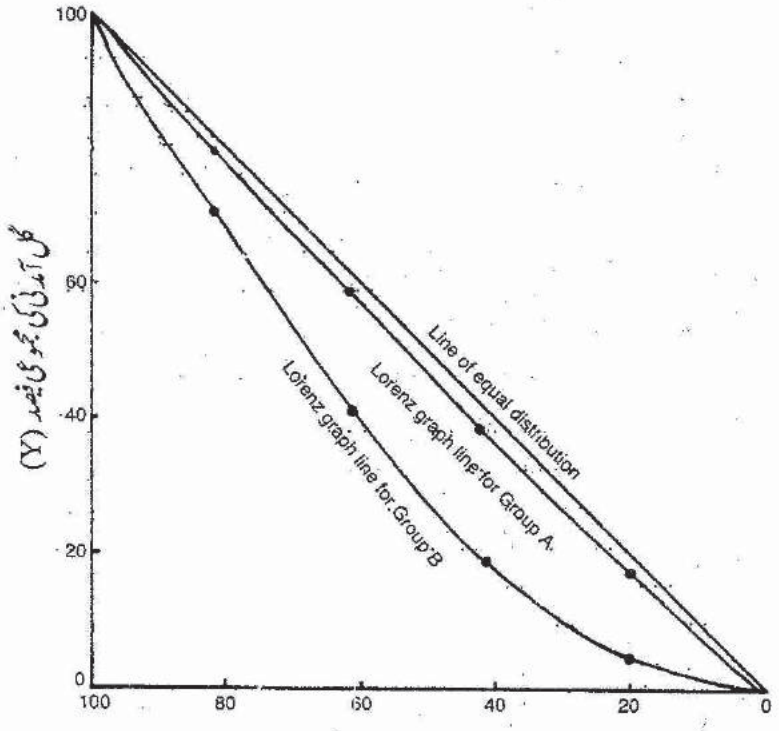
حل

اس صورت میں تعددات نہیں دیے گئے ہیں۔ درحقیقت ہر آمدنی کا عدد ایک مزدور کی آمدنی کو پیش کرتا ہے لہذا مختلف آمدنی کے اعداد کے لیے تعددات دونوں گروہوں میں فی گروہ ایک ہے۔ مواد کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں مرتب کر کے دونوں سٹوں (sets) کے لیے تحسیب حسب ذیل ہے۔

لورنز منحنی کے لیے تحسیبات

گروہ A		گروہ B				دونوں سٹوں کے لیے		
آمدنی (روپے)	مجموعی آمدنی	٪ مجموعی آمدنی (YA)	آمدنی (روپے)	مجموعی آمدنی	٪ مجموعی آمدنی (YB)	تعدد	مجموعی تعدد	٪ مجموعی تعدد (X)
96	96	19.2	100	100	5.0	1	1	20
98	194	38.8	270	370	18.5	1	2	40
99	293	58.6	430	800	40.0	1	3	60
103	396	79.2	580	1,380	69.0	1	4	80
104	500	100.0	620	2,000	100.0	1	5	100

اب، پہلے سمجھائے گئے مرحلوں کو روبہ عمل لائیے، اور دونوں گروہوں کے لیے لورنز منحنی کھینچیے۔ شکل 15.2 کو دیکھیے کہ کس طرح وہ شکل کھینچی گئی ہے۔ شکل 15.2 ظاہر کرتی ہے کہ، گروہ B خط، مساوی تقسیم کے خط سے بہت فاصلے پر ہے۔ گروہ A میں مزدوروں سے متعلق خط کے ساتھ تقابل کرنے پر یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ گروہ B میں مزدوروں کی آمدنیوں میں عدم مساوات زیادہ ہے۔



شکل 15.2 مزدوروں کے دو گروہوں کے درمیان آمدنی کی عدم مساوات کو ظاہر کرنے والی لورنز منحنی

15.6 انتشار کے پیمانوں کا تقابل
Comparison of Measures of Dispersion

اس اکائی اور سابق اکائی میں، مختلف انتشار کے پیمانے جیسے رینج، چوتھائیہ انحراف، اوسط انحراف اور معیاری انحراف کے معنی، تحسیب، خوبیوں اور خامیوں پر بحث کی گئی ہے لیکن ایک دی گئی صورتحال میں، آپ کو ایک موزوں انتشار کے پیمانے کو منتخب کرنے کے قابل ہونا چاہیئے۔ صحیح انتخاب میں مدد کرنے کے لیے، یہ ضروری ہے کہ آپ ان پیمانوں کی اضافی خصوصیات سے واقف ہوں۔ لہذا اب ان پیمانوں کا باہم تقابل کیا جائے گا تا کہ ہم ان پیمانوں کی اضافی خوبیوں اور خامیوں کو جان سکیں۔

(1) قسم (Type) : رینج اور چوتھائیہ انحراف' انتشار کے وہ پیمانے ہیں جو مواد کے پھیلاؤ کو پیش کرتے ہیں جب کہ اوسط انحراف اور معیاری انحراف وہ پیمانے ہیں جو کسی مرکزی رجحان کے پیمانے سے، مدات کے اوسط انحراف کو پیش کرتے ہیں۔

(2) تحسیب (Calculation) : رینج کسی سلسلے کی بالائی انتہا اور زیریں انتہا کا درمیانی فرق ہے۔ چوتھائیہ انحراف، بالائی چوتھائیہ اور زیریں چوتھائیہ کی قدروں کا درمیانی نصف فرق ہے۔ معیاری انحراف، حسابی اوسط سے لیے گیے تمام انحرافات کے مربعوں کے حسابی اوسط کا جذر المربع ہے۔

(3) نتیجہ (Result): رینج کا سمجھنا سہل ہے۔ چوتھائیہ انحراف، اوسط انحراف اور معیاری انحراف اس قدر آسان نہیں ہوتے۔ چوتھائیہ انحراف اور اوسط انحراف ایک حد تک آسان اور قابل فہم ہیں لیکن معیاری انحراف نسبتاً پیچیدہ ہے۔

(4) مدات (Items): رینج اور چوتھائیہ انحراف کو محسوب کرنے میں سلسلہ کے تمام مدات کو استعمال نہیں کیا جاتا ہے۔ اوسط اور معیاری انحراف کو محسوب کرنے میں سلسلہ کے تمام مدات کو زیر غور رکھا جاتا ہے۔

(5) عمل (Treatment): رینج، چوتھائیہ انحراف اور اوسط انحرافات ریاضیاتی عمل کے لیے موزوں نہیں ہوتے۔ معیاری انحراف ریاضیاتی عمل کے لیے موزوں ہوتا ہے۔

(6) انتہائی قدریں (Extreme values): چوتھائیہ انحراف، کسی سلسلے میں مدات کی انتہائی اور غیر معمولی قدروں سے متاثر نہیں ہوتا۔ اوسط انحراف اور معیاری انحراف میں اوسط انحراف انتہائی قدروں سے بہت کم متاثر ہوتا ہے۔ رینج صرف انتہائی مدات پر منحصر ہوتا ہے۔

(7) کھلے کناروں کی جماعت (Open-end class): کھلے کناروں کے جماعتی وقفوں کے ساتھ تعدادی وقفوں کی صورت میں، رینج، اوسط انحراف اور معیاری انحراف کو محسوب نہیں کیا جاسکتا۔ ایسی تقسیم کے لیے چوتھائیہ محسوب کیا جاسکتا ہے۔

(8) اعتباریت (Reliability): معیاری انحراف زیادہ قابل اعتبار اور قابل بھروسہ پیمائش سمجھا جاتا ہے۔ رینج، چوتھائیہ انحراف یا اوسط انحراف اتنے قابل اعتبار اور قابل بھروسہ انتشار کے پیمانے نہیں ہوتے۔ درحقیقت معیاری انحراف نمونہ بندی خطاؤں سے کم سے کم متاثر ہوتا ہے۔

(9) استعمال (Use): معیاری انحراف انتشار کا بہترین پیمانہ سمجھا جاتا ہے۔ اس میں ایک اچھے اور قابل اعتبار انتشار کے پیمانے کی سب صفات موجود ہیں۔ لہذا اس کو شماریاتی تجزیے اور عمل میں بکثرت استعمال کیا جاتا ہے۔ رینج، چوتھائیہ انحراف اور اوسط انحراف زیادہ مقبول نہیں ہیں معیاری انحراف کا صرف محدود اور موزوں حالات میں استعمال کیا جاتا ہے۔

15.7 خلاصہ Let Us Sum Up

اوسط انحراف معلوم کرتے وقت، انحرافات کی علامات کو نظر انداز کر دیا جاتا ہے۔ اس وجہ سے پیمانہ میں کچھ خامیاں پیدا ہوتی ہیں۔ ان خامیوں کے ازالہ کے لیے ایک نیا پیمانہ جس کو جذر المربع اوسط انحراف کہتے ہیں، استعمال کیا جاتا ہے تاکہ انتشار کی صحیح پیمائش کی جاسکے۔ یہ پیمانہ مرکزی رجحان سے انحرافات کے مربعوں کے حسابی اوسط کا جذر المربع ہے۔ جذر اوسط مربع انحراف حسابی اوسط کی اقل ترین قدر ہے جس کو معیاری انحراف کا نام دیا جاتا ہے۔ معیاری انحراف کو محسوب کرنے کے دو طریقے ہیں: (1) راست طریقہ (Direct method) (2) آسان طریقہ (Short-cut method)۔ آسان طریقہ X میں اختصاری انحراف (Step deviation) استعمال کیا جاتا ہے اس کا فارمولہ ہے معیاری انحراف $= \sigma = C \times \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2}$

معیاری انحراف کی تعریف ٹھوس اور بے لوچ انداز میں کی گئی ہے۔ یہ ریاضیاتی عمل کے لیے موزوں ہے اور نمونہ بندی اتار چڑھاؤ سے متاثر رہتا ہے۔ لیکن اوسط انحراف کی بہ نسبت یہ پیمانہ انتہائی اقدار سے بہت متاثر ہوتا ہے۔ اس کی کچھ ریاضیاتی خاصیتیں بھی ہیں۔ یہ مبدا کی تبدیلی کے تابع نہیں ہوتا لیکن یہ پیمانے کی تبدیلی سے اتنا ہی متاثر ہوتا ہے جتنا کہ مدات ہوتے ہیں۔ اس کی قدر کبھی اوسط انحراف سے کم نہیں ہوتی۔ نارمل قسم کے مواد کے لیے، اوسط انحراف تقریباً معیاری انحراف کا 4/5 گنا ہوتا ہے اور چوتھائیہ انحراف، معیاری انحراف کا تقریباً 2/3 گنا ہوتا ہے۔ $AM \pm SD$ کے رینج میں تقریباً 68% مدات ہوتے ہیں اور $AM \pm 2SD$ میں تقریباً 95% مدات ہوتے ہیں۔

انتشار کا ترسیمی تعین کرنے کے لیے لورنز منحنی استعمال کی جاتی ہے۔ اس کو میکس او لورنز Dr. Max O Lorenz نے اختراع کیا۔ یہ دوہری مجموعی فیصد منحنی ہے۔ محور X پر تعددوں کے مجموعی فیصد لیے جاتے ہیں اور جیسے جیسے ہم دائیں جانب بڑھتے جاتے ہیں اس محور پر لیا گیا پیمانہ 100 سے شروع ہو کر صفر تک جاتا ہے۔ مدات کی کل قدروں کے مجموعی فیصد کو محور Y پر لیا جاتا ہے۔ جیسے جیسے ہم اوپر بڑھتے ہیں اس محور پر لیا گیا پیمانہ صفر سے شروع ہو کر 100 تک جاتا ہے۔ نقاط (0, 0) اور (100, 100) کو جوڑنے والے خط کو مساوی تقسیم خط کہتے ہیں اور دونوں محور مل کر اعظم ترین عدم مساوات کی لورنز منحنی کی تشکیل کرتے ہیں۔ لہذا مساوی تقسیم خط اور کسی مدی ترسیم کے درمیان کا رقبہ، مواد میں موجود عدم مساوات کی حد کو ظاہر کرتا ہے۔

15.8 کلیدی الفاظ اور علامات Key Words and Symbols

تغیر کی قدر ضربی (Coefficient of variation): بطور فیصد ظاہر شدہ حسابی اوسط سے معیاری انحراف کا حاصل تقسیم۔

لورنز منحنی (Lorenz Curve): مدات کی عدم مساوات کی حد کا تعین کرنے کے لیے استعمال شدہ دُہری مجموعی فیصد ترسیم۔

جذر اوسط مربع انحراف (Root Mean Square Deviation): مرکزی رجحان سے مدوں کے انحرافات کے مربعوں کے حسابی اوسط کا جذر المربع۔

معیاری انحراف (Standard Deviation): بلحاظ حسابی اوسط' جذر اوسط مربع انحراف

فہرست علامات

تغیر کی قدر ضربی C.V.

مخلوط معیاری انحراف $\sigma_{12}, \sigma_c, SD_c$

مخلوط حسابی اوسط اور دیے گئے حسابی اوسط کا فرق $\bar{X}_{12} - \bar{X}_1, d_1$ وغیرہ۔

معیاری انحراف S.D., σ, s عام طور پر σ کو آبادی معیاری انحراف اور s سادہ معیاری انحراف کے نمونہ کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

15.9 اپنی معلومات کی جانچ: جوابات Answers to Check Your Progress

(A) 3) 49.1

4) 156.37

5) (i) صحیح (ii) غلط (iii) صحیح (iv) غلط (v) غلط

(B) 1) (i) صحیح (ii) غلط (iii) صحیح (iv) غلط (v) غلط

2) (i) کم (ii) 68 (iii) 6.4 (iv) غیر (v) صفر(0)

3) (a) ii (b) iv (c) i (d) i (e) i (f) iv

15.10 امتحانی سوالات/مشقیں Terminal Questions/Exercises

(1) معیاری انحراف (Standard deviation) کیا ہے؟ دوسرے انتشاری پیمانوں پر اس کو کیا فوقیت حاصل ہے؟

(2) تغیر (Variation) کی قدر کیا ہے؟ تغیر کے پیمانے کے طور پر اس کا کیا رول ہے؟ تفاوت (Variance) سے یہ کس حد تک مختلف ہے؟

(3) انتشار کے مختلف پیمانوں کی تعریف کیجیے اور ان کی اضافی خوبیاں اور خامیاں بیان کیجیے؟

مشقیں

(1) کسی کالج میں بی کام کے طلبہ نے شماریات میں 100 نشانات میں سے مندرجہ ذیل نشانات حاصل کیے ہیں۔ محصلہ نشانات کا معیاری انحراف محسوب کیجیے۔

طلبہ :	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
نشانات :	5	10	20	25	40	42	45	48	70	80

(جواب : 23.06)

(2) مندرجہ ذیل مواد سے معیاری انحراف (Standard Deviation) معلوم کیجیے۔

وسطی نقطے	تعدد
1	2
2	60
3	101
4	152
5	205
6	155
7	79
8	40
9	1

(جواب : 1.57)

(3) 100 کمپنیوں کے نفع سے متعلق مندرجہ ذیل مواد کے لیے معیاری انحراف محسوب کیجیے۔

نفع (لاکھ روپیوں میں)	کمپنیوں کی تعداد
8 - 10	8
10 - 12	12
12 - 14	20
14 - 16	30
16 - 18	20
18 - 20	10

(جواب: $\sigma = 2.77$)

(4) مسترد پیداوار (Production rejects) کے تجزیہ کے نتیجہ میں مندرجہ ذیل اعداد حاصل ہوتے ہیں۔ حسابی اوسط اور معیاری انحراف محسوب کیجیے۔

فی آپریٹر ناکارہ اشیا کی تعداد	آپریٹروں کی تعداد
21 - 25	5
26 - 30	15
31 - 35	28
36 - 40	42
41 - 45	15
46 - 50	12
51 - 55	3

(جواب: $\bar{X} = 36.96$: $\sigma = 6.735$)

(5) 40 اور 50 سائز والے دو نمونوں کا ایک ہی اوسط 53 ہے اور معیاری انحراف بالترتیب 19 اور 8 ہے۔ سائز 90 کے مخلوط نمونے کا معیاری انحراف (Standard Deviation of Combined Sample) معلوم کیجیے۔

(جواب: $\sigma_{12} = 14$)

(6) مندرجہ ذیل مواد سے تغیر کی قدر ضربی (Co-efficient of variation) اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

نشانات	تعداد طلبہ
10 سے کم	12
20 سے کم	30
30 سے کم	65
40 سے کم	107
50 سے کم	202
60 سے کم	222
70 سے کم	230

(جواب: $\sigma = 13.9$ (C.V. = 37.3%))

(7) کسی شہر میں 100 اشخاص کا کیلوواٹ گھنٹوں میں برقی صرفہ مندرجہ ذیل ہے:

برقی صرفہ کیلوواٹ گھنٹے	صارفین کی تعداد
0 لیکن 10 سے کم	6
10 لیکن 20 سے کم	25
20 لیکن 30 سے کم	36
30 لیکن 40 سے کم	20
40 لیکن 50 سے کم	13

محسوب کیجیے: (i) حسابی اوسط (ii) معیاری انحراف اور (iii) وہ رینج (range) جس کے اندر وسطی 50% صارفین شامل ہیں۔

جواب: (i) 25.9 (ii) 10.96 (iii) 17.6 تا 34

(8) کسی قصبہ (town) میں خردہ فروش دُکانوں کے منافع کے متعلق جائزہ منظم کیا گیا جس کے مندرجہ ذیل نتائج برآمد ہوئے۔

منافع (+) نقصان (-) (000' روپیوں میں)	دوکانوں کی تعداد
- 4 to - 3	4
- 3 to - 2	10
-2 to -1	22
- 1 to 0	28
0 to 1	38
1 to 2	56
2 to 3	40
3 to 4	24
4 to 5	18
5 to 6	10

محسوب کیجیے: (i) ایک خردہ فروش دُکان کا اوسط منافع (ii) تمام دُکانوں کا جملہ منافع اور (iii) آمدنی کے تغیرات کی قدر ضربی

(جواب: (i) 1348 (ii) 3,37,000 (iii) 152.8%)

(9) ایک فیکٹری دو قسم کے برقی بلب A اور B تیار کرتی ہے۔ ان کی مدتِ کارکردگی سے متعلق کسی تجربے میں مندرجہ ذیل نتائج حاصل کیے گئے۔

زندگی (گھنٹوں میں)	برقی بلب کی تعداد A	برقی بلب کی تعداد B
500 - 700	5	4
700 - 900	11	30
900 - 1100	26	12
1100 - 1300	10	9
1300 - 1500	8	6

تغیر کی قدر ضربی استعمال کر کے دونوں قسم کے بلبس کی تغیر پذیری کا تقابل کیجیے۔

جواب: C.V.(A) = 21.64% C.V.(B) = 23.41%

(10) ایک ہی قسم کی صنعت میں مشغول دو فیکٹریوں A اور B میں، اوسط ہفتہ واری اجرت اور معیاری انحراف (S.D.) مندرجہ ذیل ہیں۔

فیکٹری	اوسط ہفتہ واری اجرت (روپے)	اجرتوں کا معیاری انحراف	مزدوروں کی تعداد
A	460	50	100
B	490	40	80

(i) کونسی فیکٹری ہفتہ واری اجرت کے طور پر زیادہ رقم ادا کرتی ہے؟

(ii) اجرت کی تقسیم میں کون سی فیکٹری زیادہ تغیر پذیری کا اظہار کرتی ہے؟

(iii) ان فیکٹریوں میں بحیثیت مجموعی تمام مزدوروں کا حسابی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہے؟

جواب: (i) فیکٹری A

(ii) C.V.(A) = 10.87% C.V.(B) = 8.16%

(iii) $\bar{X}_{12} = 473.33$ (روپے) $\sigma_{12} = 49.19$

(11) مندرجہ ذیل مواد سے لورنز منحنیوں (Lorenz curves) کی ترسیم کیجیے۔

اجرتیں (روپے) :	700-800	600-700	500-600	400-500	300-400
تعداد مزدوراں					
فیکٹری A :	40	60	40	30	40
فیکٹری B :	100	220	180	200	300

(12) 20 مدوں کا حسابی اوسط اور معیاری انحراف بالترتیب 20 اور 5 پایا گیا لیکن محسوب کرنے میں مد 13 کو بطور 30 غلط پڑھا گیا۔ صحیح حسابی اوسط اور معیاری انحراف معلوم کیجیے۔

(جواب: AM = 19.15 ; $\sigma = 4.66$)

نوٹ : یہ سوالات اور مشقیں اکائی کے بہتر طور پر سمجھنے میں مددگار ہیں۔ ان کے جوابات لکھنے کی کوشش کیجیے لیکن ان کے جواب یونیورسٹی کو مت روانہ کیجیے۔ یہ محض آپ کی مشق کے لیے ہیں۔

اکائی 16 خمیدگی کے پیمانے

UNIT-16 : MEASURES OF SKEWNESS

Structure ساخت

Objectives	مقاصد	16.0
Introduction	تمہید	16.1
Meaning of Skewness	خمیدگی کے معنی	16.2
Positive and Negative Skewness	مثبت اور منفی خمیدگی	16.3
Difference between Dispersion and Skewness	انتشار اور خمیدگی میں فرق	16.4
Tests of Skewness	خمیدگی کی جانچ	16.5
Measures of Skewness	خمیدگی کے پیمانے	16.6
Some Illustrations	چند تمثیلات	16.7
Properties of Normal Curve	طبعی منحنی کی خاصیتیں	16.8
Let Us Sum Up	خلاصہ	16.9
Key Words and Symbols	کلیدی الفاظ اور علامات	16.10
Answers to Check Your Progress	اپنی معلومات کی جانچ: جوابات	16.11
Terminal Questions/Exercises	امتحانی سوالات/مشقیں	16.12

16.0 مقاصد Objectives

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- خمیدگی اور انتشار میں فرق کر سکیں۔
- متشاکل (Symmetrical) مثبت خمیدہ اور منفی خمیدہ مواد میں فرق کر سکیں۔
- خمیدگی کو مختلف طریقوں سے محسوب کر سکیں۔
- دی گئی صورت حال میں فیصلہ کر سکیں کہ تحسیب کا کون سا طریقہ موزوں ہے۔
- مواد کے تجزیہ میں طبعی منحنی (Normal curve) کے کردار کی اہمیت اور اس کی خاصیتوں پر بحث کر سکیں۔

16.1 تمہید Introduction

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی عددی مواد کا تجزیہ کرنے میں تین اہم خصوصیات کو استعمال کیا جاتا ہے: (1) مرکزی رجحان یعنی مواد کی ایسی قدر جس کے اطراف مواد کے دیگر مدات جمع ہوتے ہیں۔ (2) انتشار یعنی مرکزی رجحان سے مدات کس قدر منحرف ہوتے ہیں اور (3) خمیدگی یعنی مرکزی رجحان کے گرد، مدات کی تقسیم کیسی ہے۔ اس اکائی میں آپ تیسری خصوصیت یعنی خمیدگی کے متعلق سیکھیں گے۔

اکائی 10 تا 13 میں آپ نے مرکزی رجحان کے پیمانے یعنی حسابی اوسط، وسطانیہ، کثیریہ، ہندسی، ہارمونی اور متحرک اوسطوں کا مطالعہ کیا۔ اکائی 14 اور 15 میں آپ نے انتشار کے پیمانے جیسے رینج، چوتھائیہ انحراف، اوسط انحراف اور لورنز منحنی کے متعلق معلومات حاصل کیں۔ اس اکائی میں آپ تیسری خصوصیت یعنی خمیدگی کے متعلق معلومات حاصل کریں گے۔ خمیدگی کے معنی، مقصد اور محسوب کرنے کے طریقوں کا مطالعہ کریں گے۔ آپ مواد کے تجزیہ میں طبعی منحنی کے رول اور خاصیتوں کا مطالعہ کریں گے درحقیقت ایک اور خاصیت یہ بھی ہے جس کو حدبیت (Kurtosis) کہتے ہیں جو مواد کے مرکزی حصے میں تعددوں کا ارتکاز ہے لیکن یہ اس نصاب میں شامل نہیں ہے۔

16.2 خمیدگی کے معنی Meaning of Skewness

اگر تعددات مرکزی قدر کے گرد متشاکل طور پر منقسم ہوں تو اس تعددی تقسیم کو متشاکل تقسیم (Symmetrical distribution) کہتے ہیں۔ کوئی تعددی تقسیم اس وقت ''متشاکل'' کہلاتی ہے جب کہ اس کی مرکزی قدر کے اطراف تعددات متشاکل طور پر منقسم ہوں یعنی مرکز سے مساوی فاصلہ پر واقع متغیروں کے (تعدات) مساوی تعداد میں ہوتے ہیں۔ مندرجہ ذیل دو تقسیمات پر غور کیجیے۔

(A) X	:	10	15	20	25	30
f	:	5	8	26	8	5

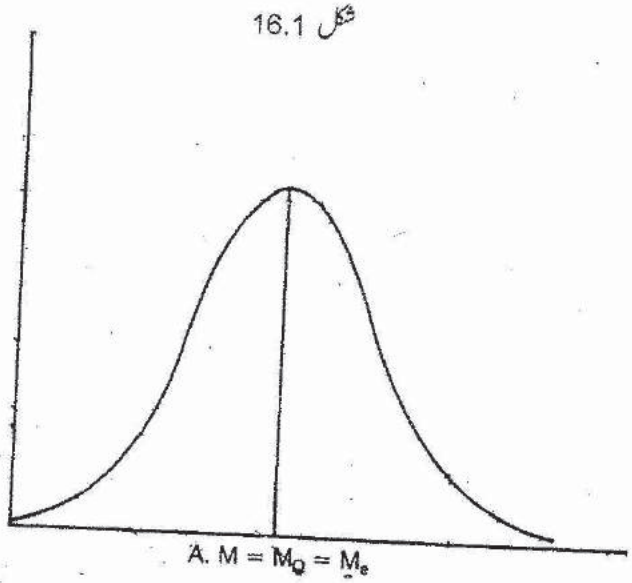
یہاں پر X = 20 گروہ کا وسطی مد ہے

(B) X	:	5-9	9-13	13-17	17-21	21-24
f	:	7	18	25	18	7

یہاں پر 17 - 13 وسطی جماعت ہے۔

آپ آسانی سے سمجھ سکتے ہیں کہ یہ متشاکل تقسیمیں ہیں۔ آپ اس پر بھی غور کریں (بلکہ محسوب کر کے تصدیق کرلیں) کہ ہرسٹ کے لیے اوسط، وسطانیہ اور کثیریہ یکساں ہیں۔ درحقیقت ایک ایسی متشاکل تقسیم کے لیے جس میں تعددات بتدریج بڑھتے اور پھر بتدریج گھٹتے ہیں (یعنی گھنٹہ نما شکل) اوسط، وسطانیہ اور کثیریہ مساوی ہوتے ہیں۔ شکل 16.1 میں ترسیمی کاغذ پر ایسے مواد کے خاکے کا مطالعہ کیجیے۔

شکل 16.1



متشاکل تقسیم

اگر مکمل متشاکل مواد کی ترسیم کو اوسط سے گزرنے والے خط پر موڑ لیں اور منحنی کے ایک جانب کا حصہ، دوسری جانب کے حصے پر مکمل طور پر منطبق ہوتا ہے تب آپ کہہ سکتے ہیں کہ ایک رخ دوسرے رخ کا بعینہٖ عکس ہے۔ لیکن عام طور پر تعددی تقسیمات مکمل طور پر متشاکل نہیں ہوتیں بعض قدرے غیر متشاکل ہوتی ہیں اور بعض تو بہت زیادہ۔ مندرجہ ذیل دو غیر متشاکل (خمیدہ) تقسیمات پر غور کیجیے:

21 - 24	17 - 21	13 - 17	9 - 13	5 - 9	: X (A
7	15	25	18	7	: f
21 - 24	17 - 21	13 - 17	9 - 13	5 - 9	: X (B
2	10	15	28	7	: f

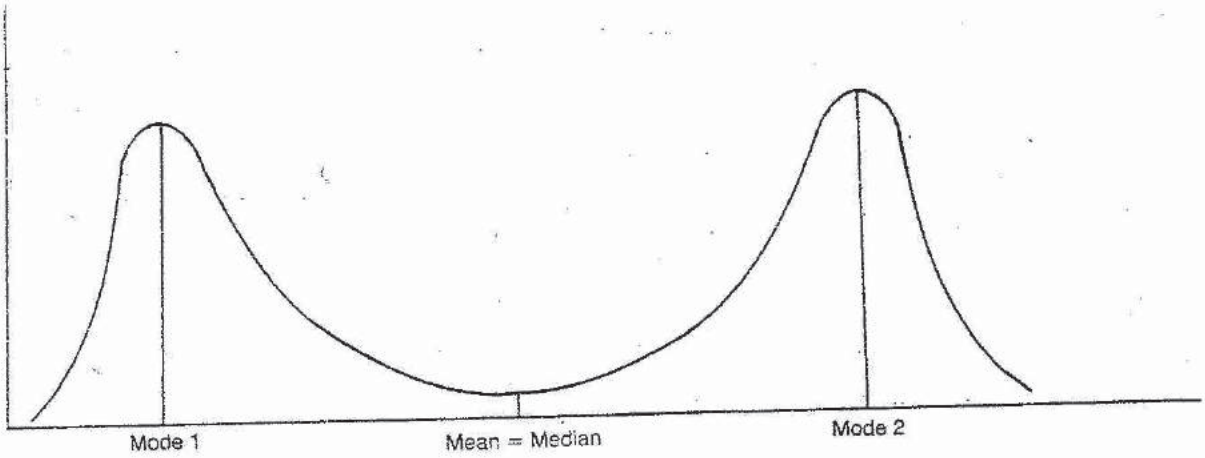
یہاں پر تعددات کی تقسیم مرکزی قدر کے گرد متشاکل طور پر نہیں ہے۔ تقسیم A میں غیر متشاکل ہونے کی حد کم ہے جب کہ B میں یہ حد نسبتاً زیادہ ہے۔

لفظ 'خمیدگی' کو مواد کے غیر متشاکل ہونے کی حد کے اظہار کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر تعددی تقسیم متشاکل نہ ہو تو اس کو خمیدہ کہا جائے گا۔ لفظ 'خمیدگی' لغوی طور پر ''غیر متشاکل ہونے'' یا ''تشاکل کی عدم موجودگی'' کو ظاہر کرتا ہے۔ لہٰذا ایک متشاکل تقسیم میں صفر خمیدگی ہوتی ہے۔

مقداروں میں بتدریج اتار چڑھاؤ کے باوجود ایک تقسیم متشاکل ہو سکتی ہے۔ مندرجہ ذیل تقسیمات پر غور کیجیے:

مدات کا سائز :	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
تعدد :	40	27	15	10	15	27	40

متشاکل تقسیم کی یہ بھی ایک صورت ہے لیکن اس صورت میں کثیریہ کی دو قدریں ہیں اور دونوں ہی حسابی اوسط اور وسطانیہ سے مختلف ہیں جو وسطی گروپ میں واقع ہیں۔ آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ ایسی متشاکل تقسیمات میں جن کو دو کثیریہ یا (Bi-modal or U-shaped) کہتے ہیں، صرف حسابی اوسط اور وسطانیہ مساوی ہوتے ہیں۔ شکل 16.2 پر غور کیجیے اور ترسیمی کاغذ پر ایسے مواد کی شکل کا مطالعہ کیجیے۔



شکل 16.2 دو کثیریہ U شکلی تقسیم

ایک دو کثیریہ تقسیم بھی خمیدہ تقسیم ہو سکتی ہے جیسا کہ مندرجہ ذیل مثال سے ظاہر ہے:

مدات کا سائز :	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
تعدد :	27	18	10	5	17	17	30

یہاں پر بھی وسطی گروہ یا مرکزی قدر کے اطراف دونوں جانب مدات کی تقسیم یکساں نہیں ہے لہٰذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ خمیدگی کا مطالعہ مرکزی رجحان کے اطراف مدات کی تقسیم کا مطالعہ ہے۔

مندرجہ ذیل مقاصد کی تکمیل کے لیے مواد کی خمیدگی کا تجزیہ کیا جاتا ہے۔

(1) ارتکاز کی نوعیت اور درجہ معلوم کرنے میں مددگار ہوتا ہے کہ آیا یہ بالائی قدروں میں ہے یا نچلی قدروں میں واقع ہے۔

(2) حسابی اوسط، وسطانیہ اور کثیریہ یعنی $\bar{X} - M_o = 3M_d - 2\bar{X}$ ۔ میں تجربی رابطہ (empirical relationship) معتدل خمیدہ تقسیم پر مبنی ہوتا ہے۔ خمیدگی کا یہ پیمانہ ظاہر کرتا ہے کہ کس حد تک یہ تجربی رابطہ صحیح ہے۔

(3) خمیدگی سے یہ پتہ چلتا ہے کہ آیا تقسیم طبعی ہے یا نہیں۔ نارمل تقسیم سے متعلق اس اکائی میں آگے چل کر آپ سیکھیں گے۔

16.3 مثبت اور منفی خمیدگی Positive and Negative Skewness

خمیدہ مواد کی صورت میں دو امکانات ہوتے ہیں۔ (1) خمیدگی مثبت ہوسکتی ہے یا (2) خمیدگی منفی ہوسکتی ہے۔ گھنٹی نما مواد میں یا یک کثیریہ مواد میں، جو فطرت میں بہت عام ہے، مثبت اور منفی خمیدگی کی سمت کے تصور کو سمجھنا نہایت آسان ہے۔ اس بارے میں کثیریہ بہت اہم کردار ادا کرتا ہے۔ کثیریہ کے دونوں طرف مواد کا پھیلاؤ خمیدگی کی سمت کے تعین میں بہت مددگار ہوتا ہے۔ ذیل میں دیئے گیے مواد کے دو سٹوں پر غور کیجیے۔

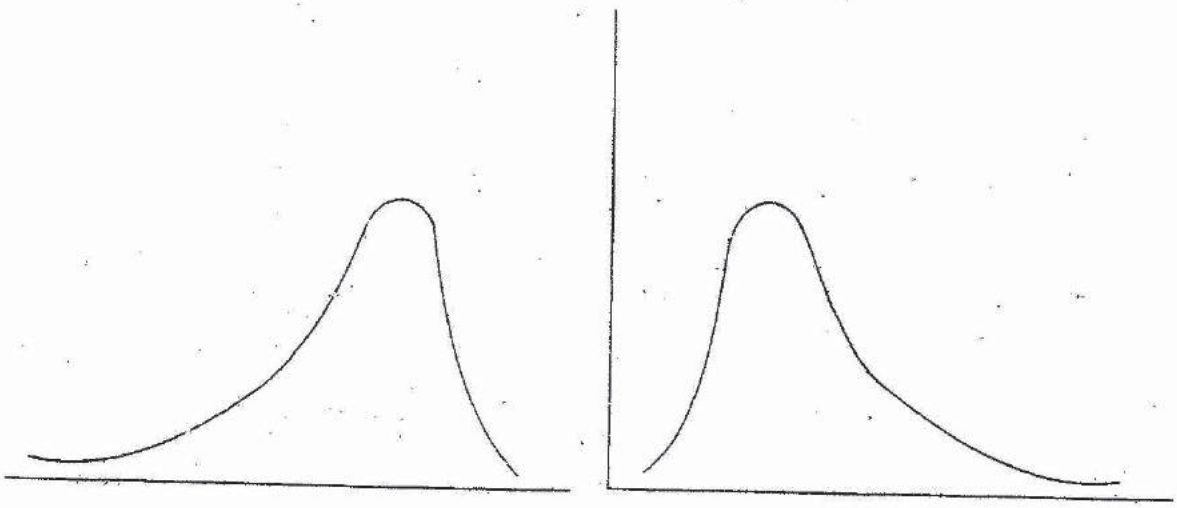
(A)

مدات کا سائز	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
تعدد	5	12	27	10	8	3	1

(B)

مدات کا سائز	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
تعدد	2	5	12	18	30	21	6

سٹ B کی طرح اگر نچلی قدر کی طرف یا بائیں جانب طویل دُم ہو یعنی کثیریہ کی نچلی جانب بہت بڑا پھیلاؤ ہو تو خمیدگی منفی یا یساری (left hand side) ہوگی۔ ایسی صورت میں اوسط، وسطانیہ سے اور وسطانیہ، کثیریہ سے کم ہوتا ہے (یعنی Mean < Median < Mode) شکل 16.3 کو دیکھیے تاکہ ترسیمی کاغذ پر مواد سمجھ میں آجائے۔



شکل 16.4
مثبت طور پر خمیدہ تقسیم
Positively skewed distribution

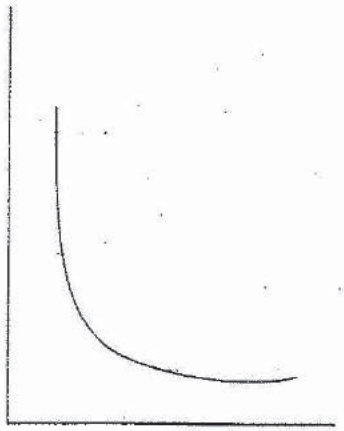
شکل 16.3
منفی طور پر خمیدہ تقسیم
Negatively skewed distribution

جیسا کہ سٹ A کی صورت میں ہے، اگر اونچی قدروں کی جانب یا دائیں طرف یعنی کثیریہ کی اونچی جانب زیادہ پھیلاؤ ہے تو خمیدگی مثبت ہوگی یا یمینی (right hand side)۔ اس صورت میں اوسط، وسطانیہ سے زیادہ (کثیریہ > وسطانیہ > اوسط) اور وسطانیہ، کثیریہ سے زیادہ ہوتا ہے۔ شکل 16.4 میں ترسیمی کاغذ پر اس کا شکلی اظہار ہے۔

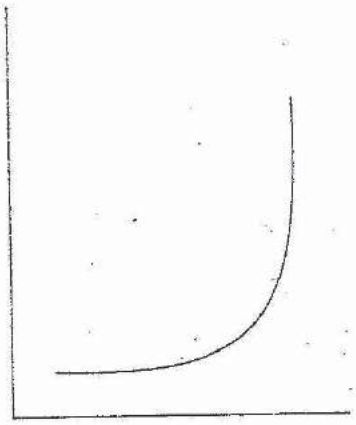
اس قسم کے مواد کو مطول گھنٹی نما مواد (elongated bell shaped data) کہتے ہیں۔ انتہائی مثبت خمیدگی کی صورت اس وقت پیدا ہوتی ہے جب کہ نچلی قدروں میں تعددات زیادہ ہوں جیسے جیسے قدریں بڑھتی ہیں، یہ تعددات بتدریج گرتے جاتے ہیں۔ اسی طرح انتہائی منفی خمیدگی کی صورت اس وقت پیدا ہوتی ہے جبکہ تعددات نچلی قدروں میں کم ہوتے ہیں اور جیسے جیسے قدروں میں اضافہ ہوتا ہے ان میں بھی بتدریج اضافہ ہوتا جاتا ہے اور اس طرح اعظم ترین تعدد اعظم ترین قدر کو ظاہر کرتا ہے۔ اس قسم کا مواد J شکلی مواد کہلاتا ہے۔ مندرجہ ذیل دو قسم کے موادوں پر غور کیجیے۔

(A)	مدات کا سائز :	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
	تعدد :	27	20	12	6	3
(B)	مدات کا سائز :	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
	تعدد :	3	6	12	20	27

سٹ (Set) A اونچے درجہ کی مثبت خمیدگی کو ظاہر کرتا ہے اور سٹ (Set) B اونچے درجہ کی منفی خمیدگی کو ظاہر کرتا ہے۔ ترسیمی کاغذ پر ان کی شکل، شکل 16.5A اور شکل 16.5B کی طرح ہوگی۔



شکل 16.5 A
"J" نما مثبت خمیدہ تقسیم



شکل 16.5 B
"J" نما منفی خمیدہ تقسیم

نوٹ : مواد کو خمیدہ یا متشاکل ہونے کے لیے مواد میں مرکزی رجحان سے انحرافات کا موجود رہنا ضروری ہے

اپنی معلومات کی جانچ A

(1) متشاکل مواد اور خمیدہ مواد میں فرق کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

(2) مثبت خمیدگی اور منفی خمیدگی میں فرق بیان کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

(3) بیان کیجیے کہ اونچی خمیدگی اور معتدل خمیدگی میں کیا فرق ہے۔

.....

.....

.....

(4) گھنٹی نما اور U-شکلی مواد میں فرق ظاہر کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

(5) تحریر کیجیے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) تمام تقسیمات کو منفی یا مثبت خمیدہ تقسیمات میں درجہ بند کیا جاسکتا ہے۔

(ii) متشاکل تقسیم کے دو نصف حصے ایک دوسرے کے عکس ہوتے ہیں۔

(iii) ''یک متشاکل'' تقسیم میں وسطانیہ سے مثبت اور منفی انحرافات کا حاصل جمع ہمیشہ صفر کے مساوی ہوتا ہے۔

(iv) J- شکلی تقسیم معتدل خمیدگی کو ظاہر کرتی ہے۔

(v) کسی مواد میں یہ ممکن ہے کہ اوسط = وسطانیہ = کثیریہ ہو اس کے باوجود یہ مواد مکمل متشاکل نہیں ہوتا۔

(vi) مثبت خمیدگی کا مطلب ہے حسابی اوسط کی قدر کثیریہ سے کم ہے۔

(vii) خمیدہ تقسیم میں وسطانیہ، حسابی اوسط کے کبھی مساوی نہیں ہوسکتا۔

(viii) حسابی اوسط اور کثیریہ میں فرق جتنا زیادہ ہوگا، تقسیم اسی قدر زیادہ خمیدہ ہوگی۔

(ix) U شکلی مواد میں دو کثیریے ہوتے ہیں۔

(x) دائیں جانب طویل تر دُم کا مطلب منفی طور پر خمیدہ مواد ہے۔

(xi) U شکلی تقسیمات ہمیشہ متشاکل ہوتی ہیں۔

(xii) اعلیٰ خمیدہ مواد ہمیشہ مثبت خمیدہ ہوتا ہے۔

(6) مندرجہ ذیل تقسیمات کی نوعیت پر تبصرہ کیجیے۔

(i) 14, 14, 14, 14, 14,

(ii) 11, 12, 14, 16, 17

(iii) 1, 3, 6, 18, 42

16.4 انتشار اور خمیدگی کے درمیان فرق
Difference Between Dispersion and Skewnss

اکائی 14 اور اکائی 15 میں تشریح کی گئی ہے کہ انتشار کا تعلق بکھراؤ یا پھیلاؤ یا مرکزی قدر کے سلسلوں کے مدات کے انحراف سے ہے۔ آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ انتشار کا پیمانہ، مرکزی رجحان سے مدات کے اوسط انحراف یا بکھراؤ کے درجے کو بتاتا ہے۔ اس کے برعکس خمیدگی کسی سلسلہ کے مدات کے تشاکل سے انحراف کے متعلق ہوتی ہے اور خمیدگی کا پیمانہ تقسیم میں مرکزی رجحان کے اطراف مدات کے عدم توازن کے درجہ کو ظاہر کرتا ہے۔ امتیازی خصوصیات مندرجہ ذیل جدول میں دی گئی ہیں۔

انتشار	خمیدگی
(1) انفرادی قدروں کے پھیلاؤ کا پیمانہ ہے جو اس بات کا تعین کرتا ہے کہ یہ کس حد تک مرکزی رجحان سے انحراف کر سکتا ہے۔	(1) تقسیم کے تشاکل سے انحراف کا پیمانہ ہے جو اس بات کا تعین کرتا ہے کہ مرکزی رجحان کے اطراف کس انداز میں مدات تقسیم ہوئے ہیں۔
(2) تینوں اواسط۔ حسابی اوسط، وسطانیہ اور کثیریہ میں سے کسی ایک کی نمائندہ حیثیت کی تصدیق کرتا ہے۔	(2) تینوں اواسط حسابی اوسط، وسطانیہ اور کثیریہ میں سے کسی دو کے فرق کو ظاہر کرتا ہے۔
(3) متشاکل تقسیم میں کسی بھی قدر کا حامل ہو سکتا ہے۔	(3) متشاکل تقسیم میں اس کی قدر صفر ہوتی ہے۔
(4) مواد کے تغیر کو معلوم کرنے کے لیے مفید ہے۔	(4) اعلیٰ یا ادنیٰ قدروں کے ارتکاز کو معلوم کرنے کے لیے مفید ہے۔

16.5 خمیدگی کی جانچ Tests of Skewness

ہم یہ کیسے کہہ سکتے ہیں کہ کوئی مخصوص تقسیم خمیدہ ہے یا نہیں؟ اگر مندرجہ ذیل خصوصیات موجود ہوں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ تقسیم میں خمیدگی موجود ہے۔

(1) حسابی اوسط، وسطانیہ اور کثیریہ ہم قدر نہ ہوں۔

(2) حسابی اوسط سے مثبت انحرافات کا حاصل جمع، منفی انحرافات کے حاصل جمع کے مساوی نہ ہو۔

(3) کثیریہ کے دونوں جانب تعددات اور ان کا پھیلاؤ مساوی نہ ہو۔

(4) وسطانیہ سے چوتھائیے مساوی فاصلہ پر نہ ہوں یعنی $(Q_3 - M_d)$ اور $(M_d - Q_1)$ مساوی نہ ہوں۔

(5) سلسلہ کے مشاہدوں کو اگر ترسیمی کاغذ پر مرتسم کیا جائے تو ان سے متشاکل منحنی حاصل نہ ہو۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر ترسیمی کاغذ کو وسطانیہ یا حسابی اوسط کے آر پار عمودی طور سے تقسیم کر کے موڑا جائے تو منحنی کے دونوں نصف حصے ایک دوسرے پر مکمل طور پر منطبق نہ ہوں۔

16.6 خمیدگی کے پیمانے Measures of Skewness

کسی سلسلے میں خمیدگی کی حد اور سمت کا مطالعہ کرنے کے لیے خمیدگی کے مختلف پیمانے استعمال کیے جاتے ہیں۔ یہ پیمانے مطلق یا اضافی دونوں ہو سکتے ہیں۔

خمیدگی کے مطلق پیمانے (Absolute Measures of Skewness)

مطلق پیمانے غیر متشاکل ہونے کی حد اور مثبت یا منفی ہونے کی کیفیت کو بتلاتے ہیں۔ خمیدگی کا پہلا مطلق پیمانہ ہے حسابی اوسط اور کثیریہ کے درمیان فرق یا حسابی اوسط اور وسطانیہ کے درمیان فرق پر مبنی ہوتا ہے۔ علامتی طور پر

(i) مطلق خمیدگی = کثیریہ۔ حسابی اوسط یا

(ii) مطلق خمیدگی = وسطانیہ۔ حسابی اوسط

اگر حسابی اوسط کی قیمت کثیریہ یا وسطانیہ سے زیادہ ہو تو خمیدگی مثبت ہوتی ہے ورنہ منفی ہوتی ہے۔ یہ بات نوٹ کی جائے کہ مثبت خمیدہ تقسیم کے لیے، حسابی اوسط کی قدر اعظم ترین اور کثیریہ کی قدر اقل ترین ہوتی ہے۔ اسی طرح منفی خمیدہ تقسیم کے لیے کثیریہ کی قدر اعظم ترین اور حسابی اوسط کی قدر اقل ترین ہوتی ہے۔ دونوں صورتوں میں وسطانیہ، حسابی اوسط اور کثیریہ کے درمیان ہوتا ہے۔

خمیدگی کا دوسرا پیمانہ چوتھائیوں پر مبنی ہوتا ہے، جو اس حقیقت پر منحصر ہے کہ عموماً متشاکل تقسیم میں Q_1 اور Q_3 وسطانیہ سے مساوی فاصلے پر ہوتے ہیں یعنی $Q_3 - M_d = M_d - Q_1$ لیکن اگر تقسیم غیر متشاکل ہے تو ایک چوتھائیہ جو طویل تر دم کی جانب واقع ہے، بہ نسبت دیگر چوتھائیہ کے وسطانیہ سے زیادہ فاصلے پر ہوگا۔ ایسی صورت میں، خمیدگی کا مطلق پیمانہ مندرجہ ذیل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مطلق خمیدگی $= (Q_3 - M_d) - (M_d - Q_1) = Q_3 + Q_1 - 2M_d$۔ فارمولے سے ظاہر ہے کہ اگر $(Q_3 - M_d)$ زیادہ ہو $(M_d - Q_1)$ تو خمیدگی مثبت ہوگی ورنہ یہ منفی ہوگی۔ یہ اس لیے صحیح ہے کیونکہ $Q_3 - M_e > M_e - Q_1$ کا مطلب ہے کہ Q_3 اور M_e کے درمیان فرق، M_e اور Q_1 سے زیادہ ہے۔ اس سے مزید یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ Q_3 کی جانب یا دائیں ہاتھ کی جانب طویل تر دم ہوتی ہے یعنی خمیدگی یمینی (right handed) یا مثبت ہے۔

خمیدگی کے اضافی پیمانے

دو یا دو سے زائد تقسیمات میں موجود خمیدگی کے موازنہ کے لیے دی گئی تقسیم یا سلسلہ کے لیے خمیدگی کی قدر ضربی (Co-efficient of skewness) کو محسوب کرتے ہیں۔ اضافی خمیدگی کی پیمائش کے مندرجہ ذیل دو طریقے ہیں۔

(1) کارل پیرسن خمیدگی کی قدر ضربی (Karl Pearson's Coefficient of Skewness): خمیدگی کی پیمائش کے لیے اس طریقہ کو اکثر استعمال کیا جاتا ہے اور یہ پہلے مطلق پیمانے پر مبنی ہے۔ خمیدگی کی پیمائش کے لیے فارمولہ حسب ذیل ہے۔

$$Sk_p = \frac{\text{Mean} - \text{Mode}}{\text{S.D}} \quad \text{یا} \quad \frac{3(\bar{X} - M_d)}{\sigma}$$ یعنی خمیدگی کے پہلے مطلق پیمانے کو معیاری انحراف سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ لہٰذا یہ قدر مواد کی اکائیوں کے تابع نہیں ہوگی۔ متشاکل تقسیم میں یہ قدر صفر ہوگی۔ اگر اوسط، کثیریہ سے زیادہ ہوگا تو خمیدگی کی قدر ضربی مثبت ہوگی ورنہ منفی ہوگی۔ عملاً یہ قدر $3 \pm$ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

اگر کثیریہ کی جامع تعریف موجود نہ ہو تو تجربی رابطہ استعمال کر کے اس کو معلوم کیا جا سکتا ہے :

(Mode = 3 Median - 2 Mean)

مندرجہ بالا فارمولہ ہوگا

$$Sk_P = \frac{3(\text{Mean} - \text{Median})}{\text{S.D.}} \text{ or } \frac{3(\bar{X} - M_d)}{\sigma}$$

نوٹ : چونکہ حسابی اوسط اور معیاری انحراف مواد کے تمام مدات کو استعمال کر کے محسوب کیے جاتے ہیں، کارل پیرسن خمیدگی کی قدر ضربی کی مواد کے پورے مدات کو استعمال کر کے پیمائش کی جاتی ہے۔

کارل پیرسن طریقہ کے اطلاق کو سمجھنے کے لیے اب ہم کچھ مثالوں پر غور کریں گے۔

تمثیل 1

120 طلبہ کی ایک جماعت کے سکشن A اور سکشن B کے طلبہ کے حاصل کردہ نشانات سے مندرجہ ذیل پیمانے حاصل کیے گیے ہیں۔

Section A : $\bar{X} = 46.83$, $\sigma = 14.8$, Mode = 51.67

Section B : $X = 47.83$, $\sigma = 14.8$, Mode = 47.07

تعین کیجیے کہ کونسی تقسیم زیادہ خمیدہ ہے؟

حل

سکشن A

$$Sk_P = \frac{\bar{X} - \text{Mode}}{\sigma}$$
$$= \frac{46.83 - 51.67}{14.8}$$
$$= \frac{-4.84}{14.8}$$
$$= 0.327$$

سکشن B

$$Sk_P = \frac{\bar{X} - \text{Mode}}{\sigma}$$
$$= \frac{47.83 - 47.07}{14.8}$$
$$= \frac{0.76}{14.8}$$
$$= 0.051$$

اس لیے سکشن A میں نشانات کی تقسیم کی خمیدگی زیادہ ہے۔ سکشن A کی خمیدگی منفی ہے، جبکہ B کی خمیدگی مثبت ہے۔

تمثیل 2

کسی مواد کے سٹ کے لیے مندرجہ ذیل شماریاتی پیمانے دیے گیے ہیں۔ معیاری انحراف کی قدر معلوم کیجیے۔

خمیدگی کی قدر ضربی ہے 0.375 ۔ حسابی اوسط ہے 62 اور وسطانیہ ہے 6۔

حل

حسابی اوسط، کثیریہ اور معیاری انحراف پر مبنی خمیدگی کی قدر ضربی، کارل پیرسن خمیدگی کی قدر ہے۔

دی گئی قدروں کو درج کرنے سے، $SK_P = \frac{3(\bar{X} - M_d)}{\sigma}$

$$-0.375 = \frac{3(62-65)}{\sigma}$$

$$\therefore \sigma = \frac{-3(62-65)}{0.375}$$

$$= \frac{-3(-3)}{0.375}$$

$$= \frac{9}{0.375}$$

$$= 24$$

معیاری انحراف 24 ہے۔

(2) باولے خمیدگی کی قدر ضربی Bowley's Coefficient of Skewness :

یہ طریقہ چوتھائیوں پر مبنی ہے یعنی خمیدگی کا دوسرا مطلق پیمانہ۔ خمیدگی کی پیمائش کا فارمولہ ہے:

$$Sk_B = \frac{(Q_3 - M_d) - (M_d - Q_1)}{(Q_3 - M_d) + (M_d - Q_1)}$$

$$= \frac{Q_3 - Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$$

یہ طریقہ خاص طور پر کھلے کنارے کی تقسیم میں کارآمد ہے اور جہاں پر انتہائی قدریں موجود ہوں یا جماعتی وقفے غیر مساوی ہوں۔ خمیدگی کی پیمائش باولے قدر ضربی کی پیمائش کے اسی طریقہ سے کی جانی چاہیے جب کہ مقام بندی کے پیمانے درکار ہوں۔

اگر اس کی قدر صفر ہو تو تقسیم متشاکل (Symmetrical distribution) ہوتی ہے۔ مثبت قدر کے لیے، یہ مثبت خمیدہ تقسیم ہے اور منفی قدر کے لیے یہ منفی خمیدہ تقسیم ہے۔ اس فارمولے کے تحت تغیر کا رینج ہے 1 ± لیکن اس پیمانے کا سب سے بڑا نقص یہ ہے کہ یہ مرکزی 50% مواد پر مبنی ہے اور یہ باقی 50% مواد کو نظر انداز کر دیتا ہے (یعنی Q_1 کے نیچے 25% مواد اور Q_3 سے اوپر 25% مواد)۔ باولے کے طریقے کو سمجھنے کے لیے، تمثیلات 3 اور 4 کا مطالعہ کیجیے:

تمثیل 3

دیئے گئے مواد کے لیے $Q_1 = 58$, $M_d = 59$ and $Q_3 = 61$ ہے۔ خمیدگی کی قدر ضربی معلوم کیجیے۔

حل:

$$Sk_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{61 + 58 - 2 \times 59}{61 - 58}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= 0.33$$

تمثیل 4

کسی تعددی تقسیم میں، چوتھائیوں پر مبنی خمیدگی کی قدر ضربی 0.6 ہے۔ اگر بالائی اور زیریں چوتھائیوں کا حاصل جمع 100 ہے اور وسطانیہ 38 ہے تو بالائی چوتھائیہ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل:

چوتھائیوں پر مبنی باولے B خمیدگی کی قدر ضربی دی گئی ہے

$$Sk_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$$

دی گئی قدروں کو درج کرنے پر

$$0.6 = \frac{100 - 2 \times 38}{Q_3 - Q_1}$$

$$\text{or} \quad Q_3 - Q_1 = \frac{100 - 76}{0.6} = 40 \quad \ldots\ldots \text{(i)}$$

یہ بھی دیا گیا ہے کہ

$$Q_3 + Q_1 = 100 \quad \ldots\ldots \text{(ii)}$$

(i) اور (ii) کو جمع کرنے سے حاصل ہوگا

$$(Q_3 + Q_1) + (Q_3 - Q_1) = 100 + 40$$

$$2Q_3 = 140$$

$$Q_3 = \frac{140}{2} = 70$$

پس بالائی چوتھائیہ ہے 70

16.7 چند تمثیلات Some Illustrations

تمثیل 5

مندرجہ ذیل مواد سے خمیدگی کا موزوں پیمانہ معلوم کیجیے۔

کمیشن کی ادائی	فروشندوں (salesmen) کی تعداد
1000 - 1200	7
1200 - 1400	15
1400 - 1600	18
1600 - 1800	20
1800 - 2000	25
2000 - 2200	10
2200 - 2400	5

حل

چونکہ دی گئی تقسیم کھلے کناروں کی نہیں ہے اور چونکہ کثیریہ بھی معلوم کیا جاسکتا ہے اس لیے مندرجہ ذیل کارل پیرسن فارمولہ استعمال کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{Skewness} = \frac{\text{Mean - Mode}}{\text{S.D.}}$$

$$\text{خمیدگی} = \frac{\text{اوسط - کثیریہ}}{\text{معیاری انحراف}}$$

کمیشن کی ادائی (روپیوں میں)	درمیانی نقطہ (x)	فروشندوں کی تعداد (f)	$d' = \frac{x-1700}{200}$	fd'	fd'^2
1000 - 1200	1100	7	-3	-21	63
1200 - 1400	1300	15	-2	-30	60
1400 - 1600	1500	18	-1	-18	18
1600 - 1800	1700	20	0	0	0
1800 - 2000	1900	25	+1	25	25
2000 - 2200	2100	10	+2	20	40
2200 - 2400	2300	5	+3	15	45
جملہ		n=100		$\Sigma fd' = -9$	$\Sigma fd'^2 = 251$

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times i = 1700 \frac{-9}{100} \times 200$$

$$= 1700 - 18 = 1682$$

$$\text{Mode (کثیریہ)} = L + \frac{f_1 - f_0}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times i$$

کثیریہ گروپ صاف طور پر 2000 - 1800 ہے۔ قدروں کے اندراج پر

$$= 1800 + \frac{25 - 20}{(25 - 20) + (25 - 10)} \times 200$$

$$= 1800 + \frac{5}{20} \times 200 = 1800 + 50 = 1850$$

اب معیاری انحراف محسوب کیا جاتا ہے :

$$\sigma = i \times \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2}$$

$$= 200 \times \sqrt{\frac{251}{100} - \left(\frac{-9}{100}\right)^2}$$

$$= 200 \times \sqrt{2.51 - 0.0081}$$

$$= 1.582 \times 200 = 316.4$$

اب خمیدگی کی قدر ضربی

$$Sk_P = \frac{1682 - 1850}{316.4}$$

$$= -0.531$$

خمیدگی کی یہ قدر ظاہر کرتی ہے کہ تقسیم منفی طور پر خمیدہ ہے۔ اس لیے کمیشن کی بڑی رقم کی جانب زیادہ ارتکاز ہے۔

تمثیل 6

مندرجہ ذیل تقسیم سے اوسط اور وسطانیہ پر مبنی خمیدگی کی قدر ضربی محسوب کیجیے:

جماعت کا وقفہ	تعدد
0 - 10	6
10 - 20	12
20 - 30	22
30 - 40	48
40 - 50	56
50 - 60	32
60 - 70	18
70 - 80	6

حل:

حسابی اوسط، وسطانیہ اور معیاری انحراف کی تحسیب

جماعتی وقفہ	درمیانی نقطہ (X)	$d' = \frac{x-35}{10}$	f	fd'	fd'^2	بیش پذیر مجموعی تعدد
0 - 10	5	-3	6	-18	54	6
10 - 20	15	-2	12	-24	48	18
20 - 30	25	-1	22	-22	22	40
30 - 40	35	0	48	0	0	88
40 - 50	45	1	56	56	56	144
50 - 60	55	2	32	64	128	176
60 - 70	65	3	18	54	162	194
70 - 80	75	4	6	24	96	200
جملہ			200	134	566	

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times i = 35 + \frac{134}{200} \times 10 = 41.7$$

وسطانیہ کے $\frac{N}{2}$ مشاہدات ہیں یا اس کے نیچے 100 مشاہدات ہیں۔

اس لیے وسطانیہ 50 - 40 جماعت میں واقع ہوتا ہے۔

$$M_d = L + \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times i$$

$$= 40 + \frac{100-85}{56} \times 10$$
$$= 42.14$$

$$\sigma = i \times \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}$$
$$= 10 \times \sqrt{\frac{566}{200} - \left(\frac{134}{200}\right)^2}$$
$$= 10 \times \sqrt{2.83 - 0.449}$$
$$= 1.543 \times 10 = 15.43$$

حسابی اوسط اور وسطانیہ پر مبنی پیرسن خمیدگی کی قدر ضربی ہوگی :

$$Sk_p = \frac{3(\bar{X} - M_d)}{\sigma}$$
$$= \frac{3(41.7 - 42.14)}{15.43}$$
$$= \frac{3(-0.44)}{15.43}$$
$$= -0.085$$

پس تقسیم، منفی طور پر خمیدہ ہے اور اس کا درجہ خمیدگی بہت کم ہے

تمثیل 7

مندرجہ ذیل مواد سے چوتھائیوں پر مبنی خمیدگی کی قدر ضربی محسوب کیجیے :

ماہانہ تنخواہ	تعداد ملازمین
1000 - 1200	5
1200 - 1400	14
1400 - 1600	23
1600 - 1800	50
1800 - 2000	52
2000 - 2200	25
2200 - 2400	22
2400 - 2600	7
2600 - 2800	2
	200

حل:

چوتھائیوں کی تخمیب

ماہانہ تنخواہ	تعداد	مجموعی تعداد
1000 - 1200	5	5
1200 - 1400	14	19
1400 - 1600	23	42
1600 - 1800	50	92
1800 - 2000	52	144
2000 - 2200	25	169
2200 - 2400	22	191
2400 - 2600	7	198
2600 - 2800	2	200

Q_1 کے $\frac{N}{4}$ مشاہدات ہیں یا اس کے نیچے 50 مشاہدات ہیں۔اس لیے یہ جماعت 1600 - 1800 میں واقع ہے۔

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - c}{f} \times i$$
$$= 1600 + \frac{50 - 42}{50} \times 200$$
$$= 1632$$

Q_2 (وسطانیہ) کے $\frac{N}{2}$ مشاہدات ہیں یا اس کے نیچے 100 مشاہدات ہیں۔اس لیے یہ جماعت 1800 - 2000 میں واقع ہے۔

$$M_d = 1800 + \frac{100 - 92}{52} \times 200$$
$$= 1800 + 30.77 = 1830.77$$

Q_3 کے $\frac{3N}{4}$ مشاہدات ہیں یا اس کے نیچے 150 مشاہدات ہیں۔ اس لیے یہ جماعت 2000-2200 میں واقع ہے۔

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - C}{f} \times i$$
$$= 2000 + \frac{150 - 144}{25} \times 200$$
$$= 2000 + 48 + 2048$$

خمیدگی کی قدر ضربی $\text{Coefficient of } Sk = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{2048 + 1632 - (2 \times 1830.77)}{2048 - 1632}$$
$$= \frac{18.46}{416}$$
$$= 0.044$$

تمثیل 8

مندرجہ ذیل جدول میں کسی فیکٹری کے 500 مزدوروں کی ماہانہ آمدنی پیش ہے

ماہانہ آمدنی (روپے)	ملازمین کی تعداد
1000 - سے کم	10
1000 - 1500	25
1500 - 2000	145
2000 - 2500	220
2500 - 3000	70
3000 سے زیادہ	30

(i) زیر مشاہدہ مرکزی 50% ملازمین کی آمدنی کے حدود معلوم کیجیے۔

(ii) باولے کے مطابق خمیدگی کی قدر ضربی معلوم کیجیے۔

حل

(i) مرکزی 50% مزدوروں کے حدود معلوم کرنے کے لیے Q_1 اور Q_3 محسوب کیجیے۔

ماہانہ آمدنی (روپے)	چوتھائیوں کی تحسیب f	مجموعی تعداد
1000 سے کم	10	10
1000 - 1500	25	35
1500 - 2000	145	180
2000 - 2500	220	400
2500 - 3000	70	470
3000 سے زیادہ	30	500

Q_1 کے $\frac{N}{4}$ مشاہدات ہیں یا اس کے نیچے 125 مشاہدات ہیں۔ لہذا یہ جماعت 1500-2000 میں واقع ہے۔

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - c}{f} \times I$$

$$= 1500 + \frac{125 - 35}{145} \times 500$$

$$= 1500 + 3103 = 1810.3$$

Q_3 کے $\frac{3N}{4}$ مشاہدات ہیں یا اس کے نیچے 375 مشاہدات ہیں۔ لہذا یہ جماعت 2500 - 2000 میں واقع ہے۔

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - c}{f} \times i$$

$$= 2000 + \frac{375 - 180}{220} \times 550$$

$$= 2000 + 443.18 = 2443.18$$

لہذا 50% مرکزی مزدوروں کی آمدنیاں 1810.3 روپے اور 2443.18 روپے کے درمیان واقع ہیں۔

(ii) باولے خمیدگی کی قدر ضربی :

$$Sk_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$$

M_d کے $\frac{N}{2}$ یا اس کے نیچے 250 مشاہدات ہیں۔ لہذا یہ جماعت 2000 - 2500 میں واقع ہوتی ہے۔

$$M_d = L + \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times i$$

$$= 2000 + \frac{250 - 180}{220} \times 500$$

$$= 2000 + 159.1 = 2159.1$$

$$\therefore Sk_B = \frac{2443.18 + 1810.3 - (2 \times 2159.1)}{2443.18 - 1810.3}$$

$$= \frac{-64.74}{632.88} = -0.102$$

منفی قدر ضربی (-0.102) سے ظاہر ہے کہ Q_3 اور M_d کا درمیانی فاصلہ، M_d اور Q_1 کے درمیانی فاصلے سے کم تر ہے یعنی تقسیم بائیں جانب خمیدہ ہے۔

تمثیل 9

مندرجہ ذیل مواد سے کارل پیرسن کے مطابق خمیدگی کی قدر ضربی محسوب کیجیے:

آمدنی (روپے فی یوم)	دکانوں کی تعداد
0 سے زیادہ	150
100 سے زیادہ	140
200 سے زیادہ	100
300 سے زیادہ	80
400 سے زیادہ	80
500 سے زیادہ	70
600 سے زیادہ	30
700 سے زیادہ	14
800 سے زیادہ	0

حل

مجموعی تعددی تقسیم کو معمولی تعددی تقسیم میں تبدیل کرنے سے :

آمدنی (روپے فی یوم)	دُکانوں کی تعداد
0 - 100	10
100 - 200	40
200 - 300	20
300 - 400	0
400 - 500	10
500 - 600	40
600 - 700	16
700 - 800	14

چونکہ یہ U- شکلی تقسیم ہے، حسابی اوسط اور وسطانیہ کو استعمال کر کے خمیدگی محسوب کی جائے گی۔

خمیدگی کی قدر ضربی کی تحسیب

آمدنی (روپے فی یوم)	درمیانی نقطہ x	f	$d' = \frac{x - 350}{100}$	fd'	fd'^2	مجموعی تعداد
0 - 100	50	10	-3	-30	90	10
100 - 200	150	40	-2	-80	160	50
200 - 300	250	20	-1	-20	20	70
300 - 400	350	0	0	0	0	70
400 - 500	450	10	1	10	10	80
500 - 600	550	40	2	80	160	120
600 - 700	650	16	3	48	144	136
700 - 800	750	14	4	56	224	150
جملہ		150		64	808	

اوسط کی تحسیب **Calculation of Mean**

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd'}{N} \times i$$

$$= 350 + \frac{64}{150} \times 100$$

$$= 350 + 42.67$$

$$= 392.67$$

وسطانیہ کی تحسیب Calculation of Median

M_d کے $\frac{N}{2}$ یا اس کے نیچے 75 مشاہدات ہیں۔ اس لیے یہ جماعت 400-500 میں واقع ہے۔

$$M_d = L + \frac{\frac{n}{2} - c}{f} \times i$$

$$= 400 + \frac{75 - 70}{10} \times 100 = 450$$

معیاری انحراف کی تحسیب Calculation of Standard Deviation

$$\sigma = i \times \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}$$

$$= 100 \times \sqrt{\frac{808}{150} - \left(\frac{64}{150}\right)^2}$$

$$= 100 \times \sqrt{5.205}$$

$$= 2.281 \times 100 = 228.1$$

$$Sk_p = \frac{3(\bar{X} - M_d)}{\sigma}$$

$$= \frac{3(392.67 - 450)}{228.1}$$

$$= \frac{-171.99}{228.1}$$

$$= 0.754$$

تمثیل 10

معیاری انحراف، کثیریہ اور وسطانیہ کو محسوب کیجیے جب کہ اوسط (Mean) =50، تغیر کی قدر ضربی (Coefficient of variations)=40%، خمیدگی = -0.4

حل

اوسط اور C.V. کی قدروں کو ضابطہ میں درج کرنے سے :

$$C.V. = \frac{S.D.}{Mean} \times 100$$

$$40 = \frac{S.D.}{50} \times 100$$

$$S.D. = \frac{50 \times 40}{100} = 20$$

کارل پیرسن کا فارمولہ استعمال کرنے سے :

$$Sk_p = \frac{Mean - Mode}{S.D.}$$

$$-0.4 = \frac{50 - Mode}{20}$$

$$Mode = 50 + 20 \times 0.4$$

$$= 58$$

تجربی رابطہ (empirical relationship) استعمال کرنے سے

Mean-Mode = 3 (Mean-Median)

50 - 58 = 3 (50 - Median)

-8 = 150 -3 Median

3 Median = 150 + 8

$$\text{Median} = \frac{158}{3}$$

= 52.67

تمثیل 11

مندرجہ ذیل مواد سے خمیدگی کا موزوں پیمانہ معلوم کیجیے:

فروخت (لاکھ روپے میں)	کمپنیوں کی تعداد	پیش پذیر تعدد
50 سے کم	8	8
50 - 60	12	20
60 - 80	20	40
80 - 100	25	65
100 اور سے زیادہ	15	80

حل:

یہاں پر جماعتی وقفے غیر مساوی ہیں اور کھلے ہیں۔ لہذا خمیدگی معلوم کرنے کے لیے باولے خمیدگی کی قدر ضربی کا طریقہ موزوں ہے۔

$$Sk_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$$

اب Q_1 کے $\frac{N}{4}$ مشاہدات ہیں یا اس کے نیچے 20 مشاہدات ہیں۔اس لیے یہ جماعت 60 - 50 میں واقع ہے۔

$$Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - c}{f} \times i$$

$$= 50 + \frac{20 - 8}{12} \times 10$$

$$= 60$$

Q_2 (وسطانیہ) کے $\frac{N}{2}$ مشاہدات ہیں یا اس کے نیچے $\frac{80}{2}$ یا 40 مشاہدات ہیں۔اس لیے یہ جماعت 80-60 میں شامل ہے۔

$$M_d = L + \frac{\frac{n}{2} - c}{f} \times i$$

$$= 60 + \frac{40 - 20}{20} \times 20$$

$$= 80$$

Q_3 کے $\frac{3n}{4}$ یا اس کے نیچے 60 مشاہدات ہیں۔ اس لیے یہ جماعت 80-100 میں واقع ہے۔

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3n}{4} - c}{f} \times i$$
$$= 80 + \frac{60 - 40}{25} \times 20$$
$$= 96$$

$$Sk_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$$
$$= \frac{96 + 60 - (2 \times 80)}{96 - 60}$$
$$= -0.11$$

خمیدگیکی یہ قدر ظاہر کرتی ہے کہ تقسیم بائیں جانب ہلکی سی خمیدہ ہے' اور اس لیے فروخت کی اونچی قدروں میں تقسیم کی نچلی قدروں کی بہ نسبت زیادہ ارتکاز ہے۔

تمثیل 12

مندرجہ ذیل حقائق کسی فرم میں رونما صنعتی تنازعہ سے قبل اور بعد کے جمع کردہ ہیں :

	تنازعہ سے قبل	تنازعہ کے بعد
اوسط اجرت (روپے)	850	900
وسطانیہ اجرت (روپے)	820	800
کثیریہ اجرت (روپے)	760	600
چوتھائیہ (روپے)	750 اور 920	750 اور 950
معیاری انحراف (روپے)	30	110
ملازمین کی تعداد	600	550

مندرجہ بالا مواد کو استعمال کر کے، تنازعہ سے قبل اور بعد کمپنی کے موقف کا ممکنہ حد تک مکمل تقابل کیجیے۔

حل:

(a) تنازعہ کے نتیجہ میں مزدوروں کی تعداد میں 50 کی کمی ہوی یعنی 600 کے بجاے 550 مزدور رہ گئے۔

(b) اگر چہ اوسط اجرت میں ہلکا سا اضافہ ہوا ہے، تنازعہ کے بعد، ماہانہ تنخواہ کے بل کے لحاظ سے فرم 15,000 روپے تک بچت کر رہی ہے۔

تنازعہ سے پہلے کل اجرت (600×850) = 5,10,000 روپے

تنازعہ کے بعد کل اجرت (550×900) = 4,95,000 روپے

فرق = 15,000 روپے

(c) وسطانیہ اور کثیریہ اجرتیں گھٹ گئی ہیں۔ تنازعہ سے پہلے مزدوروں کی 50% تعداد 820 روپے اور اس سے زیادہ اجرت حاصل کر رہی تھی

لیکن تنازعہ کے بعد اس زمرے میں مزدوروں کی تعداد 50% سے کم ہوگئی ہے۔ اسی طرح اکثر مزدوروں کو تنازعہ کے بعد تقریباً 600 روپے ادا کیے جا رہے ہیں بمقابل (تنازعہ سے پہلے) 760 روپے کے۔

(d) پہلا چوتھائیہ Q_1 تبدیل نہیں ہوا ہے۔ دوسرا چوتھائیہ Q_2 (یعنی وسطانیہ) ہلکا سا کم ہوا، لیکن تیسرے چوتھائیہ Q_3 میں اضافہ ہوا ہے۔ معلومات کی اہمیت، مندرجہ ذیل جدول سے ظاہر ہے۔

مزدوروں کے زمرے	اجرت (روپے)	
	تنازعہ سے پہلے	تنازعہ کے بعد
A- کم ترین ادا شدہ 25%	750 تک	750 تک
B- 25% والا اگلا اونچا گروپ	750-820	750-800
C- 25% والا اگلا گروپ	820-920	800-950
D- 25% اعظم ترین ادا شدہ گروپ	920 سے زیادہ	950 سے زیادہ

زمرہ (A) کے مزدور غیر متاثر رہے ہیں۔ اگلے اونچے زمرہ (B) کے مزدور اب کمتر رینج کی تنخواہ تک محدود ہوگئے ہیں لیکن اعظم ترین ادا شدہ زمروں (C) اور (D) کے مزدور اب تنازعہ کے بعد عام طور پر زیادہ تنخواہ پا رہے ہیں۔

(e) معیاری انحراف میں 30 روپے سے 110 روپے تک اضافہ ہوا ہے جس کا نتیجہ یہ ہے کہ تنازعہ کے بعد انفرادی اجرتوں کی تغیر پذیری زیادہ ہوگئی ہے۔ موزوں تقابل کے لیے ہمیں مندرجہ ذیل قدریں حاصل ہیں۔

تغیر کی قدر ضربی (C.V.) (تنازعہ سے پہلے) $= \frac{30}{850} \times 100 = 3.53\%$

تغیر کی قدر ضربی (C.V.) (تنازعہ کے بعد) $= \frac{110}{900} \times 100 = 12.2\%$

بلحاظ حسابی اوسط بھی تغیر میں اضافہ ہوا ہے۔

(f) خمیدگی کے پیمانے ہیں۔

	تنازعہ سے پہلے	تنازعہ کے بعد
پیرسن کا پیمانہ	$\frac{850-760}{30} = 3$	$\frac{900-600}{100} = 2.73$
باؤلے کا پیمانہ	$\frac{920-2(820)+750}{920-750}$	$\frac{950-2(800)+750}{950-750}$
	$= 0.18$	$= 0.50$

تنازعہ کے بعد پیرسن کا پیمانہ گھٹ گیا ہے جب کہ باؤلے کا پیمانہ بڑھ گیا ہے اور دونوں ہی مثبت ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ 50% کے درمیانی مزدوروں کے لیے کم تر اُجرتوں میں ارتکاز (concentration) بڑھ گیا ہے۔ لیکن جب ہم کُل مزدوروں کے لحاظ سے غور کرتے ہیں، تب کم تر قدروں کی جانب تعددوں کا اضافی ارتکاز کم ہوگیا ہے۔

نوٹ: اس میں کوئی غلطی نہیں کہ ایک ضابطہ سے خمیدگی کی قدر ضربی زیادہ حاصل ہوتی ہے اور دوسرے ضابطہ سے خمیدگی کی قدر ضربی کم ہو جاتی ہے۔ درحقیقت ایسی صورت حال بھی پیش آ سکتی ہے جب کہ ایک ضابطہ مثبت خمیدگی پیش کرے گا اور دوسرا منفی خمیدگی کو پیش کرے گا۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ باؤلے کا طریقہ صرف وسطی 50% مواد پر مبنی ہوتا ہے جب کہ پیرسن کا طریقہ پورے مواد پر محیط ہوتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ B

(1) خمیدگی سے متعلق کارل پیرسن (Karl Pearson) اور باولے (Bowley) کے طریقوں کی وضاحت کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

.....

(2) خمیدگی (Skewness) سے کیا مراد ہے؟

.....

.....

.....

.....

.....

(3) خمیدگی (Skewness) اور انتشار (Dispersion) کے فرق کو واضح کیجیے۔

.....

.....

.....

.....

.....

(4) تحریر کیجیے آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟

(i) خمیدگی اس بات کا فیصلہ کرتی ہے کہ کس حد تک کوئی اوسط مواد کا صحیح نمائندہ ہے۔

(ii) مثبت طور پر خمیدہ تقسیم میں تعددوں کا ارتکاز بائیں جانب ہوتا ہے۔

(iii) صرف خمیدگی کی اضافی قدر تقابل کے لیے استعمال کی جاتی ہے اگرچہ معیاری انحراف کی قدر بھی مساوی ہو۔

(iv) کھلے کنارے کے جماعتی وقفوں کے لیے خمیدگی محسوب نہیں کی جاسکتی۔

(v) ذو کثیریہ تقسیم میں خمیدگی کا وجود نہیں ہوتا۔

(vi) دو تقسیمات کے تغیرات کی ضربی قدریں مختلف ہوں تو ان کی خمیدگی بھی مختلف ہوتی ہے۔

(5) خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

(i) کسی دی گئی تقسیم کا اوسط اور کثیریہ مساوی ہو تو اس کی خمیدگی کی قدر ضربی ..... ہے۔

(ii) خمیدگی مثبت ہوتی ہے جب کہ حسابی اوسط کثیریہ سے ..... ہوتا ہے۔

(iii) کسی متشاکل تقسیم (Symmetrical distribution) میں، اوسط، وسطانیہ اور کثیریہ ..... ہوتے ہیں۔

(iv) خمیدہ تقسیم (Skewed distribution) کی صورت میں وسطانیہ ..... سے ہرگز مساوی نہیں ہوسکتا۔

(v) اگر حسابی اوسط، کثیریہ اور معیاری انحراف، کسی تعددی تقسیم میں بالترتیب 41 ' 45 اور 8 ہوں تو اس کی پیرسن خمیدگی کی قدر ضربی ..... ہوتی ہے۔

(vi) کسی مکمل متشاکل تقسیم (Perfectly Symmetrical distribution) میں 50% مدات 60 کے اوپر اور 75% مدات 75 سے نیچے ہیں۔ اس لیے M_e = ... ' Q_3 = ... ' Q_1 = ... اور چوتھائیہ انحراف کی قدر ضربی ..... اور خمیدگی کی قدر ضربی ..... ہے۔

16.8 طبعی منحنی کی خاصیتیں Properties of Normal Curve

یہ حقیقت عام طور پر مشاہدے میں آئی ہے کہ اکثر و بیشتر فطری مظاہر جیسے انسانی خصوصیات کی پیائش (قد، وزن، ذہانت کی قدر ضربی وغیرہ)، صنعتی اور زرعی پیداوار کی پیائش سے متعلق تعددی تقسیمیں فطرتاً متشاکل ہوتی ہیں۔ عموماً ایسی تمام تقسیموں میں ایک گروپ سے دوسرے گروپ تک تعددوں میں اتار چڑھاؤ ایک مستقل شرح سے ہوتا ہے۔ ان کی ساخت شکل 16.1 کی مانند ہے۔ ماہرین شماریات نے ان تقسیموں کو ایک واحد ریاضیاتی فارمولے کے ذریعہ ظاہر کرنے کی کوشش کی ہے۔ یہ فارمولہ فطرت میں ظاہر ہونے والی بہت ساری تقسیموں کو بیان کرتا ہے اور اسی وجہ سے یہ طبعی منحنی کہلاتی ہے۔ اس مرحلہ پر طبعی منحنی کے ریاضیاتی اظہار کو جاننے کی ضرورت نہیں ہے لیکن اس فارمولے سے ظاہر ہونے والی صفات، مواد کے تجزیہ میں بہت مفید ہیں۔ ایک طبعی منحنی کی مندرجہ ذیل اہم خاصیتیں ہیں۔

(1) بلحاظ حسابی اوسط یہ مکمل طور پر متشاکل ہے اور گھنٹی نما ہے۔

(2) حسابی اوسط = وسطانیہ = کثیریہ (Mean = Median = Mode)

(3) اس کا صرف ایک کثیریہ ہوتا ہے یعنی یہ ''یک کثیریہ'' (Unimodal) ہے

(4) چوتھائیے Q_1 اور Q_3 حسابی اوسط یا وسطانیہ سے مساوی فاصلے پر ہوتے ہیں جیسا کہ مندرجہ ذیل سے ظاہر ہے۔

$$Q_1 = A.M. - 0.6745\ S.D.$$

$$Q_3 = A.M. + 0.6745\ S.D.$$

$$QD = \frac{5}{6} MD \quad \text{تقریباً}$$

$$SD = \frac{2}{3} \quad \text{تقریباً معیاری انحراف}$$

(5) بلحاظ حسابی اوسط، اوسط انحراف $\frac{4}{5} \times S.D.$

(6) طبعی منحنی کی ایک اہم ترین بنیادی خاصیت اس کا ''رقبہ خاصیت'' ہونا ہے۔

(i) حسابی اوسط $\pm$ 0.6745 معیاری انحراف (S.D.) 50% رقبے کا احاطہ کرتا ہے یعنی 25% اپنے ہر دو جانب

(ii) حسابی اوسط $\pm$ 2.5758 معیاری انحراف (S.D.) 99% رقبے کا احاطہ کرتا ہے یعنی 49.5% اپنے ہر دو جانب

(iii) حسابی اوسط $\pm$ 1.96 معیاری انحراف (S.D.) 95% رقبے کا احاطہ کرتا ہے یعنی 47.5 اپنے ہر دو جانب

(iv) حسابی اوسط ± 1 معیاری انحراف (S.D.) 68.37% رقبے کا احاطہ کرتا ہے یعنی 34.14% اپنے ہر دو جانب

(v) حسابی اوسط ± 2 معیاری انحراف (S.D.) 95.4% رقبے کا احاطہ کرتا ہے یعنی 47.7% اپنے ہر دو جانب

(vi) حسابی اوسط ± 3 معیاری انحراف (S.D.) 99.7% رقبے کا احاطہ کرتا ہے یعنی 49.85% اپنے ہر دو جانب

ان خاصیتوں کی افادیت سمجھنے کے لیے اب ہم ایک مثال لیں گے۔

تمثیل 13

فرض کیجیے کہ کسی بڑے گروہ سے منتخب شدہ 100 افراد کا اوسط قد 68 انچ اور معیاری انحراف 1.5 انچ ہے۔

(i) پورے گروہ میں وسطی 95% افراد کے قدوں کا رینج کیا ہے؟

(ii) پورے گروہ کا کثیریہ ' Q.D. اور M.D. کی متوقع قدر کیا ہو سکتی ہے؟

حل:

(i) اب 95% مدات کی قدریں حسابی اوسط ± 1.96 S.D. کی رینج (Range) کے درمیان ہیں۔ لہذا مطلوبہ رینج ہے:

$68 \pm 1.96 \times 1.5$ یا 65.06 انچ 70.94 انچ۔

(ii) اوسط = کثیریہ۔ اس لیے کثیریہ بھی 68 انچ ہوتا ہے۔

$\frac{2}{3}SD = QD$ تقریباً ۔ لہذا $1.5 \times \frac{2}{3} = QD$ = 1 انچ تقریباً

$\frac{4}{5}SD = MD$ تقریباً ۔ لہذا $1.5 \times \frac{4}{5} = MD$ 1.2 انچ تقریباً

درحقیقت طبعی منحنی، شماریاتی استنباط میں نہایت کارآمد ہوتی ہے۔ دیئے گئے مواد کے مرکزی حصے میں تعددوں کے ارتکاز کی حد معلوم کرنے کے لیے بھی اس کو استعمال کیا جاتا ہے۔ مواد کے تجزیہ میں یہ چوتھی اہم خصوصیت ہے جس کو Kurtoses کہتے ہیں جس کی تفصیلات اس نصاب کی وسعت سے باہر ہیں۔

16.9 خلاصہ Let Us Sum Up

مرکزی رجحان کے پیمانے اور تغیرات کے پیمانے کسی مواد کے سٹ کی تمام خصوصیات کو ظاہر نہیں کرتے۔ دو تقسیمات کا یکساں اوسط اور معیاری انحراف ہو سکتا ہے لیکن اپنی تقسیم کی شکل میں یہ وسیع طور پر مختلف ہو سکتے ہیں۔ اگر مواد کی تقسیم متشاکل نہ ہو تو اس کو غیر متشاکل یا خمیدہ کہتے ہیں۔ خمیدہ سے تقسیم میں غیر متشاکل ہونے کا اظہار ہوتا ہے۔ خمیدگی کو محسوب کرنے کے مختلف طریقے حسب ذیل ہیں :۔

	مطلق پیمانہ	اضافی پیمانہ	رینج پر تحدیدات	کس نے دیا
(1)	حسابی اوسط - کثیریہ	$\frac{\text{حسابی اوسط - کثیریہ}}{\text{معیاری انحراف}}$	±3	کارل پیرسن
(2)	حسابی اوسط - وسطانیہ	$\frac{3\,(\text{حسابی اوسط - کثیریہ})}{\text{معیاری انحراف}}$	±3	کارل پیرسن
(3)	$Q_1 + Q_1 - 2M_d$	$\frac{Q_1 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$	±1	باؤلے

اعلیٰ درجہ کے خمیدہ مواد میں سب سے اونچا تعدد، مواد کی ایک انتہا کی جانب موجود رہتا ہے۔ مثبت طور پر خمیدہ تقسیم، مواد کے دائیں ہاتھ کی جانب طویل دُم رکھتی ہے نیز اس کو (یمینی خمیدگی) کا نام دیا جاتا ہے۔ منفی طور پر خمیدہ تقسیم، مواد کے بائیں ہاتھ کی جانب طویل دُم رکھتی ہے اس لیے اس کو یساری خمیدگی کا نام دیا جاتا ہے۔ جب مکمل طور پر متشاکل ترسیمی کاغذ کو (جو گھنٹی نمایا U- شکلی ہوتی ہے) حسابی اوسط کے آر پار عموماً موڑا جائے تو منحنی کے دونوں حصے ایک دوسرے پر مکمل طور پر منطبق ہوتے ہیں۔ فطرت میں پایا جانے والا مواد اکثر و بیشتر طبعی تقسیم کے مشابہہ ہوتا ہے۔ طبعی تقسیم مکمل طور پر متشاکل ہوتی ہے جو گھنٹی نما شکل میں ہوتی ہے۔ حسابی اوسط سے تعدادوں کا ایک فاصلہ مختلف رینجوں (ranges) میں ایک مخصوص فیصد کی شکل میں ہوتا ہے۔ ان فیصدوں کی قدروں سے یہ تعین کرنے میں مدد ملتی ہے کہ دیا ہوا مواد طبعی مواد ہے یا نہیں۔

16.10 کلیدی الفاظ اور علامات Key Words and Symbols

گھنٹی نما مواد **(Bell Shaped Data)** : تعدادات بتدریج بڑھتے ہوئے، اعظم ترین قدر کو پہنچ کر گھٹنے لگتے ہیں۔

J شکلی مواد **(J-Shaped Data)**: اعظم ترین قدر سے شروع ہو کر کم ترین تعدد پر ختم ہوتا ہے اور درمیان میں ایک مستقل شرح سے گرتا ہے، یا اس کے برعکس بھی کیفیت ہو سکتی ہے۔

خمیدگی **(Skewness)** :تشاکل (symmetry) کی عدم موجودگی کی کیفیت۔

متشاکل مواد **(Symmetrical Data)** : جب وسط (درمیان) سے مساوی فاصلہ پر واقع متغیروں کی قدریں مساوی تعداد میں ہوں۔

U مواد **(U-Shaped Data)** : وہ مواد جو ابتداء میں اور آخر میں اونچے اور وسط میں کم تر تعدادات رکھتا ہے۔

علامات کی فہرست

خمیدگی کی قدر ضربی : باؤلے کی Sk_B

خمیدگی کی قدر ضربی : پیرسن کی Sk_P

خمیدگی : مطلق پیمانہ Sk, J

16.11 اپنی معلومات کی جانچ کے جوابات
Answers to Check Your Progress

A) 5) (i) غلط (ii) صحیح (iii) صحیح (iv) غلط (v) غلط (vi) غلط

(vii) صحیح (viii) صحیح (ix) صحیح (x) غلط (xi) غلط (xii) غلط

6) (i) کوئی تغیر نہیں (ii) متشاکل (iii) خمیدہ

B) 4) (i) صحیح (ii) صحیح (iii) صحیح (iv) غلط (v) غلط (vi) صحیح ہو سکتا ہے یا نہیں بھی ہو سکتا ہے۔

5) (i) صفر (ii) سے زیادہ (iii) مساوی (iv) اوسط (v) - 0.5

(vi) $M_e = 60$ ، $Q_3 = 75$ ، $Q_1 = 45$ ، چوتھائیہ انحراف کی قدر ضربی QD = 0.25 ، $Sk_B = 0$

16.12 امتحانی سوالات/مشقیں Terminal Questions/Exercises

سوالات

(1) خمیدگی کے مطلق اور اضافی پیمانے پیش کیجیے۔

(2) عددی مواد کا تجزیہ کرنے کے لیے مرکزی رجحان، انتشار اور خمیدگی تین مختلف پیمانے ہیں۔ تبصرہ کیجیے۔

مشقیں

(1) کسی امتحان میں طلبا کے نشانات کی مندرجہ ذیل تعددی تقسیم ہے، کارل پیرسن کے مطابق خمیدگی کی قدر ضربی کو محسوب کیجیے:

سے کم نشانات :	10	20	30	40	50	60	70	80
طلبہ کی تعداد :	5	15	30	50	80	100	120	125

(جواب: $\bar{X} = 53$، 17.66، $Sk_P = 0.453$)

(2) مندرجہ ذیل جدول سے کارل پیرسن خمیدگی کی قدر ضربی محسوب کیجیے:

طول حیات (گھنٹوں میں)	نلکیوں کی تعداد
300 - 400	14
400 - 500	46
500 - 600	58
600 - 700	76
700 - 800	68
800 - 900	62
900 - 1000	48
1000 - 1100	22
1100 - 1200	6

جواب: $\left(Sk_P = \frac{715.5 - 669.23}{190.2} = 0.243\right)$

(3) مندرجہ ذیل مواد کسی پٹرول اسٹیشن کی یومیہ فروخت ظاہر کرتا ہے۔ حسابی اوسط، وسطانیہ، معیاری انحراف اور خمیدگی کی قدر ضربی معلوم کیجیے۔

مقدارِ فروخت (لیٹروں میں)	تعداد ایام
700 - 1000	12
1000 - 1300	18
1300 - 1600	20
1600 - 1900	25
1900 - 2200	18
2200 - 2500	5
2500 - 2800	2

جواب: $(\bar{X} = 1426,\ M_d = 1600,\ S.D. = 447.35,\ SK = 1.67)$

(4) مندرجہ ذیل جدول کسی کمپنی میں فروشندوں (Salesmen) کے روزانہ سفری بھتے کی تقسیم کو پیش کرتا ہے۔ باؤلے خمیدگی کی قدر ضربی معلوم کیجیے اور تبصرہ کیجیے۔

سفری بھتہ (روپیوں میں)	فروشندوں کی تعداد
100 - 120	14
120 - 140	16
140 - 160	20
160 - 180	18
180 - 200	15
200 - 220	7
220 - 240	6
240 - 260	4

$$Sk_B = \frac{189.33 + 133.75 - (2 \times 160)}{189.33 - 133.75}$$

جواب: $= 0.145$

(5) نیچے دیے گئے مواد سے موزوں خمیدگی کے پیمانے کے ذریعے محسوب کیجیے۔

عمر (برسوں میں)	تعداد ملازمین
20 سے کم	13
20 - 25	29
25 - 30	46
30 - 35	60
35 - 40	112
40 - 45	94
45 - 50	45
50 اور سے زیادہ	21

جواب : $Sk_B = \frac{42.92 + 31.42 - (2 \times 37.77)}{42.92 - 31.42} = 0.104$

(6) مندرجہ ذیل تقسیم سے خمیدگی کا موزوں پیمانہ معلوم کیجیے۔

سالانہ فروخت (000 روپوں میں) :	0-20	20-50	50-100	100-250	250-500	500-1000
فرمس کی تعداد :	20	50	69	30	22	19

جواب : $Sk_B = \frac{203.75 + 39.95 - (2 \times 76.45)}{203.75 - 39.95} = 0.554$